Infracrvena struktura gravitacije

Nikola Crnković
Fizički odsjek, PMF, Bijenička cesta 32, 10 000 Zagreb

January 22, 2018

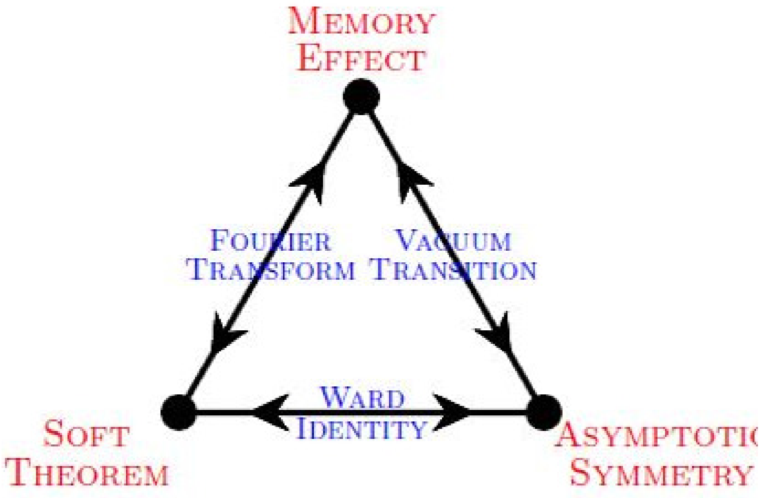
Sažetak

Infracrveni efekti su pojave koje imaju vrlo malu energiju i zbog toga se ne mogu lagano detektirati u eksperimentima. Pokazalo se da se tri infracrvene pojave mogu povezati matematičkim relacijama, to su asimptotske simetrije, teorem o infracrvenom raspršenju i memorijski efekt. U ovom radu ćemo sažeti svaku od tih pojava u slučaju gravitacije i pokazati kako se one mogu matematički povezati.

Sadržaj

1 Uvod

Infracrveni efekti (IC) su pojave koje imaju vrlo malu energiju i zbog toga se ne mogu lagano detektirati u eksperimentima. U ovom seminaru proučavat ćemo tri gravitacijska infracrvena efekta (GIC) i njihove relacije kao što je prikazano na Slici 1. Svaka od tih pojava je proučavana neovisno i nije se smatralo da su povezane, sve dok se u zadnjih par godina nije uvela ista notacija i primijenile se matematičke operacije te se tako pokazalo da se može povući relacija među njima. Relacije koje će biti iskazane mogu se proširiti na sve fizikalne teorije s bezmasenim česticama [1].



Slika 1: IC trokut za sve bezmasene čestice.

Objasnimo najprije Sliku 1 koja pokazuje IC trokut za sve bezmasene čestice. U donjem lijevom kutu se nalazi teorem o mekanom raspršenju (engleski naziv je soft theorem, ovdje je nadalje TMR). Generiliziran je na gravitaciju 1965. godine od strane Weinberga[2]. TMR karakterizira univerzalno svojstvo Feynmanovih dijagrama i amplituda raspršivanja kada vanjska čestica bez mase postaje "mekana", tj. njezina energija teži nuli. Teorem kaže da se jako velik (beskonačan) broj mekih čestica proizvodi u bilo kojem fizičkom procesu, ali u kontroliranim načinom koji je središnji za konzistentnost teorije kvantnog polja.

U donjem desnom kutu su asimptotske simetrije, koje proučavaju netrivijalne egzaktne simetrije ili očuvane naboje (veličine) bilo kojeg sistema s asimptoskom granicom, tj. granicom u beskonačnosti. Dobili su takav naziv jer obično dobivaju jednostavan oblik kada ih proučavamo u asimptotskim područjima. Jedan od najranijih primjera pojavljuje se u pionirskom radu Bondi, van der Burg, Metzner i Sachs (BMS) [3, 4], koji su 1962. godine pokušavali dobiti Poincarovu grupu specijalne relativnosti kao simetričnu grupu u asimptotskom ravnom prostor-vremenu (nadalje prostor) u općoj relativnosti (OTR). Umjesto toga otkrili su u beskonačno-dimenzionalnu BMS grupu, koja sadrži konačnu Poincareovu grupu kao podgrupu, čija se duboka implikacija još uvijek istražuje. Analogne asimptotske simetrije u QED i ne-abelskim baždarenim teorijama su otkrivene tek nedavno [5] i predmet su tekućih istraživanja.

