Kauzalna struktura prostorvremena i narušenja kronalnosti

Mateo Paulišić
Fizički odsjek, PMF, Bjenička c. 32, 10 000, Zagreb

January 25, 2016

Abstract

Kao model za prostor-vrijeme u kontekstu opće teorije rleativnosti koriste se mnogostrukosti. Proučavamo uvjete koje na njih nameće zahtjev za kauzalnost u različitim jačinama. Pomoću uvjeta kauzalne strukture, energijskih uvjeta iskazanih preko operacija na tenzor energije i impulsa te ponašanja kongruencije geodezika, dolazimo do zaključaka o postojanju singulariteta. Dodatno, proučavanjem strukture kompaktnog skupa narušene kronalnosti dolazimo do pojave singulariteta u prostor-vremenu.

1 Uvod i početne definicije

Kauzalnost označava označava vremenski poredak i značenjsku vezu između dva događaja, u kojem jedan događaj zovemo uzrok, a drugi efekt. Već uvidima u specijalnu teoriju relativnosti vidljiva je nedostatnost ovakve definicije - za različite promatrače, dva događaja mogu i ne moraju biti istovremena. Kauzalni odnosi između događaja preciznije su definirani uporabom svjetlosnih stožaca: Efekt se uvijek nalazi unutar budućnosne polovice svjetlosnog stošca uzroka, odnosno, uzrok se uvijek nalazi unutar prošlosne polovice svjetlosnog stošca efekta, i takva definicija poopćena je na opću teoriju relativnosti.

Definicija 1. *Prostorvrijeme je vremenski orijentabilna povezana Hausdorfova C^∞ mnogostrukost (M, g) sa prebrojivom bazom, dimenzije $m \geq 2$, sa Lorentzovom metrikom g predznaka $(-, +, ..., +)$*

TM označava prostor svih tangentnih vektora na mnogostrukosti M. Vektorsko polje $X \in TM$ može biti:

- Prostornog tipa ("space-like"), ako je $g(X(p), X(p)) > 0, \forall p \in M$
- Vremenskog tipa ("time-like"), ako je $g(X(p), X(p)) < 0, \forall p \in M$
- Svjetlosnog tipa ("lightlike", "null"), ako je $g(X(p), X(p)) = 0, \forall p \in M$

Neprekidna krivulja $\gamma : (a, b) \to M$ je budućnosnog tipa ako je za svaku točku krivulje njen tangentni vektor budućnosnog tipa, i analogno za prošlosni tip.

Za točku $p \in M$ možemo definirati:

- Kronološka budućnost: $I^+(p) = q \in M : p \ll q$
- Kronološka prošlost: $I^-(p) = q \in M : q \ll p$
- Kauzalna budućnost: $J^+ = q \in M : p \leq q$
- Kauzalna prošlost: $J^-(p) = q \in M : q \leq p$

gdje $p \ll q$ (odnosno $p \leq q$) znači da je moguće konstruirati glatku krivulju vremenskog (odnosno svjetlosnog) tipa od p prema q.

1.1 Uvjeti kauzanosti

- **Kronološko prostorvrijeme** je ono prostorvrijeme koje ne sadrži nijednu zatvorenu krivulju vremenskog tipa, to jest, $p \notin I^+(p), \forall p \in M$
- **Kauzalno prostorvrijeme** je ono prostorvrijeme koje ne sadrži nijednu zatvorenu krivulju kauzalnog tipa (ni vremenskog i svjetlosnog tipa), to jest ne postoji par različitih točaka p i q, tako da vrijedi $p \leq q \leq p$
- Prostorvrijeme je **jako kauzalno** ako u svakoj točki p, p ima proizvoljno male kauzalno konveksne okoline (otvoreni skup $U \in M$ je kazalno konveksan ako je za svaku putanju γ vremenskog ili svjetlosnog tipa $\gamma \cap U$ povezan skup, odnosno, putanja γ se ne "namata" i ne sječe više puta isti skup)

Definicija 2. *Za S zatvoren, akronalan skup, moguće (ali ne nužno) sa rubom, buduća domena ovisnosti od S je*

$$D^+(S) = (p \in M | \textit{Svaka prošlosna beskrajna kauzalna krivulja kroz } p \textit{ presjeca } S)$$

Analogno tome definira se i prošlosna domena ovisnosti $D^-(S)$. Potpuna (cijela) domena ovisnosti je unija prošlosne i budućnosne domene ovisnosti

$$D(S) = D^-(S) \cup D^+(S)$$

$D(S)$ predstavlja potpun skup događaja čije je uvjete moguće odrediti poznavajući uvjete na S.

Definicija 3. *Zatvoren akronalni skup Σ zove se* ***Cauchyjeva ploha*** *ako vrijedi $D(\Sigma) = M$*

- Prostorvrijeme (M, g_{ab}) je **globalno hiperbolno** ako posjeduje Cauchyjevu plohu Σ.

1.2 Granične krivulje

Za $\{\lambda_n\}$, niz krivulja vremenskog ili svjetlosnog (zajedno - kauzalnog) tipa točka $p \in M$ je **točka konvergencije** ako za bilo koju otvorenu okolinu O od p postoji N takav da $\lambda_n \cap O \neq \emptyset$ za svaki $n > N$. Krivulja λ zove se **krivulja konvergencije** za $\{\lambda_n\}$ ako je svaki $p \in \lambda$ točka konvergencije. Točka p je **granična točka** od $\{\lambda_n\}$ ako svaka otvorena okolina od p sječe bekonačno mnogo λ_n. Krivulja λ je **granična krivulja** niza $\{\lambda_n\}$ ako postoji podniz $\{\lambda'_n\}$ za koji je λ konvergencijska krivulja.

Sljedeća propozicija povezuje kovergencijske točke i granične krivulje, a bit će potrebna u dokazivanju veze između kompaktnog skupa narušenja kronalnosti i singulariteta. Razni autori ovu prpoziciju koriste u različitim oblicima, no općenito je poznata kao "limit curve theorem".

