Meissnerov efekt crnih rupa

Luka Gulin

Mentor: doc. dr. sc. Ivica Smolić

Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagebu

(Dated: 20. siječnja 2017.)

U ovom seminarskom radu bavimo se pojavom izbacivanja vanjskog magnetskog polja iz ekstremalnih, stacionarnih i osnosimetričnih crnih rupa - Meissnerovim efektom. Dajemo povijesni pregled, počevši od prvih rješenja gdje su crne rupe bile uronjene u magnetsko polje do najnovijih rezultata. Unatoč svemu, postoji nekoliko otvorenih pitanja oko ovih problema koji će biti tema daljnjih istraživanja.

I. UVOD

A. "Pravi" Meissnerov efekt

Meissnerov efekt, istiskivanje magnetskog polja na niskim temperaturama, otkrili su W. Meissner i R. Ochsenfeld 1933. Jednadžba koja opisuje magnetsko polje unutar supravodiča je druga Londonova jednadžba, koja nakon primjene Amperovog zakona glasi

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{B} \tag{1}$$

gdje je

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_*}{\mu_0 n e_*^2}}. \tag{2}$$

μ_0 permeabilnost vakuuma, a m_*, e_* i n su redom efektivna masa nosilaca naboja, naboj i njihova koncentracija. Efektivni naboj i masa su, u ovom slučaju, dvostruko veće veličine od onih za elektron zbog formiranja Cooperovih parova. Najbolju predodžbu što gornja jednadžba znači dobijemo ako za rubne uvjete uvrstimo da se supravodič nalazi u homogenom vanjskom magnetskom polju koje je okomito na rub supravodiča. Tada rješenje jednadžbe glasi

$$\vec{B}(z) = \vec{B}_0 \exp(-z/\lambda) \tag{3}$$

Takav oblik rješenja nam sugerira da veličinu λ možemo identificirati kao dubinu prodiranja, koja obično ima vrijednosti između 50 i 500nm. Zbog te činjenice možemo tvrditi da su supravodiči, u čistom supravodičkom stanju, savršeni dijamagneti.

B. Crne rupe

Crne rupe su definirane svojom kauzalnom strukturom u prostorvremenu. Preciznije, dijelovi prostorvremena u kojima su svi budući svjetlosni stošci usmjereni prema unutrašnjosti crne rupe. Takvo ponašanje je posljedica Einsteinove jednadžbe koja povezuje geometriju prostorvremena s njegovim energetskim sadržajem.
Objekt kojim opisujemo geometriju prostorvremena je metrički tenzor koji je simetričan i ranka 2. Hiperploha koja razdvaja crnu rupu od ostatka prostorvremena se naziva horizont događaja.
No hair teorem[1] definira broj svojstava koja mogu imati crne rupe koja su redom: masa (m), količina gibanja ($\vec{P}$), kutna količina gibanja ($\vec{J}$) i (električni) naboj (Q). Ta činjenica bitno ograničava kakva crna rupa može biti, stoga, za svemir koji se ne širi, 4 rješenja opisuju sve kombinacije kutne količine gibanja i naboja koje postoje. Shematski:

	$J = 0$	$J \neq 0$
$Q = 0$	Schwarzschild	Kerr
$Q \neq 0$	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Ostala svojstva nisu bitna za geometriju budući da jednostavni transformacijama generiramo i takva rješenja, a masa uvijek postoji. Također, slaba verzija kozmološkog principa cenzure koja zabranjuje postojanje singulariteta bez horizonta događaja postavlja gornju granicu angularnog momenta i naboja. Crne rupe koje su maksimalno nabijene i/ili rotiraju maksimalnim dopuštenim angularnim momentom nazivaju se ekstremalne crne rupe. U dodatku su je dan opis ove 4 crne rupe te što za svaku znači da je ekstremalna.