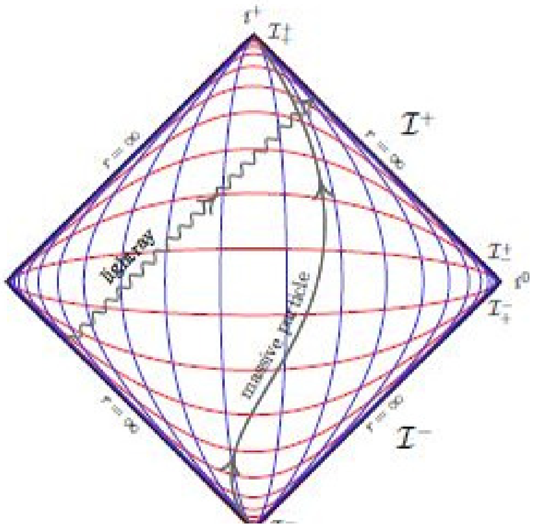
U gornjem kutu je memorijska pojava, prvi su je istražili, 1977. godine, Zeldovich i Polnarev [6] u kontekstu gravitacijske fizike , a znatno su je razvijali Christodoulou i drugi [7]. Ovo je suptilna trajna pojava, u kojoj prolaz gravitacijskih valova proizvodi trajni pomak u relativnim položajima parova inercijskih detektora. Od otkrića gravitacijskih valova [8] ova pojava se aktivno traži u LIGO-u[9]. Opet, analogni primjer u baždarenoj teoriji se pojavio tek nedavno [10]. Memorijska pojava igra važnu ulogu u fizičkoj realizaciji apstraktno formuliranih rezultata od ostala dva efekta, dajući izravne opservacijske posljedice velikog broja simetrija i zakona očuvanja.

Slika 1 također prikazuje matematičke ekvivalentne odnose koji povezuju te tri pojave, koje ćemo pokazivati pri gravitacijskom slučaju. Najjednostavnija je veza između TMR i memorijske pojave [11]. Prvi govori o polovima u impulsnom prostoru u amplitudama raspršenja, dok se potonji odnosi na trajni pomak u asimptotskim podacima između prošlog i budućeg vremena. Te pojave su ista stvar jer je Fourierova transformacija pola u frekvencijskom prostoru step-funkcija u vremenu. Step-funkcija može se shvatiti kao granica koja povezuje dva nejednaka vakuumska stanja koja su povezana asimptotskom simetrijom [11]. Stoga se memorijska pojava se i fizički manifestira kao asimptotske simetrije i izravno mjeri njihovo djelovanje. Trokut je zatvoren tako što je primjećeno da svaka simetrija ima Wardov identitet koji izjednačava amplitude rasprostiranja sa stanjima povezanim sa simetrijom. Ovi Wardovi identiteti su postali ništa drugo osim TMR-a, koji se odnose na amplitude s i bez mekih čestica, u prerušenju [5,12,13]. Iako možemo početi od bilo koje pojave počet ćemo od asiptotskih pojava. Raditi ćemo s $c = \hbar = 1$

2 Asimptotske simetrije

2.1 Penroseov dijagram i Bondi koordinate

Prilikom diskusije o beskonačnosti korisno je uvesti Penroseov dijagram. Na Slici (2) je prikazan Penroseov dijagram za 4D Minkowskijev prostor. Svojstvo Penrose dijagrama je da može prikazati cijeli prostor na konačnoj površini pomoću konformalne transformacije "(eng. conformal transformation)" koja divergira na rubovima. Udaljenost među točkama nije dobro prikazana, ali je očuvana kauzalna struktura i kretanje svjetlosti se prikazuje ravnom linijom pod 45°, kao i u Minkowskijem dijagramu.