Propozicija 1. *Neka je γ_n niz ne-prostornih beskrajnih krivulja u (M, g_{ab}). Ako točka p točka konvergencije ovog niza, tada postoji ne-prostorna granična krivulja γ niza γ_n, takva da je $p \in \gamma$, i vrijedi da je γ beskrajna.*

1.3 Einsteinova jednadžba

Neprekidana distribucija materije u prostorvremenu je opisana simetričnim tenzorom T_{ab} - **Tenzor tlaka energije i impulsa**. Za promatrača sa 4-brzinom v^a, komponentu $T_{ab}v^a v^b$ interpretiramo kao gustoću energije koju taj promatrač mjeri. Za vektor x^a ortogonalan na v^a veličina $-T_{ab}v^a x^b$ predstavlja gustoću impulsa u x^a smjeru. Iako i u općoj teoriji relativnosti vrijedi uvjet:

$$\nabla^a T_{ab} = 0$$

on ne povlači jednoznačno, kao u specijalnoj teoriji relativnosti, strogo očuvanje energije, no upućuje na to u dijelovima prostorvremena malim u usporedbi sa referentim radijusom zakrivljenosti.

Einsteinova jednadžba povezuje zakrivljenost prostor-vremena sa njegovim energetskim sadržajem. Dana je sljedećim izrazom.

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{1}$$

R_{ab} je Riccijev tenzor, R Riccijev skalar, g_{ab} metrika. Uzimajući trag Einsteinove jednadžbe dolazimo do

$$R = -8\pi T$$

odnosno,

$$R_{ab} = 8\pi (T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T) \tag{2}$$

1.4 Energijski uvjeti

U kontekstu opće relativnosti, na tenzor energije i impulsa postavljamo neke uvjete koje smatramo fizikalno opravdanima. u nastavku su navedeni oni uvjeti koji su važni u kasnijim teoremima.

1.4.1 Slabi energijski uvjet i svjetlosni energijski uvjet

Uvjet koji postavljamo je da je gustoća energije koju mjeri bilo koji promatrač u svemiru ne-negativna.

$$T_{ab}v^a v^b \geq 0 \tag{3}$$

Vektor v^a predstavlja 4-brzinu promatrača koji mjeri gustoću energije. Ako je taj vektor vremenski, tada uvjet zovemo slabi, dok za vektor svjetlosnog tipa, uvjet zovemo svjetlosni. Za ilustraciju, promotrimo moguću dekompoziciju tenzora energije i impulsa

$$T^{ab} = \rho e_0^a e_0^b + p_1 e_1^a e_1^b + p_2 e_2^a e_2^b + p_3 e_3^a e_3^b \tag{4}$$

Za savršeni fluid vrijedilo bi $p_1 = p_2 = p_3 \equiv p$, pa bi tenzor energije i impulsa poprimio oblik $T^{ab} = (p+\rho)e_0^a e_0^b + pg^{ab}$. Proizvoljni normirani, vremenski, budućnosno orijentirani vektor v^a možemo zapisati u sljedećoj dekompoziciji

$$v^a = \gamma(e_0^a + ae_1^a + be_2^a + ce_3^a), \quad \gamma = (1 - a^2 - b^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

gdje su a, b, c proizvoljne konstante ograničene uvjetom $a^2 + b^2 + c^2 < 1$. Kad bi se radilo o svjetlosnom vektoru k^a, njega možemo zapisati u proizvoljnoj dekompoziciji

$$k^a = e_0^a + a'e_1^a + b'e_2^a + c'e_3^a$$

gdje su a', b', c' proizvoljne konstante ograničene uvjetom $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$.

U sljedećem koraku možemo pogledati što bi slabi energijski uvjet značio za konkretan model tenzora energije i impulsa. Ako u (4) uvrstimo izraz za v^a, i slobodno odaberemo $a = b = c = 0$, slabi energijski uvjet postaje $\rho \geq 0$, dok uz odabir $b = c = 0$ (ili $a = b = 0$, $a = c = 0$) uvjet glasi $\rho + p_i > 0$. Jednaki postupkom, za svjetlosni energijski uvjet dobivamo $\rho + p_i \geq 0$.

1.4.2 Jaki energijski uvjet

Veoma važan uvjet u većini teorema o singularitetima je jaki energijski uvjet. Motivacija za njegovo uvođenje je definiranje gravitacije kao privlačne u svim smjerovima, što će biti vidljivo kasnije iz rješenja Raychaudhurijeve jednadžbe. Iz tog razloga jaki energijski uvjet zove se i uvjet vremenske konvergencije (ako se radi o vremenskim geodezicima).

$$(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T)v^a v^b \geq 0 \tag{5}$$

Iz jednakosti (2) vidljivo je da je ovaj uvjet ujedno i uvjet na Riccijev tenzor, odnosno, na zakrivljenost. Zanimljivo je primjetiti kako je jaki energetski uvjet, kada se odnosi na svjetlosne vektore, ekvivalentan slabom svjetlosnom energijskom uvjetu.

$$\left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T\right)k^a k^b \geq 0$$

$$T_{ab}k^a k^b - \frac{1}{2}g_{ab}Tk^a k^b \geq 0$$

Budući da je $g_{ab}k^a k^b = k^a k_a = 0$

$$T_{ab}k^a k^b \geq 0$$

1.4.3 Narušenja energijskih uvjeta

Očekivano je da navedeni uvjeti vrijede za materiju klasične fizike, no već jednostavne demonstracije poput Casimirovog efekta pokazuju da kvantni efekti mogu dovesti do narušenja slabog energijskog uvjeta. Budući da je opća teorija relativnosti još uvijek klasična teorija, za koju očekujemo da bude klasični limes neke buduće kvantne teorije, takva se narušenja aproksimativno mogu izbjeći korištenjem uprosječenih verzija istih uvjeta, poput $\int_\gamma T_{ab}k^a k^b d\lambda \geq 0$, integracije svetlosnog energijskog uvjeta uzduž nekog svjetlosnog geodezika.

Veću težinu ima problem opravdavanja jakog energijskog uvjeta, budući da je on u središtu teorema o singularitetima, a po nekim modelima inflacije koje koriste skalarna polja kao pogon za inflaciju i čak trenutnim mjerenjima ekspanzije svemira, u kojima je ona ubrzana, taj je uvjet narušen [5]. Ipak, u kotekstu ovoga rada, pretpostavljeno je kako je prostor-vrijeme popunjeno samo klasičnom materijom, i pretpostavka je da jaki energijski uvjet vrijedi. Ostaje za istraživanje vrijede li isti ili slični zaključci u slučaju u kojem jaki energijski uvjet nije zadovoljen.