C. Meissnerov efekt crnih rupa

Na temelju prethodna dva odjeljka teško je zaključiti kakve veze imaju crne rupe i Meissnerov efekt. No, kao i u brojnim drugim situacijama u fizici, javlja se iznenađujuće analogno ponašanje. Da bi pobliže objasnili njihov odnos, moramo malo zadrijeti u termodinamiku crnih rupa koja definira temperaturu crne rupe pomoću njenih geometrijskih svojstava. Imamo

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \tag{4}$$

gdje je κ površinska gravitacija se definira kao sila kojom opažač u beskonačnosti mora djelovati na tijelo jedinične mase na horizontu da ono ne bi upalo u crnu rupu. Može se pokazati, a u što ovdje nećemo ulaziti da je površinska gravitacija veća za manje crne rupe i crne rupe s manjim angularnim količinama gibanja. Budući da je površinska gravitacija proporcionalna temperaturi crne rupe, isti iskaz vrijedi i za temperaturu. Wald[2] je konstruirao rješenje za elektromagnetsko polje kada osnosimetričnu stacionarnu crnu rupu stavimo u asimptotski homogeno magnetsko polje. Vrlo brzo nakon toga, King, Lasota i Kundt[3] su primijetili da tok magnetskog preko jedne hemisfere opada kako angularni moment raste te da u je ekstremalnom slučaju polje potpuno izbačeno. Ako umjesto angularnog momenta govorimo u terminima temperature kao što je poviše objašnjeno, ovakvo ponašanje je analogno s ponašanjem supravodiča tipa 2 u magnetskom polju u miješanom stanju s $T_{c1} = 0$.

II. PREGLED MEISSNEROVOG EFEKTA

Ono što danas znamo pod Meissnerovim efektom crnih rupa je činjenica da ekstremalne crne rupe iz sebe izbacuju vanjsko osnosimetrično stacionarno magnetsko polje koje je poravnato s osi simetrije same crne rupe.
Bitno je za napomenuti da Meissnerov efekt dijelimo u dvije grupe, jaki i slabi. Slabi Meissnerov efekt je uglavnom ono što ćemo promatrati u ovom seminaru. Radi se o tome da u fiksnu geometriju prostorvremena uronimo magnetsko polje. Takav postupak možemo provoditi samo kad magnetsko polje nije previše jako zbog toga što ono nužno nosi energiju koja utječe na samu prostorvremensku pozadinu i takvu promjenu moramo uzeti u obzir u jakom režimu kojem je posvećen znatno manji dio literature.

A. Wald-Papapetrou rješenje

Iako se u svom članku Wald[2] nije eksplicitno dotaknuo Meissnerovog efekta, način na koji je konstruirao polje pokazao se jako bitan u narednim istraživanjima. Vektor koji je rješenje jednadžbe

$$\nabla_a K_b + \nabla_b K_a = 0 \tag{5}$$

nazivamo Killingovim vektorom. Taj vektor je povezan sa simetrijama prostorvremena(izometrijama). Iz Papapetroua[4] se vidi da Killingovi vektori u vakuumskom prostorvremenu generiraju rješenja Maxwellovih jednadžbi tako da se Killingovi vektori postave na mjesto baždarnog potencijala.
U ravnom četverodimenzionalnom prostorvremenu postoji 10 takvih vektora. Elektromagnetsko polje generirano Killingovim vektorima pridruženim translacijskim simetrijama iščezava. Rotacijskim Killingovim vektorima generiramo jednoliko magnetsko polje, a potiscima električno.
Wald promatra rješenje sastavljeno vektora osne simetrije $m^a = (\partial_\phi)^a$ i vremenske translacije $k^a = (\partial_t)^a$. Te veličine možemo promatrati dvojako. Kao Killingove vektore i kao baždarne potencijale. Budući da u jeziku diferencijalnih formi vrijedi

$$F = \mathrm{d}A \tag{6}$$

integral po 2-sferi Hodgeovog duala forme F daje električni naboj. No Hodge dual vanjske derivacije forme pridružene Killingovom vektoru ima i geometrijsko značenje. Za dva navedena vektora imamo