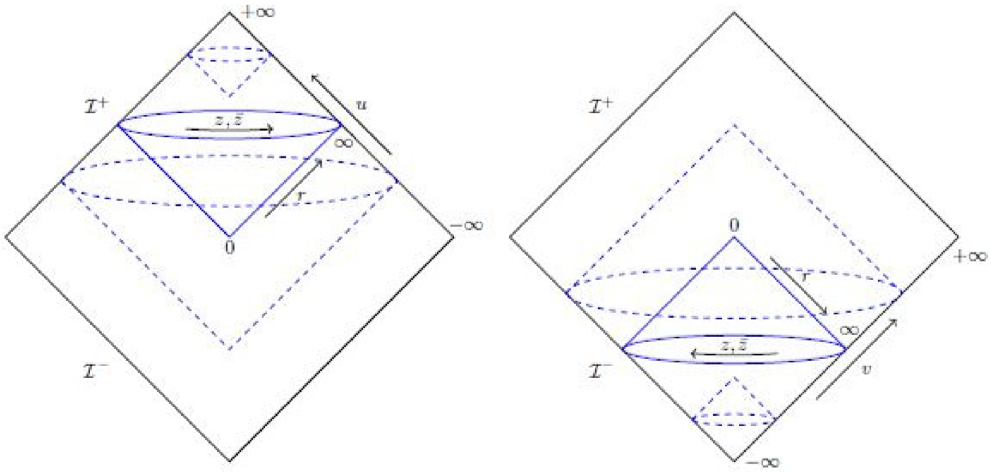


Slika 2: Penrose dijagram Minkowskijeveg prostora. Crvene linije predstavljaju površine konstantnog t, dok plave linije predstavljaju površine konstantnog r. Puna siva linija je svjetska linija masivne čestice koja se kreće pri konstantnoj brzini, a puna valovita siva linija je svjetska linija svjetlosne zrake. Svaka S^2 konstantog $(r > 0; t)$ prikazana je s dvije točke, jedna s lijeve strane i druga s desne strane, koje se razmjenjuju antipodalnim preslikavanjem. Beskonačna budućnost i prošlost svjetlosnog tipa su označene s $\mathcal{I}^{\pm}$,a njihove četiri S^2 granične komponente s $\mathcal{I}^{\pm}_{\pm}$. Točke $i^{\pm}$ su beskonačna prošlost i budućnost u "vremenskoj budućnosti", dok je točka i^0 prostorna beskonačnost.

Svaki lijevo-desni par točaka na Slici (2) na istom (r, t),gdje je t vrijeme, a r radijalna koordinata, odgovara S^2 (osim $r = 0$, što je točka) i par se zamjenjuje antipodalnim preslikavanjem na S^2. Budući da svjetska linija svjetlost "kreće" pod 45° i prestići će svaku masivnu česticu koja se kreće manje od brzine c, one ne mogu doseći $r = \infty$, tj. svaka masivna čestica će uvijek završiti u točki koja se naziva beskonačna budućnost vremenskog tipa i označava se s i^+. Iz istog razloga svjetska linija masivne čestice počinje u beskonačnoj prošlosti vremenskog tipa (i^-). Područje gdje završava svjetska linija svjetlosti nazivamo beskonačna budućnost svjetlosnog tipa $(\mathcal{I}^+)$, a počinje u beskonačnoj prošlosti svjetlosnog tipa $(\mathcal{I}^-)$. Obje beskonačnsti $(\mathcal{I}^{\pm})$ su nastale produktom S^2 s null linijom (svjetlosna linija). Prostorna beskonačnost se označava s i^0. S $\mathcal{I}^+_-$ označavamo prošlost od $\mathcal{I}^+$, a budućnost od $\mathcal{I}^-$ s $\mathcal{I}^-_+$. Oba područja su blizu točke i^0, ali se razlikuju od nje. Također imamo $\mathcal{I}^-_-$ koja je blizu točke i^- i imamo još $\mathcal{I}^+_+$ koja je blizu i^+.