2 Kongruencije geodezika

Neka je O otvorena okolina u prostor-vremenu (M, g). Kongruencijom nazivamo familiju krivulja takvu da kroz svaku točku sadržanu u O prolazi točno jedna krivulja, i one se međusobno ne presjecaju. Cilj nam je naći ponašanje vektora devijacije ξ^a u vremenu, odnosno, uzduž geodezika u ovisnosti o afinom parametru. Konstrukcijom skalara θ kojega ćemo interpretirati kao skalar ekspanzije, želimo pokazati da će uz jaki energijski uvjet svaka kongruencija geodezika konvergirati ka istoj točki.

2.1 Kongruencije vremenskih geodezika

Neka je $u^a = \frac{dx^a}{dt}$ tangentan vektor na vremenski geodezik γ. Neka je ξ^a vektor devijacije između dva susjedna geodezika u kongruenciji, ovisan o vlastitom vremenu geodezika τ. Sljedeće jednakosti vrijede:

$$u^a u_a = -1 \quad u^a_{;b} u^b = 0 \quad u^a \xi_a = 0$$

i označavaju redom: normiranost tangentnog vektora, jednadžbu geodezika, ortogonalnost vektora devijacije i tangetnog vektora. Oznakom $u^a_{;b}$ podrazumijevamo kovarijantnu derivaciju $u^a_{;b} \equiv \nabla_b u^a$

Neka je γ_s familija susjednih geodezika, $s \in [0, 1]$. Vektor (okomit na u^a) devijacije između dva geodezika tada je $\xi^a = \frac{\partial x^a}{\partial s}$. Tangentan vektor je $u^a = \frac{\partial x^a}{\partial t}$. Ako vektor devijacije parcijalno deriviramo po t, a tangentan vektor po parametru s, vidljivo je da vrijedi jednakost $\frac{\partial u^a}{\partial s} = \frac{\partial \xi^a}{\partial t}$, odnosno vrijedi i

$$u^a_{;b}\xi^b = \xi^a_{;b}u^b \tag{6}$$

Definiramo novi tenzor - transverzalnu metriku $h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b$ (transverzalnu u smislu da je okomita na u^a) i uvodimo novo tenzorsko polje $B_{ab} = u_{a;b}$, a budući da vrijedi (6) dobivamo jednadžbu koja mjeri odstupanje vektora devijacije da bude paralelno transportiran uzduž u^a

$$\xi^a_{;b} u^b = B^a{}_b \xi^b \tag{7}$$

Trag tenzora je $B^a{}_a = \theta$. B_{ab} možemo rastaviti u simetrični dio koji uključuje samo trag $\frac{1}{3}\theta h_{ab}$, simetrični dio bez traga $\sigma_{ab} = B_{(ab)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}$ i antisimetrični dio $\omega_{ab} = B_{[ab]}$.

$$B_{ab} = \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \tag{8}$$

σ_{ab} je tenzor smicanja, ω_{ab} je tenzor rotacije geodezika, a θ je skalar ekspanzije. Interpretaciju skalara ekspanzije dodatno ćemo pojasniti kasnije. Po Frobeniusovom teoremu, ako je kongruencija ortogonalna na familiju prostornih hiperpovršina, tada je $\omega_{ab} = 0$.

2.1.1 Raychaudhurijeva jednadžba

Cilj nam je doći do jednadžbe za evoluciju skalara ekspanzije θ. Počinjemo jednadžbom za evoluciju tenzora B_{ab}.

$$\begin{aligned} B_{ab;c}u^c &= u_{a;bc}u^c \\ &= (u_{a;cb} - R_{adbc}u^d)u^c \\ &= (u_{a;c}u^c)_{;b} - u_{a;c}u^c{}_{;b} - R_{adbc}u^d u^c \\ &= -B_{ac}B^c{}_b - R_{adbc}u^d u^c \end{aligned} \tag{9}$$

Izračunajmo trag prethodne jednadžbe

$$\begin{aligned} h^{ab}B_{ab;c}u^c &= \frac{d}{d\tau}B^a{}_a = \frac{d\theta}{d\tau} \\ &= -B_{ac}B^{ca} - R_{dc}u^d u^c \end{aligned}$$

Drugi član sa desne strane je jednostavan, kontrakcijom Riemmanovog tenzora dobijamo Riccijev tenzor. Pogledajmo prvi član:

$$B_{ac}B^{ca} = (\frac{1}{3}\theta h_{ac} + \sigma_{ac} + \omega_{ac})(\frac{1}{3}\theta h^{ca} + \sigma^{ca} + \omega^{ca})$$

$$\frac{1}{9}\theta^2 h_{ac}h^{ca} = \frac{1}{9}\theta^2 h_{ac}h^{ac} = \frac{1}{9}\theta^2 \times 3 = \frac{1}{3}\theta^2$$

jer je h^{ac} simetričan tenzor.

$$h_{ac}\sigma^{ca} = h_{ac}(B^{(ca)} - \frac{1}{3}\theta h^{ac}) = \theta - \frac{1}{3}\theta \times 3 = 0$$

$$h_{ac}\omega^{ca} = 0$$

jer je h_{ac} simetričan, a ω^{ca} antisimetričan tenzor. Sve zajedno, dolazimo do konačnog izraza za *Raychaudhurijevu jednadžbu*

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma_{ab}\sigma^{ab} - \omega_{ab}\omega^{ab} \tag{10}$$

Važno je primijetiti da su $\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0$ i $\omega_{ab}\omega^{ab} \geq 0$.

2.1.2 Interpretacije θ kao skalara ekspanzije

Dokazujemo tvrdnju

$$\theta = \frac{1}{\delta V}\frac{d}{d\tau}\delta V$$

Skalar ekspanzije opisuje normiranu promjenu komada volumena poprečnog presjeka kongruencije. Uvodimo pojmove poprečnog presjeka i njegovog volumena. Odaberemo neki geodezik γ iz kongruencije, na njemu odaberemo točku P u kojoj vrijedi $\tau = \tau_P$. U maloj okolini oko P konstruiramo mali skup $\delta\Sigma(\tau_P)$ točaka P', tako da kroz svaku P' prolazi točno jedan drugi geodezik iz kongruencije i vrijedi $\tau_{P'} = \tau_P$.