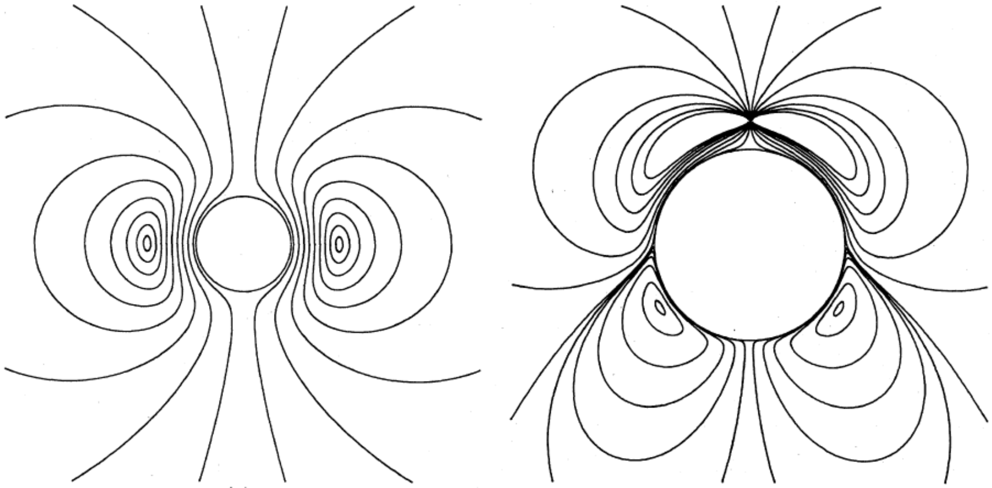
$$\int *\mathrm{d}m = 4\pi q_m = 16\pi J \tag{7}$$

$$\int *\mathrm{d}k = 4\pi q_k = -8\pi M \tag{8}$$

gdje je prva jednakost elektrodinamička, a druga geometrijska. Kao što je gore napomenuto, rotacijsko Killingovo vektorsko polje, u ovom slučaju u ∂_ϕ smjeru, generira uniformno magnetsko polje, a Killingovo vektorsko polje s translacije, u ovom slučaju u ∂_t smjeru, asimptotski iščezava.
Wald je tražio rješenje za homogeno magnetsko polje te stoga zahtjevi na F daju da polje mora biti stacionarno i osnosimetrično, nesingularno na horizontu i izvan crne rupe te da ne smije postojati nikakav naboj. Zbog toga je F dana kao linearna kombinacija

$$F = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}m + \frac{2J}{M}\mathrm{d}k\right). \tag{9}$$

Ovakvo polje je predmet velikog broja narednih članaka.



Slika 1. Strujna petlja u ekvatorijalnoj ravnini i na osi, preuzeto iz [5]

B. Izbacivanje polja

Da crne rupe izbacuju vanjsko magnetsko polje, prvi su pokazali King, Lasota i Kundt[3] u Kerrovom prostorvremenu i to računanjem toka kroz gornju hemisferu. Dobili su izraz

$$\Phi = \pi r_+^2 B \left(1 - \frac{a^4}{r_+^4}\right) \tag{10}$$

gdje je r_+ položaj horizonta događaja, a $a = J/M$. U Kerrovom prostorvremenu za ekstremalnu vrijedi $r_+ = a = M$, očito je da polje ne prodire u crnu rupu.

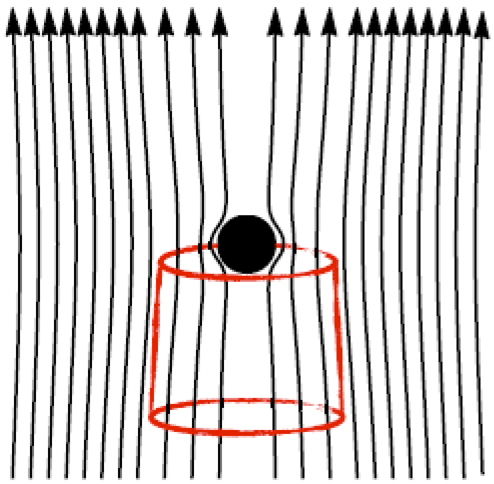
Prvi koji su se pomakli od homogenog magnetskog polja su bili Bičák i Dvořák koji su promatrali efekt u Reissner-Nordströmovom prostorvremenu[5]. Repliciraju efekt koji je dobiven u Kerrovom prostor vremenu, ali i dobivaju i malo općenitije rješenje u kojem polje više nije homogeno, nego je generirano strujnim petljama u ekvatorijalnoj ravnini i na osi simetrije crne rupe. Svoj račun rade perturbacijski, što je cijena koju su platili za poopćenje rješenja.