Vratimo se problemu raspršivanja u Minkowskijem prostoru. Bilo da govorimo o klasičnoj ili kvantnoj gravitaciji , počinje se navodeći početne podatke u $\mathcal{I}^-$. Ako postoje stabilne masivne čestice, početni podaci u i^- su također potrebni, ali to zanemarujemo jer gravitoni, čestice odgovorne za gravitacijsku silu, smatraju se česticama bez mase. Dolazne čestice (ili valni paketi) evoluiraju jedne prema drugima, međusobno djeluju na vrlo složen način i konačno izlaze na $\mathcal{I}^+_+$. Pretpostavlja se da u dalekoj prošlosti čestice i polja slabo intereagiraju. U klasičnoj verziji problema raspršivanja traži se preslikavanje iz faznog prostora definiranog na $\mathcal{I}^-$ do faznog prostora definiranog na $\mathcal{I}^+$. U kvantnoj verziji problema raspršivanja cilj je da se pronađe S matrica koju evoluira početna stanja definiranog na $\mathcal{I}^-$ do konačnih stanja definiranog na $\mathcal{I}^+$. Jasno je da je ono što se događa blizu i^0 je vrlo važno jer moramo znati kako se ponašaju konačni podaci na $\mathcal{I}^+$ ako su nam dani početni podaci na $\mathcal{I}^-$. Specifično, moramo razumjeti koji su odgovarajući uvjeti koji povezuju polja na $\mathcal{I}^-_+$ s poljima na $\mathcal{I}^+_-$.

Možemo pokušati koristiti uobičajeni $(t; r; \hat{x})$, gdje je $\hat{x}$ jedinični vektor koji označava točku na sferi, ali taj izbor nije dobar jer su t i r beskonačni na $\mathcal{I}$. Međutim, ako pratimo svjetske null linije unatrag u vremenu, $t + r$ je konačno, i ako ih pratimo prema naprijed u vremenu, $t - r$ je također konačno. Dakle, $\mathcal{I}^+$ je prirodno parametriziran s $(u = t - r, r; \hat{x})$, a $\mathcal{I}^-$ je prirodno parametriziran pomoću $(v = t + r, r, \hat{x})$, gdje u nazivamo retardirano vrijeme, a v nazivamo napredno vrijeme.



Slika 3: $\mathcal{I}^+$ je parametriziran retardiranim vremenom u i sfernim koordinatama $(z, \tilde{z})$ u retardiranim Bondijevim koordinatama (lijevo), dok je $\mathcal{I}^-$ parametriziran naprednim vremenom v i sferičnim koordinatama $(z, \tilde{z})$ u naprednim Bondijevim koordinatama. Napredne i retardirane koordinate su izabrane tako da su povezane antipodalnim preslikavanjem na sferi.

Uzevši to u obzir uvodimo sljedeće transformacije koordinata iz Kartezijevog koordinatnog sustava (t, x^1, x^2, x^3) u sustav retardiranih koordinata $(u, r, z, \tilde{z})$:

$$\vec{x} = r\hat{x}, \quad t = u + r, \quad x^1 + ix^2 = \frac{2rz}{1 + z\tilde{z}}, \quad x^3 = r\frac{1 - z\tilde{z}}{1 + z\tilde{z}}. \tag{1}$$

Gdje je z kompleksna koordinata na jediničnoj sferi S^2 koja ima metriku:

$$\gamma_{z\tilde{z}} = \frac{2}{1 + z\tilde{z}}. \tag{2}$$

z može imati bilo koji iznos u kompleksnoj ravnini: sjeverni pol je $z = 0$, a južni $z = \infty$, ekvator je u $z\tilde{z} = 1$ i $z \to -\frac{1}{\tilde{z}}$ je antipodalna točka.
Inverzna transformacija je:

$$u = t - r, \quad z = \frac{x^1 + ix^2}{x^3 + r}. \tag{3}$$

Standardna metrika Minkowskog prostora:

$$ds^2 = -dt^2 + (d\vec{x})^2, \tag{4}$$

prelazi u

$$ds^2 = -du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\tilde{z}}dzd\tilde{z}. \tag{5}$$