$\delta\Sigma(\tau_P)$ zovemo poprečni presjek kongruencije. Namjera nam je izračunati promjenu njegovog volumena u odnosu na susjednu točku $Q \in \gamma$.

Neka su y^i, $i = 1, 2, 3$ koordinate na $\delta\Sigma(\tau_P)$. Svaka točka P' dobija svoju koordinatu y^i. Istoznačno, možemo svaki geodezik iz kongruencije označiti sa y^i. Time smo omogućili korištenje istih koordinata i na $\delta\Sigma(\tau_Q)$.

Sada imamo konstruirani koordinatni sustav (τ, y^i) u okolini geodezika γ. Moguća je koordinatna transformacija između novog sustava, i originalnog sustava $x^a \equiv x^a(\tau, y^i)$. Budući da je y^i konstanta uzduž geodezika, vrijedi relaija:

$$u^a = \left(\frac{\partial x^a}{\partial \tau}\right)_{y^i} \tag{11}$$

S druge strane, vektori

$$e^a_i = \left(\frac{\partial x^a}{\partial y^i}\right)_{\tau}$$

su tangentni na poprečni presjek. Uvodimo novi tenzor dimenzije $d = 3$, koji će nam služiti kao metrički tenzor na poprečnom presjeku,

$$h_{ij} = g_{ab}e^a_i e^b_j$$

Za pomake po $\delta\Sigma(\tau_P)$ (ograničene na $d\tau = 0$) vrijedi:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ab}dx^a dx^b \\ &= g_{ab}\left(\frac{\partial x^a}{\partial y^i}dy^i\right)\left(\frac{\partial x^b}{\partial y^j}dy^j\right) \\ &= g_{ab}e^a_i e^b_j dy^i dy^j \\ &= h_{ij}dy^i dy^j \end{aligned}$$

3D element volumena je $\delta V = \sqrt{det[h_{ij}]}$. Budući da su y^i konstantne uzduž jednog geodezika, d^3y ostaje isti od $\delta\Sigma(\tau_P) \to \delta\Sigma(\tau_Q)$. Prema tome, promjena volumena dolazi samo od promjene $\sqrt{det[h_{ij}]}$.

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d}{d\tau}\delta V = \frac{1}{\sqrt{det[h_{ij}]}}\frac{d}{d\tau}\sqrt{det[h_{ij}]} = \frac{1}{2}h^{ij}\frac{dh_{ij}}{d\tau} \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dh_{ij}}{d\tau} &= \left(g_{ab} e_i^a e_j^b\right)_{;c} u^c \\
&= g_{ab}\left(e^a_{i;c} u^c\right) e_j^b + g_{ab} e_i^a \left(e^b_{j;c} u^c\right) \\
&= g_{ab}\left(u^a_{;c} e_i^c\right) e_j^b + g_{ab} e_i^a \left(u^b_{;c} e_j^c\right) \\
&= u_{b;a} e_i^a e_j^b + u_{a;b} e_i^a e_j^b \\
&= \left(B_{ba} + B_{ab}\right) e_i^a e_j^b
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
h^{ij} \frac{dh_{ij}}{d\tau} &= \left(B_{ba} + B_{ab}\right) h^{ij} e_i^a e_j^b \\
&= 2 B_{ab} h^{ab} = 2 B_{ab} g^{ab} \\
&= 2\theta
\end{aligned} \tag{14}
$$

Prema tome, slijedi da je

$$
\theta = \frac{1}{\sqrt{det[h_{ij}]}} \frac{d}{d\tau} \sqrt{det[h_{ij}]} = \frac{1}{\delta V} \frac{d}{d\tau} \delta V \tag{15}
$$

θ, skalar ekspanzije, jednak frakcionalnoj promjeni volumena poprečnog presjeka kongruencije geodezika.

2.2 Kongruencija svjetlosnih geodezika

Za razliku od vremenskih geodezika, tangentni vektor svjetlosnog geodezika je okomit sam na sebe, pa ga moramo promotriti zasebno. Vrijede sljedeće relacije

$$
k^a k_a = 0, \quad k^a_{;b} k^b = 0, \quad k^a \xi_a = 0, \quad k^a_{;b} \xi^b = \xi^a_{;b} k^b \tag{16}
$$

Ponovo tražimo dio metrike koji je isključivo transverzalan, no u slučaju svjetlosnih geodezika, problem nije toliko trivijalan. Ranije rješenje $h'_{ab} = g_{ab} + k_a k_b$ nije zadovoljavajuće jer $h'_{ab} k^b = k_a \neq 0$. Rješenje tražimo u odabiru pomoćnog svjetlosnog vektorskog polja N^a, takve normalizacije da je $k^a N_a = -1$. Transverzalna metrika tada je dana izrazom:

$$
h_{ab} = g_{ab} + k_a N_b + N_a k_b \tag{17}
$$

Odabir svjetlosnog vektorskog polja N_a nije jedinstven, no kasnije će se pokazati da su zaključci o skalaru ekspanizije neovisni o konkretnom odabiru N_a. Nastavljamo kao i ranije

$$
\xi^a_{;b} k^b = k^a_{;b} \xi^b = B^a{}_b \xi^b \tag{18}
$$

Budući da bi ξ^a mogao imati komponentu koja nije transverzalna, počinjemo izolacijom onog dijela koji je transverzalan.

$$
\tilde{\xi^a} = h^a{}_c \xi^c = \xi^a + \left(N_c \xi^c\right) k^a \tag{19}
$$

A njegovo je ponašanje dano sa

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}^c{}_{;b}k^b &= h^c{}_{d;b}\xi^d k^b + h^c{}_d B^d{}_b \xi^b \\ &= h^c{}_d B^d{}_b \xi^b + \left(N_{d;b}\xi^d k^b\right) k^c\end{aligned}$$

iz čega je jasna komponenta uzduž k^c, koje se rješavamo projekcijom na $h^a{}_c$

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\xi}^a{}_{;b}k^b\right)^{\sim} \equiv h^a{}_c\left(\tilde{\xi}^c{}_{;b}k^b\right) &= h^a{}_c B^c{}_d \xi^d \\ &= h^a{}_c B^c{}_d \tilde{\xi}^d \\ &= h^a{}_c h^d{}_b B^c{}_d \tilde{\xi}^b \\ \Rightarrow \left(\tilde{\xi}^a{}_{;b}k^b\right)^{\sim} &= \tilde{B}^a{}_b \tilde{\xi}^b \end{aligned} \tag{20}$$