Činjenica da je poravnatost simetrije prostorvremena i simetrije elektromagnetskog polja nužna za ostvarivanje Meissnerovog efekta pokazali su Bičák i Janiš. U istom članku[6] su pokazali i da postoji gornja granica na tok magnetskog polja kroz horizont crne rupe u magnetski dominiranom svemiru.

Potencijalni problem s Meissnerovim efektom se javlja u astrofizičkim primjenama. Naime, mehanizam za koji se vjeruje da je zaslužan za stvaranje astrofizičkih mlazova, Blanford-Znajekov mehanizam, nužno je postojanje magnetskog polja na horizontu, što je točno ono što Meissnerove efekt potiska. Meissnerov efekt nije izražen za slabo rotirajuće crne rupe, no novija astrofizička mjerenja su pokazala da postoje crne rupe koje su jako rotirajuće i koje izbacuju astrofizičke mlazove. U pokušaju da to objasni Penna[7] daje zanimljive argumente za Meissnerov efekt i kako ga je možda moguće izbjeći. Prvo, važno je primjetiti da je za svaku ekstremalnu stacionarnu i osnosimetričnu crnu rupu udaljenost mjerena normalnom koordinatom ide u beskonačno[8]

$$\int_{r_H}^{r_H+\epsilon} \sqrt{g_{rr}} \mathrm{d}r \to \infty \tag{11}$$

i zbog toga Penna daje jednostavan geometrijski argument. Na slici 2 vidimo ucrtan valjak čija je gornja baza u ekvatorijalnoj ravnini crne rupe. Zbog toga, površina gornje baze ide u beskonačno, a s površinom donje se ne događa ništa neuobičajeno stoga ona ostaje konačna. Da bi Maxwellova jednadžba $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ bila zadovoljena, magnetsko polje mora iščeznuti na horizontu. Penna nudi i način kako izbjeći Meissnerov efekt, a to je nabijanje crne rupe nabojem podijeljenog monopola. To je objekt koji je sličan običnom monopolu, samo mu naboj mijenja predznak na drugoj strani ekvatorijalne ravnine. U druge mogućnosti izbjegavanja Meissnerovog efekta spada i promatranje polja koja nisu osnosimetrična i polja koja nisu stacionarna. Takva polja nisu u fokusu ovog seminara, ali su astrofizički bitna.



Slika 2. Meissnerov efekt za Waldovo rješenje i Pennov valjak, preuzeto iz [7]

Gralla, Lupsasca i Strominger[9] promatraju limes u blizini horizonta ekstremalno rotirajuće Kerrove crne rupe te na temelju simetrija takvog prostorvremena zaključuju oblik elektromagnetskog tenzora koji povučen na horizont crne rupe iščezava. To je rezultat koji je analogan onome iz [6], ali je dobiven bez eksplicitnog rješavanja vakuumskih Maxwellovih jednadžbi u Kerrovom prostorvremenu.

C. Jaki režim

Meissnerov efekt u jakom režimu, kao što je već napomenuto, je slabo proučavan te postoji tek nekoliko članaka na tu temu. Karas i Budínová prvi promatraju tok magnetskog polja preko horizonta crne rupe [10] u magnetiziranoj Kerr-Newmanovoj metrici te pokazuju stupanj smanjenja toka kroz horizont, uz posebne uvjete.

III. OTVORENI PROBLEMI

Glavni razlog zbog kojeg sam se bavio ovom temom je postojanje otvorenih problema u kojima ima potencijala za razrješenje. Tijekom istraživanja literature o efektu dobiju se razne ideje čemu pridijeliti pažnju, no za iduće dvije stvari mislim da su ključne:

A. Općenitost rješenja

Općenitost ili univerzalnost rješenja je obično ono prvo što u svakom fizikalnom modelu ili teoriji postići. Za primjetiti je kako kroz čitav povijesni diskurs izložen u člancima o Meissnerovom efektu nekoliko stvari zajedničko. Prvi put kad se primijetilo izbacivanje polja bilo je to nad Waldovim, veoma specifičnim rješenjem s homogenim magnetskim poljem. U prvih par članaka nakon toga došlo se do najveće slobode u simetrijama za koje se vjeruje da je moguć Meissnerov efekt. Radi se, kako je već napomenuto, o stacionarnosti(dakle, slabijim zahtjevom od statičnosti) i osnoj simetriji. Na tome se gradila teorija i sva iduća rješenja se temelje na tim zahtjevima. Iako se u dosadašnjem znanstvenom radu o tom efektu pretpostavljaju samo te dvije stvari, svi autori se, prije ili kasnije, pozivaju na neku konkretnu geometriju prostor vremena koja u sebi ekstremalnosti dobro definiran. Pitanje je može li se zaista za općenito prostorvrijeme pokazati da se Meissnerov efekt događa.
Kroz bavljenje tim problemom ovaj semestar došao sam do dojma da je uvjet ekstremalnosti najteže uklopiti u čitavu sliku. Killingovi vektori su jako korisni objekti iz kojih se mogu relativno lako izvući ograničenja na polje jer oni su na prilično jasan način definirani bez reference na neko konkretno prostorvrijeme, dok s ekstremalnosti nije takav slučaj. Dobar pristup prema tome ima Penna koristeći činjenicu da "vrat" crne rupe za ekstremalne rupe ide u beskonačno 11. Drugačiji pristup može biti korištenje činjenice da površinska gravitacija, odnosno temperatura ide u nulu kod ekstremalnih crnih rupa. Konkretan pristup bi trebao biti predmet budućeg istraživanja.
Emulirajući metode korištene u članku o prostorvremenskog pristupa besilnom elektromagnetizmu [11], pokušali smo praćenjem općenite silnice magnetskog polja pokušati informacije o njenoj topologiji, no budući da do konkretnog rješenja nismo došli, skica onoga što smo pokušali je u dodatku B.

B. Utjecaj kozmološke konstante na efekt

Koliko nam je poznato, do sada ne postoji sustavna analiza Meissnerovog efekta uz prisustvo kozmološke konstante. Kozmološka konstanta predstavlja energetsku gustoću vakuuma koja bi bila odgovorna za metričku ekspanziju prostorvremena(u Einsteinovoj jednadžbi množi metrički tenzor). Budući da je nedvojbeno utvrđeno, a za što je i dobivena Nobelova nagrada, da se svemir ubrzano širi, bilo bi preciznije u sva razmatranja uključiti i neiščezavajući kozmološku konstantu. Međutim, na kozmološki malim udaljenostima, reda veličina crne rupe ili koji red više, utjecaj kozmološke konstante je zanemariv i predstavlja opravdan razlog zbog kojeg se ona može izostaviti iz razmatranja. No, zbog potpunosti, bilo bi dobro da znamo što se događa s Meissnerovim efektom i tada. Jedan od prvih problema koji se javlja s uvrštavanjem kozmološke konstante je što se koncept ekstremalnosti crne rupe ili skroz ruši ili se mora redefinirati jer $1/g_{rr}$ element metrike sada postaje polinom 4. reda i sada više nemamo garanciju da bilo kakvim namještanjem naboja ili angularnog momenta možemo dobiti da se dvije nultočke, koje su prije označavale unutarnji ili Cauchyjev horizont i horizont događaja, degeneriraju u istu vrijednost. Zbog toga što sada imamo polinom 4. reda, javljaju se dodatne nultočke. Nultočka koja je veća od nule i ima veću vrijednost od one koja označava horizont događaja, naziva se kozmološki horizont. To je ploha koja se nalazi na najvećoj mogućoj udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava s koje se može poslati informacija u konačnom vremenu u ishodište. Kozmološki horizont nam je bitan zbog toga što globalne simetrije, koje smo prije imali, više nisu globalne, nego lokalne i vrijede u području do kozmološkog horizonta.

Model igračka koji zahtijeva postojanje kozmološke konstante je BTZ crna rupa[12]. Njega bi bilo moguće upotrijebiti za promatranje i bolje razumijevanje Meissnerovog efekta. Radi se o crnoj rupi u 2+1 dimenziji za koju se vjerovalo da nije moguća jer u 3 dimenzije za vakuumsko rješenje u kojem Riccijev tenzor iščezava i Riemannov općenito iščezava što nam govori da je mnogostrukost globalno Minkowski. No u BTZ rješenju postoji singularna točka Riemannovog tenzora kojom se izbjegava taj problem, ali zahtijeva uvođenje kozmološke konstante koja nam u ovom kontekstu komplicira račun.