Gdje je $\tilde{B}_{ab} = h^c{}_a h^d{}_b B_{cd}$ potpuno transverzalni dio od B_{cd}. Vektor $\tilde{B}^a{}_b\tilde{\xi}^b$ označava transverzalnu relativnu brzinu između dva susjedna geodezika. Tenzor $\tilde{B}_{ab}$ možemo ponovo zapisati u dekompoziciji

$$\tilde{B}_{ab} = \frac{1}{2}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \tag{21}$$

gdje vrijedi jednaka interpretacija komponenata kao i ranije. Skalar ekspanzije

$$\theta = g^{ab}\tilde{B}_{ab} = k^a{}_{;a}$$

što je moguće i provjeriti, a vidljivo je kako ne ovisi o odabiru pomoćnog polja N^a

2.2.1 Raychaudhurijeva jednadžba za svjetlosne geodezike

Izvod Raychaudhurijeve jednadžbe za svjetlosne geodezike slijedi iste korake kao i za vremelike. Ona glasi:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} + \omega^{ab}\omega_{ab} - R_{ab}k^a k^b \tag{22}$$

2.3 Teorem o fokusiranju

Demonstrirat ćemo značaj Raychadhurijeve jednadžbe i prikazati motivaciju za održavanje jakog energijskog uvjeta. Krećemo sa vremenskim geodezicima.

Teorem 1. *Neka je kongruencija vremenskih geodezika okomita na familiju prostornih površina ($\omega_{ab} = 0$) i neka vrijedi jaki energijski uvjet*

$$R_{ab}u^a u^b \geqq 0$$

. Tada Raychaudhurijeva jednadžba povlači:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} - R_{ab}u^a u^b \leq 0$$

Zaključak je da se ekspanzija smanjuje tijekom evolucije kongruencije. Početno divergirajuća kongruencija ($\theta > 0$) će u budućnosti manje divergirati, dok će početno konvergirajuća kongruencija ($\theta < 0$) naglije konvergirati. Fizikalna interpretacija ovog teorema je "Gravitacija je privlačna sila kada vrijedi jaki energijski uvjet". Iz ove je tvrdnje transparentno vidljiva motivacija za uvođenje jakog energijskog uvjeta. Gravitacija kao sila privlačna u svim smjerovima koncept je čak i intuitivno poznat iz klasične fizike. Otvoreno je pitanje može li se jaki energijski uvjet pomiriti sa ubrzanom ekspanzijom svemira, ili je taj zahtjev pogrešno formuliran.

Također je važno kako je Raychaudhurijeva jednadžba izvedena na otvorenoj okolini O koja ne mora predstavljati cijeli svemir, odnosno Raychaudhurijeva jednadžba opisuje samo dobro ponašajuća područja vremenskih i svjetlosnih geodezika. Singulariteti, rupe ili drukčije deformacije nisu uključene u područje koje Raychaudhurijeva jednadžba opisuje, pa i to treba uzeti u obzir prije odbacivanja jakog energijskog uvjeta kao globalno važećeg.

Iz Raychaudhurijeve jednadžbe i teorema o fokusiranju (jer su $\sigma^{ab}\sigma_{ab} \geq 0$, $R_{ab}u^a u^b \geqq 0$) moguće je zaključiti i

$$\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\theta^2$$

To je moguće odmah integrirati, što daje

$$\theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \frac{\tau}{3}$$

gdje je $\theta_0 \equiv \theta(0)$. To pokazuje da će početno konvergirajuća kongruencija ($\theta_0 < 0$) u konačnom vremenu ($\tau \leq 3/|\theta_0)$ razviti kaustik ($\theta(\tau) \to -\infty$), točku u kojoj se neki geodezici spajaju. Ta je točka singularitet kongruencije, pa prethodne jednadžbe za kongruenciju tu gube svoj smisao.

Jednak oblik ima i teorem o fokusiranju za svjetlosne geodezike:

Teorem 2. *Neka je kongruencija svjetlosnih geodezika ortogonalna na familiju prostornolikih hiperpovršina ($\omega_{ab} = 0$) i neka vrijedi jaki energijski uvjet ili slabi svjetlosni energijski uvjet (za svjetlosne vektore, ovi su uvjeti ekvivalentni)*

$$R_{ab}k^a k^b \geqq 0$$

Tada Raychaudhurijeva jednadžba polvači:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^{ab}\sigma_{ab} - R_{ab}k^a k^b \leq 0$$

Ponovo, moguće je zaključiti $\frac{d\theta}{d\lambda} \leq -\frac{1}{2}\theta^2$ To je moguće odmah integrirati, što daje $\theta^{-1}(\lambda) \geq \theta_0^{-1} + \frac{\lambda}{3}$ gdje je $\theta_0 \equiv \theta(0)$. Početno konvergirajuća kongruencija svjetlosnih geodezika ($\theta_0 < 0$) u konačnoj duljini afinog parametra ($\lambda \leq 2/|\theta_0)$ bit će fokusirana u istu točku ($\theta(\lambda) \to -\infty$).

3 Teoremi o singularitetima

Definiranje singulariteta je samo po sebi nedovršeno i nedorečeno područje istraživanja. Poznata nam je ideja singulariteta kao točke u prostoru u kojoj neka veličina divergira (npr. gustoća energije). Postoje rješenja Einsteinovih jednadžbi (poput Schwarzschildovog rješenja u $r \to 0$) koje ukazuju na divergencije zakrivljenosti i postojanje singulariteta kao točke koja zbog divergencije ne pripada samom rješenju.

Definirati singularitet preko divergencije zakrivljenosti je problematično. Moguće je da je divergencija prisutna samo kao odlika odabranog koordinatnog sustava, ili da zakrivljenost divergira tek u beskonačnosti. Također, problematično je definirati singularitet kao nešto što postoji, kada očekujemo pojavu koja zbog divergencije nije definirana u modelu prostor-vremena koji koristimo.

Ideja je definirati singularitete preko ideje rupe u prostor-vremenu, nepostojeće točke. Potrebno je izbjeći definicije koje bi mogle biti poništene jednostavnom ekstenzijom modela prostor-vremena dodavanjem takvih točaka u model. Trenutno najprihvaćenija definicija trenutno odnosi se na potpunost (odnosno nepotpunost) vremenskih ili svjetlosnih geodezika.

Definicija 4. *Neka postoji barem jedan geodezik koji je beskrajan barem u jednom smjeru. Ako je njegova afina duljina konačna, prostor-vrijeme je singularno*

Prethodna definicija obuhvaća ideju singulariteta kao "rupe" u prostorvremenu i istodobno podrazumijeva da je rupu nemoguće popuniti jednostavnom ekstenzijom prostorvremena. Čestica koja se giba po takvom geodeziku u konačnom će vremenu isčeznuti iz postojanja. Ta je definicija korištena u većini teorema o singularitetima, pa tako i u teoremima koji slijede - općeniti postupak u teoremima o singularitetima je dokazati, uz navedene uvjete, postojanje nepotpunog (ili nepotpunih) geodezika.

3.1 Konjugirane točke

Neka je u^a tangentan vektor na geodezik γ, a η^a vektor devijacije. Označimo sa $v^a = \eta^a{}_{;b} u^b$ vektor koji mjeri promjenu vektora devijacije uzduž geodezika. Analogno tome, $a^a = v^a{}_{;c} u^c$ predstavlja mjeru akceleracije prema infinitezimalno susjednom geodeziku. U drugom obliku zapisano, ta se jednadžba zove "jednadžba devijacije geodezika" i glasi

$$a^a = v^a{}_{;c} u^c = (\eta^c{}_{;b} u^b)_{;a} u^a = -R_{cbd}{}^a \eta^a u^c u^d \tag{23}$$

Neka je M mnogostrukost sa koneksijom, i neka je γ geodezik sa tangentnim vektorom u^a. Rješenje jednadžbe devijacije geodezika se zove Jacobi polje nad γ. Par točaka $p, q \in \gamma$ su konjugirane točke ako postoji takvo Jacobi polje koje nije identično nula, ali isčezava i u p i u q. Prisutnost konjugiranih točaka u geodeziku ima više značaja: ono označava činjenicu da taj geodezik nije maksimum udaljenosti između točaka p i q, i vrijedi da ako je q točka konjugirana točki p, tada u točki q skalar ekspanzije $\theta \to -\infty$. [3], odnosno, ako vrijedi jaki energijski uvjet, i konvergencija u nekoj točki poprimi negativnu vrijednost skalara eskpanzije, po teoremu o fokusiranju znamo da će u konačno vrijeme $\tau \leq 3/|\theta_0$,

$\theta \to -\infty$, što je ekvivalentno tome da će unutar vlastitog vremena $\tau \leq 3/|\theta_0$ postojati točak q konjugirana točki p.

Moguće je definirati i točku konjugiranu hiperpovršini. Neka je γ geodezik ortogonalan na hiperpovršinu Σ. Točka $p \in \gamma$. konjugirana je hiperpovršini Σ uzduž γ ako postoji Jacobijevo polje koje je neiscčezavajuće na Σ, a isčezava u točki p.

3.2 Ekstrinzična zakrivljenost

Neka je Σ glatka (ili barem C^2) prostorna hiperpovršina (uronjena trodimenzionalna podmnogostrukost). Neka je u^a jedinično tangentno polje kongruencije vremenskih geodezika ortogonalnih na Σ.

$$K_{ab} = \eta_{b;a} = B_{ba} \tag{24}$$

Budući da je kongruencija po konstrukciji ortogonalna na hiperpovršinu, vrijedi $\omega_{ab} = -\omega_{ba} = 0 \Rightarrow K_{ab}$ je simetričan tenzor. Za Liejevu derivaciju vrijedi $\pounds_v g_{ab} = v_{b;a} + v_{a;b}$, tako da tenzor ekstrinzične zakrivljenosti možemo zapisati:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2}\pounds_u g_{ab} \\ &= \frac{1}{2}\pounds_u(h_{ab} - u_a u_b) \\ &= \frac{1}{2}\pounds_u h_{ab} \end{aligned}$$

K_{ab} je tenzor ekstrinzične zakrivljenosti koji mjeri promjenu prostorne metrike h_{ab} uzduž kongruencije ortogonalne na Σ. Njegov trag jednak je skalaru ekspanzije $K \equiv K^a{}_a = h^{ab}K_{ab} = \theta$.

3.3 Granične krivulje u globalna hiperbolnom prostor-vremenu

Budući da je jedna od glavnih pretpostavki prvog teorema o singularitetima kojega ćemo dokazati globalna hiperbolnost, potrebno nam je opisati ponašanje kauzalnih krivulja u takvom prostor-vremenu i njihovih graničnih krivulja.

Skup neprekidnih, budućnosnih kauzalnih krivulja od p do q, gdje krivulje koje se razlikuju samo u prametrizaciji smatramo istim označavamo sa $C(p,q)$. Na $C(p,q)$ definiramo topologiju, na način da za otvoreni skup $U \subset M$ definiramo otvorene skupove

$$O(U) = (\lambda \in C(p,q) | \lambda \subset U)$$

koji čine topologiju $\mathcal{T}$ za $C(p,q)$. Budući da u globalno hiperbolnom prostor-vremenu nema zatvorenih kauzalnih krivulja, vrijedi da za različite kauzalne krivulje $\lambda, \lambda' \in C(p,q)$ $\lambda \subset M$ ne može sadržavati niti biti sadržana u $\lambda' \subset M$. Iz svojstva topološkog prostora M zaključujemo da je i topološki prostor $\mathcal{T}$ za $C(p,q) \subset M$ Hausdorffov te ima prebrojivu bazu.