IV. ZAKLJUČAK

Cilj ovog seminara je bio obraditi temu na ivici modernog istraživanja pokušati naći novu fiziku. Glavna pretpostavka za takvo nešto je sistematski proći kroz svu znanstvenu građu počevši od prvih spominjanja efekta do danas. To je bitno ne samo da se nauči što se već zna o fenomenu koji se istražuje, nego da se prouče i metode kojim se došlo do rezultata. Zbog toga, svoje istraživanje Meissnerovog efekta počinjemo Waldovog članka iz 1974. godine koji predstavlja temelj velikog broja članaka koji su izdani na tu temu. Nakon njega počinje sustavno izučavanje efekta te 10ak godina poslije Bičák i Janiš objavljuju članak koji je referenca gotovo za sve iduće radove na temu. Nakon proučavanja što je sve napravljeno, olakšava se identificiranje otvorenih problema i, što je još važnije, njihova srž, tj. razlog zbog kojeg nisu još razriješeni te se oko toga može početi graditi pristup koji ih možda može riješiti. U mojem seminaru se na taj način pitanje općenitosti i utjecaja kozmološke konstante na efekt prirodno pojavilo te je traženje načina na koji zatvoriti to pitanje mi je bilo u središtu pozornosti ovaj semestar, ali će i ostati u daljnjem radu budući da do zadovoljavajućih odgovora nije došlo.

Dodatak A: Pregled crnih rupa

1. Schwarzschildova crna rupa

Schwarzschildova crna rupa je najjednostavnija crna rupa koja nema naboja ni angularnog momenta te zbog toga pojam ekstremalnosti nema smisla koristiti u ovom kontekstu stoga nije ni zanimljiva što se tiče ovog seminara, ali je ipak navodimo zbog potpunosti. Linijski element, u standardnim koordinatama glasi

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2(\sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2) \tag{A1}$$

Horizont događaja se nalazimo kada

$$g_{rr} \to \infty \tag{A2}$$

te se lako vidi da se nalazi na $r = 2M$. Rješenje osnosimetrično što se odmah vidi iz linijskog elementa.

2. Reissner-Nordströmova crna rupa

Malo kompliciranije rješenje je s nabijenom crnom rupom. Ono je isto osnosimetrično, što je bilo i za očekivati budući da je naboj skalarna veličina. Linijski element je

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}} + r^2(\sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}\theta^2). \tag{A3}$$

Iako smo dodali samo naboj, struktura je dosta bogatija. Horizont događaja opet tražimo na isti način i dobivamo

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \tag{A4}$$

te vidimo da se javljaju dva horizonta, vanjski i unutarnji. Vanjski nazivamo horizont događaja, dok unutarnjeg nazivamo Cauchyjev horizont. I tu dolazimo do ekstremalnosti crne rupe. Vidimo da najveći naboj koji crna rupa može imati, a da horizonti ostanu realni, je kada vrijedi $M = Q$ i taj slučaj nazivamo ekstremalnim. Ako je $Q > M$ ne postoje realne nultočke stoga bi singulariteti ostali goli. Zbog slabe varijante kozmološkog principa cenzure to ne možemo imati.
Također, za napomenuti je da se u prirodi Reissner-Nordströmove crne rupe gotovo i ne pojavljuju zbog toga što se sva jako nabijena tijela brzo neutraliziraju privlačenjem suprotnog naboja, a isto vrijedi i za crne rupe.

3. Kerrova crna rupa

Kerova crna rupa je rotirajuća nenabijena crna rupa. Zbog rotiranja gubimo sfernu simetriju. Linijski element crne rupe mase M i angularnog momenta J, u Boyer-Lindquistovim koordinatama glasi

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2\Sigma\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{\Delta} + \mathrm{d}\theta^2\right) \tag{A5}$$

$$+ (r^2 + a^2)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2 + \frac{2Mr}{\Sigma}(a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi - \mathrm{d}t)^2, \tag{A6}$$

gdje su: $a = J/M$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ i $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$. Na sličan način kao i za prethodne dvije rupe nađemo horizont događaja,

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \tag{A7}$$

Dakle, Kerrove crne rupe su ekstremalne kada $M = a$.
No, ovakva geometrija je još malo bogatija od Reissner-Nordströmova zbog toga što postoji posebno područje područje koje se naziva ergopodručje ili ergosfera. U oba prethodna slučaja ploha na kojoj je komponenta g_{tt} mijenjala predznak poklapala se s horizontom događaja, ali sada to nije slučaj te zbog toga područje od horizonta događaja do plohe na kojoj g_{tt} mijenja predznak nazivamo ergosfera. Ta ploha je dana relacijom

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta}. \tag{A8}$$

Njena posebnost je u tome što je sada vektor u smjeru vremena prostornog tipa i zbog toga objekti koji upadnu u to područje mogu iz njega izaći samo ako su u početku imali neku kutnu količinu gibanja koja prati crnu rupu. Također, zbog tog istog svojstva, moguće je izvlačiti energiju iz crne rupe Penroseovim procesom koji je bitan u Blanford-Znajekovom mehanizmu.

4. Kerr-Newmanova crna rupa

Kerr-Newmanova crna rupa je najkompliciranija i najopćenitija od svih navedenih te se svaka od njih može dobiti postavljanjem pripadajućih parametara na 0. Linijski element glasi

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\frac{\Delta}{\Sigma}\left(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi\right)^2 \\ &+ \frac{\sin^2\theta}{\Sigma}\left(\left(r^2 + a^2\right)\mathrm{d}\phi - a\mathrm{d}t\right)^2 \\ &+ \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 + \Sigma\mathrm{d}\theta^2,\end{aligned} \tag{A9}$$

gdje su slično kao u Kerrovom slučaju: $a = J/M$, $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ i $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$. Za horizonte dobivamo

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2} \tag{A10}$$

što za posljedicu ima da je ekstremalni uvjet definiran kao

$$M = \sqrt{a^2 + Q^2}. \tag{A11}$$

Odmah se vidi kako je ovaj uvjet najopćenitiji i da je konzistentan s dva prethodna.

Dodatak B: Praćenje silnice polja

Budući da ovaj pristup nije doveden do kraja i nema krajnjeg rezultata, nalazi se u dodatku.
Gralla i Jacobson su poglavljima 8 i 9 svoga članka[11] o besilnom elektromagnetizmu (Force-free electrodynamics) dali relativno jednostavne, ali dovoljno uvjerljive argumente o topologiji čitavog elektromagnetskog polja prateći općenitu silnicu tog polja i veličine na njoj čija se funkcionalna ovisnost pojednostavnjuje zbog same činjenice što je promatramo na silnici. To nam daje poticaj da sličnu ideju primijenimo na ovaj problem nadajući se da ćemo doći do nekih smislenih rezultata. Razmatranje počinje ovako:

Koristimo matematički formalizam diferencijalnih formi, kao Gralla i Jacobson, u kojem Maxwellove jednadžbe imaju najkompaktniji zapis. Tada se 1-forma magnetskog polja općenito može dobiti kao kontrakcija nekog vektora koji opisuje promatrača s Hodge dualom 2-forme elektromagnetskog polja. Odmah koristimo činjenicu da u prostorvremenu postoje simetrije te biramo za taj vektor Killingov vektor k^a.

$$B_k = i_k * F \tag{B1}$$

Ovako dobiveno magnetsko polje je prostornog tipa izvan crne rupe. To vidimo iz idućeg. Killingov horizont je (svjetlosna) hiperploha definirana kao ona na kojoj je nekom Killingovom vektoru norma 0. Ako uzmemo taj vektor kao linearnu kombinaciju

$$\chi^a = k^a + \Omega_H m^a \tag{B2}$$

takav Killingov vektor u stacionarnom i osnosimetričnom slučaju se poklapa s horizontom događaje crne rupe. Ω_H je kutna brzina horizonta događaja. Budući da sada na horizontu događaja imamo vektor koji je vremenskog tipa, očekujemo da horizont događaja čini granicu na kojoj takvo vektorsko polje prolazi iz prostornog tipa u vremenski ili obratno. Međutim, pokaže se da takav naivan pristup nije ispravan te je potrebno napraviti reparametrizacije[13] da gore navedeno vektorsko polje uvijek ostane istog tipa i to isključivo vremenskog izvan crne rupe. Ako napravimo skalarni produkt s magnetskim poljem dobijemo