Teorem 3. *Za globalno hiperbolno prostorvrijeme $C(p,q)$ je kompaktan skup.*

Dokaz Budući da topologija na $C(p,q)$ ima prebrojivu bazu, po Bolzano-Weierstrass teoremu, potrebno je pokazati samo da beskonačan niz $\{\lambda_n\}$ ima gomilište (odnosno graničnu krivulju) $\lambda \in C(p,q)$.
1) Pogledajmo slučaj $p,q \in D^-(\Sigma)$ i $\{\lambda_n\}$ niz u $C(p,q)$. takav da svaki član $\lambda_i \in \{\lambda_n\}$ počinje u p i završava u q. Ako privremeno odstranimo točku q iz M, $\{\lambda_n\}$ postaje niz buduće beskrajnih kauzalnih krivulja. Po teoremu o graničnim krivuljama 1, [2], [1], postoji buduće beskrajna granična krivulja λ koja počinje u točki p. Nijedna λ_i ne presjeca Σ, odnosno, ne ulazi u $I^+(\Sigma)$, pa tako ni λ. Ako sada vratimo točku q, tada će u M ili (i) λ ostati beskrajna, no budući da se radi o globalno hiperbolnom prostor-vremenu, ta je mogućnost isključena, jer svaka beskrajna kauzalna krivulja presjeca Σ, $I^+(\Sigma)$ i $I^-(\Sigma)$, ili (ii) q će biti krajnja točka krivulje λ. Prema tome λ je tražena granična krivulja.
2) U slučaju kada $p,q \in D^+(\Sigma)$, argumentacija je ista i moguće je naći graničnu krivulju.
3) Pogledajmo slučaj $p \in D^-(\Sigma)$, a $q \in D^+(\Sigma)$. Za niz $\{\lambda_n\} \in C(p,q)$ po prethodnom postupku možemo stvoriti graničnu krivulju λ koja ulazi u $I^+(\Sigma)$. Sada, kada bi vratili točku q, granična krivulja λ mogla bi ostati beskrajna, jer sječe Σ, $I^-(\Sigma)$ i $I^+(\Sigma)$, pa joj globalna hiperbolnost prostor-vremena to ne onemogućuje, a time više ne bi pripadala skupu $C(p,q)$, i ne bi bila tražena granična krivulja. Zato odaberemo $r \in \lambda \cap I^+(\Sigma)$ i odaberemo podniz $\{\lambda'_n\}$ takav da je svaka točka na segmentu λ između p i r točka konvergencije za ovaj podniz. Sada okrenemo postupak, ostavimo točku q na mjestu, a maknemo točku p, i gledamo niz prošlosnih beskrajnih krivulja $\{\lambda'_n\}$ koje počinju u q, ponovo (po "limit curve theorem") dobijamo graničnu krivulju λ' koja počinje u q. Vratimo točku p i dobijamo krivulju koja sječe Σ, $I^-(\Sigma)$ i $I^+(\Sigma)$, pa još uvijek zadržava mogućnost da ostane beskrajna. λ' mora prolaziti kroz r, budući da je r točka konvergencije za $\{\lambda'_n\}$. Spajanjem segmenta krivulje λ od p do r i λ' od r do q dobili smo traženu graničnu krivulju. □

Podskup skupa $C(p,q)$ koji sadrži samo glatke vremenske krivulje označimo sa $\tilde{C}(p,q)$. Duljinu krivulje zovemo gornje polu-neprekidnom na $\tilde{C}(p,q)$ ako za svaku $\lambda \in \tilde{C}(p,q)$ i zadani $\epsilon > 0$ postoji otvorena okolina $O \subset \tilde{C}(p,q)$ od λ tako da za svaku $\lambda' \in O$ vrijedi $\tau(\lambda') \leq \tau(\lambda) + \epsilon$. Ovu je konstrukciju moguće proširiti i na cijeli $C(p,q)$.

Teorem 4. *Neka je (M, g_{ab}) globalno hiperbolno prostor-vrijeme. Neka je $p \in M$, i Σ Cauchyjeva ploha. Tada postoji krivulja $\gamma \in C(\Sigma,p)$ za koju τ (duljina kauzalne krivulje) postiže svoj maksimum na $C(\Sigma,p)$*

Dokaz Neprekidno preslikavanje sa kompaktog topološkog prostora u $\mathbb{R}$ je omeđeno i postiže svoje minimalne i maksimalne vrijednosti [4] $C(\Sigma,q)$ je kompaktan skup, i uz navedeno proširenje $\tau(\lambda) = \int (-u^a u_a)^{1/2} dt$ je gornje polu-neprekidna, prema tome, τ je omeđena i postiže svoj maksimum na $C(\Sigma,q)$ □

3.4 Teorem o singularitetima u globalno hiperbolnom prostor-vremenu

Sljedeći teorem pokazuje da ako je svemir globalno hiperbolan, i u nekom trenutku ima ekspanziju svugdje veću od nule, tada je morao početi iz singularnog stanja.

Teorem 5. *Neka je (M, g_{ab}) globalno hiperbolno prostor-vrijeme u kojem vrijedi jaki energijski uvjet ($R_{ab}u^a u^b \geq 0$ $\forall u^a$ vremenskog tipa). Pretpostavimo da postoji glatka (ili barem C^2) prostorna Cauchyjeva ploha Σ takva da za ortogonalnu prošlosno orjentiranu kongruenciju od Σ vrijedi $K \leq C < 0$ svugdje na Σ. Tada niti jedan prošlosno orjentirani geodezik od Σ nema duljinu veću od $3/|C|$, odnosno, svi prošlosno orjentirani vremenski geodezici su nepotpuni.*

Dokaz Prepostavimo da postoji prošlosno orjentirana vremenska krivulja λ od Σ sa duljnom većom od $3/|C|$. Neka je p točka na λ na duljini većoj od $3/|C|$ od Σ. Po prethodnom teoremu (4), postoji krivulja sa maksimalnom duljinom od p do Σ, koja tada isto mora imati duljinu veću od $3/|C|$. Nužan uvjet da geodezik ima maksimalnu duljinu između hiperpovršine Σ i točke p je da ne posjeduje konjugirane točke između Σ i p. No, po teoremu o fokusiranju (1), ako kongruencija u nekoj točki ima negativan skalar ekspanzije, u konačnom vremenu manjem od $3/|\theta_0$ (što je u ovom slučaju jednako $3/|C|$), divergirati će u $-\infty$, odnosno razviti točku konjugiranu površini Σ, što dovodi do kontradikcije. Prema tome, sve su prošlosno orjentirane vremenske krivulje λ od Σ duljine manje od $3/|C|$.

Navedeni teorem ima dva veoma jaka uvjeta: jaki energijski uvjet čiju smo problematičnost već analizirali, i uvjet globalne hiperbolnosti, koji je najjači uvjet na kauzalnu strukturu i zasigurno je neželjen pri demonstraciji postojanja singulariteta, gdje tražimo što manje specifičnih uvjeta. Ipak, ovaj je teorem dobra polazišna točka za mehanizam funkcioniranja ostalih teorema o singularitetima, i na dobar način pokazuje singularnost svemira kao nepotpunost vremenskih geodezika.

3.5 Narušenje kronalnosti i pojava singulariteta

U ovom dijelu pokazujemo vezu između skupa u kojem je narušen kronološki uvjet i postojanja singulariteta. Skup narušene kronalnosti

$$vI = \{p \in M | p \in I^+(p) p \in I^-(p)\}$$

je skup točaka koje čine zatvorene vremenske krivulje. Teorem koji povezuje ta dva fenomena dokazao je M. Kriele 1989. na tehnički veoma zahtjevan način. Ovdje je iznešen pojednostavljen dokaz po radu E. Minguzzija, za koji nam je potreban i sljedeći teorem koji nećemo dokazivati.

Teorem 6. *Ako prostorvrijeme koje je potpuno po svjetlosnim geodezicima zadovoljava svjetlosni energijski uvjet ($R_{ab}k^a k^b \geq 0$) i uvjet svjetlosne generičnosti ($k^c k^d k_{[a} R_{b]cd[e} n_{f]}$), tada svaki geodezik ima par konjugiranih točaka, što je indikacija da ta putanja nije akronalna, odnosno, krivulja nije svjetlosni geodezik.*

Teorem 7. *Neka je (M, g_{ab}) prostorvrijeme koje zadovoljava svjetlosni energijski uvjet i uvjet svjetlosne generičnosti. Ako je povezana komponenta ruba skupa sa povredom kronalnosti vI kompaktna, tada je M nepotpuno po svjetlosnim geodezicima.*

Dokaz Neka je $b \in vI$, i neka $[b]$ označava klasu svih točaka koje pripadaju istoj zatvorenoj vremenskoj krivulji. Postoji niz zatvorenih vremenskih krivulja kojima je akumulacijska točka $r \in \partial[b]$. Svaki element niza je beskrajna krivulja (Proizvoljno dugo se možemo vrtiti po zatvorenoj vremenskoj krivulji "u krug"). Za dokaz potrebna nam je i sljedeća propozicija:

Propozicija 2. *Kroz svaku točku ruba vI prolazi svjetlosna krivulja μ koja generira $\partial(vI)$, i sadržana je u $\partial(vI)$.*

Dokaz propozicije Neka je $p \in \partial(vI)$ i neka niz $p_i \in vI$ konvergira u p. Za svaki i tada postoji zatvorena vremenska krivulja μ_i kroz p_i. Tada po teoremu o graničnim krivuljama postoji beskrajna ne prostorna krivulja μ kroz p. Ako μ ne bi bila svjetlosna krvivulja, tada bi presjecala i $I^+(p)$ i $I^-(p)$, i postojala bi krivulja μ_i koja presjeca oba skupa, a budući da je μ_i zatovrena vremnska krivulja to bi dovelo do kontradikcije. Prema tome μ je beksrajna svjetlosna krivulja, i budući da je ova konstrukcija moguća kroz svaku točku ruba, krivulja sadržana je u $\partial(vI)$.

Koristeći prethodnu propoziciju, kroz točku r prolazi beskrajna svjetlosna krivulja μ, sadržana u $\partial[b]$. Ako je $\partial[b]$ kompaktan skup (što je zahtjev teorema), tada krivulja μ ima krivulju konvergencije u $\partial\overline{[b]}$, koja je beskrajna i kauzalna. Mora biti svjetlosna jer obratno dovodi do kontradikcije. Prema teoremu (7), a budući da vrijede uvjeti svjetlosne generičnosti i svjetlosni energijski uvjet, ta je krivulja nepotpuna. $\square$

Postoje neki modeli prostor-vremena u kojima se pojavljuju zatvorene vremenske krivulje, koje mogu postojati u kompaktnom dijelu prostor-vremena. Radi se o proučavanju modela brzo rotirajuće materije koje bi mogle generirati takve pojave, i u tom je kontekstu fizikalno zanimljivo proučavati njihovu strukturu.

Navedeni teorem koji povezuje zatvorene vremenske krivulje i singularitete ovisi o uvjetu svjetlosne generičnosti koji osigurava da metrika opisuje dovoljno općenitu materiju, no i taj je uvjet svakako podložan provjeri.

4 Zaključak

Prikazani su osnovni alati potrebni za rad sa teoremima o singularitetima i prikazan je jedan od jednostavnijih teorema o singularitetima. Pokazana je i veza između kompaktnog skupa narušene kronalnosti i singulariteta. Za daljnju diskusiju svakako ostaje jaki energijski uvjet iz već navedenih razloga. Kasniji teoremi o singularitetima na svoje načine zaobilaze poteškoće u nametanju jakog energijskog uvjeta i specifičnog zahtjeva globalne hiperbolnosti svemira, i jedan od budućih ciljeva je proučavanje općenitijih i drukčijih teorema o singularitetima.

Veza između skupa narušenja kronalnosti i singulariteta veoma je zanimljiva i daljnji je cilj naći transparentniji dokaz njegove tvrdnje i proučiti u kojoj je mjeri uvjet svjetlosne generičnosti važan za njegov dokaz.

References

[1] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis *The large scale structure of space-time* 1973: Cambridge University Press

[2] J.K. Beeem, P.E. Erlich, K.L. Easly *Global Lorentz Geometry* Second edition, 1996: Marcel Dekker, Inc., New York

[3] Robert M. Wald *General Relativity* 1984: The University of Chicago Press

[4] Loring W. Tu *An introduction to Manifolds* Second edition, 2011: Springer

[5] Visser M., Barceló C. *Energy conditions and their cosmological implications*, Plenary talk, Cosmo99, Trieste Sept/Oct 1999

[6] Thorne K. *Closed timelike curves*, General Relativity and Gravitation, 1992, Proceedings of the 13th International Conference on General Relativity and Gravitation, edited by R.J. Gleiser, C.N. Kozameh, and O.M. Moreschi, (Institute of Physics Publishing, Bristol, England, 1993), pp. 295-315.