$$\begin{aligned}\chi \cdot B_k &= (k^a + \Omega_H m^a) \cdot (B_k)_a \\ &= i_k B_k + \Omega_H i_m B_k \\ &= i_k B_k + \Omega_H m^a k^b * F_{ba}\end{aligned} \tag{B3}$$

prvi član je jednak $k^a k^b * F_{ba}$ i on propada iz identičnog argumenta iz kojeg kontrakcija simetričnog i antisimetričnog tenzora propada, dok je dokaz da je drugi 0 dan u [1]. Budući da je zbog gornje argumentacije χ^a vremenskog tipa, B_a mora biti prostornog.
Nadalje, ako je B zatvorena diferencijalna forma

$$\mathrm{d}B_k = 0 \tag{B4}$$

postoji skalar(0-forma, B_k je 1-forma) ψ_k za koji vrijedi

$$B_k = \mathrm{d}\psi_k. \tag{B5}$$

Uporabom Cartanove magične formule, koja povezuje Lieve derivacije s vanjskim derivacijama i kontrakcijama s vektorima dobijemo izraz

$$\mathrm{d}B_k = \mathrm{d}i_k * F = (\mathcal{L}_k - i_k \mathrm{d}) * F = 0 \tag{B6}$$

u kojem prvi član propada zbog toga što je elektromagnetsko polje stacionarno. Budući da jedna od Maxwellovih jednadžbi glasi

$$\mathrm{d} * F = -4\pi J, \tag{B7}$$

a struja je $J = 0$ drugi član propada. Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}B_k^2 &> 0 \\ (B_k)^a (B_k)_a &> 0 \\ (B_k)^a \nabla_a \psi_k &> 0\end{aligned} \tag{B8}$$

iz čega zaključujemo da skalarni potencijal strogo raste duž silnice magnetskog polja.
Budući da Meissnerov efekt, koliko je poznato, izbacuje samo vanjska magnetska polja, potrebno je formulirati uvjet na način da dopustimo silnici ukupnog polja da probode horizont događaja samo jednom. Na primjer kod Reissner-Nordströmove crne rupe nabijene magnetskim monopolnim nabojem moramo dopustiti da silnice izlaze iz rupe. Ako se neka silnica prođe preko horizonta više od jedanput, to znači da određena količina magnetskog toka ulazi u unutrašnjost crne rupe. Duž jedne silnice skalarni magnetski potencijal raste. Za silnice koje idu u beskonačnost, to nije problem, međutim problem se javlja kod silnica koje se vraćaju natrag na horizont(za koje vjerujemo da ne postoje). Argument koji ne dostaje je taj što nismo mogli pokazati da je svuda na horizontu isti potencijal - što bi značilo da takve silnice ne postoje jer bi trebale imati istu vrijednost u dvije točke, a između njih postoji područje strogog rasta. Za primjetiti je kako nismo uspjeli uklopiti uvjet ekstremalnosti u čitavu priču te je to očiti dio koji nedostaje.

[1] M. Heusler, *Black Hole Uniqueness Theorems* (Cambridge University Press, 1996).
[2] R. M. Wald, Phys. Rev. D **10**, 1680 (1974).
[3] A. R. King, J. Lasota, and W. Kundt, Phys. Rev. D **12**, 3037 (1975).
[4] A. Papapetrou, Ann. Inst. H. Poincare **4**, 83 (1966).
[5] J. Bičák and L. Dvořák, Phys. Rev. D **22**, 2933 (1979).
[6] J. Bičák and V. Janiš, Mon. Not. R. astr. Soc. **212**, 899 (1985).
[7] R. F. Penna, Phys. Rev. D **89**, 104057 (2014).

[8] A. J. M. Medved, D. Martin, and M. Visser, Phys. Rev. D **70**, 024009 (2004).
[9] S. E. Gralla, A. Lupsasca, and A. Strominger, Phys. Rev. D **93**, 104041 (2016).
[10] V. Karas and Z. Budínová, Physica Scripta **61**, 253 (1991).
[11] S. Gralla and T. Jacobson, Mon. Not. R. astr. Soc. **445(3)**, 2500 (2014).
[12] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, Phys. Rev. Lett. **69**, 1849 (1992).
[13] J. E. Åman, I. Bengtsson, and H. F. Rúnarsson, Class. Quantum Grav. **29**, 215017 (2012).