U ovakvoj metrici ako zadržimo $(u, z, \tilde{z})$ fiksnima i uzmemo limes $r \to \infty$, krenuli smo po nul-liniji $(ds^2 = 0)$ prema $\mathcal{I}^+$. Retardirane koordinate $(u, r, z, \tilde{z})$ ne možemo koristiti u blizini $\mathcal{I}^+$ jer je tamo $u = -\infty$. Zato uvodimo napredne koordinate $(v, r, z, \tilde{z})$ pomoću transformacija:

$$\vec{x} = -r\hat{x} \quad t = v - r, \quad x^1 + ix^2 = -\frac{2rz}{1+z\tilde{z}}, \quad x^3 = -r\frac{1-z\tilde{z}}{1+z\tilde{z}}, \tag{6}$$

s sličnim inverznim transformacijama. Metrika (4) tada prelazi u:

$$ds^2 = -dv^2 + 2dvdr + 2r^2\gamma_{z\tilde{z}}dzd\tilde{z}. \tag{7}$$

Bitni predznak uveden u zadnja dva uvjeta (6) podrazumijeva da z u naprednim koordinatama označava antipodalnu točku na sferi na z u retardiranim koordinatama (predznak se promijeni pri pod $z \to -\frac{1}{\tilde{z}}$). Ako uzmemo svjetlosnu zraku koja prelazi Minkowskijev prostor, tada vrijednost z-a na kojoj svjetlost počinje u naprednim koordinatama bit će ista kao i vrijednost z na kojoj završava u retardiranim koordinatama. Također, z je konstantna duž nul generatora na $\mathcal{I}^-$ dok prolaze kroz i^0 do $\mathcal{I}^+$.

2.2 Asimptotsko ravni prostor

Proučimo teorije gravitacije čija je metrika asimptotska, ali nije ekzaktno jednaka ravnoj metrici kao u (7) i (9). Općenita Lorentzianova metrika se može lokalno zapisati u retardiranim Bondi koordinatama:

$$ds^2 = -Udu^2 - 2e^{2\beta}dudr + g_{AB}\Big(dx^A + \frac{U^A}{2}du\Big)\Big(dx^B + \frac{U^B}{2}du\Big), \tag{8}$$

uz Bondijevo baždarenje:

$$\partial_r det\Big(\frac{g_{AB}}{r^2}\Big) = 0, \quad g_{rr} = g_{rA} = 0. \tag{9}$$

U ovom radu koristimo $A, B = z, \tilde{z}$. Pri proračunima koristimo generalne A i B, a kasnije uvrstimo z i $\tilde{z}$. Ako pišemo A i/ili B egzaktno u jednadžbama tada naglašavamo da može biti z i/ili $\tilde{z}$. Lijeva strana baždarenja (11) implicira da je r luminozitetna udaljenost. Desnu stranu baždarenja (11) dobivamo tako da zahtijevamo da su hiperpovršine konstantnog u, A i B null [4]. . Razvijamo metriku (8) oko $\mathcal{I}^+$ (kada $r \to \infty$) i iz toga odredimo komponente metrike:

$$\begin{aligned} g_{uu} \approx -1 + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-1}) + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-2}), \quad g_{ur} \approx -1 + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-2}), \quad g_{rA} = g_{rr} = 0 \\ g_{uA} \approx \mathcal{O}(1)\mathcal{O}(\mathrm{r}^{-1}), \quad g_{AB} \approx r^2\gamma_{AB} + \mathcal{O}(\mathrm{r}) + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \tag{10}$$

$\mathcal{O}(\mathrm{r^n})$ predstavlja veličinu koja je manja od $g(u, z, \tilde{z})r^n$, za neku funkciju $g(u, z, \tilde{z})$ i dovoljno veliki r. Nema *a priori* preferirani način utvrđivanja onoga što te komponente moraju biti. Obično su odabrane kako bi bile dovoljno slabe da dopuštaju sva zanimljiva rješenja koja uključuju gravitacijske valove, ali dovoljno jaka da se isključe nefizička rješenja kao ona s beskonačnim energijama. Za uvjet da dobijemo gravitacijske valove [1,12] metrika je oblika:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-du^2 - 2dudr + 2r^2\gamma_{z\tilde{z}}dzd\tilde{z} + \\ &+ \frac{2m_B}{r}du^2 + rC_{zz}dz^2 + rC_{\tilde{z}\tilde{z}}d\tilde{z}^2 + D^zC_{zz}dudz + D^{\tilde{z}}C_{\tilde{z}\tilde{z}}dud\tilde{z} + k.k + \dots \end{aligned} \tag{11}$$

gdje je D_A kovarijantna derivacija s obzirom metrike na jediničnoj sferi γ_{AB}[1], indeksi A, B se podižu i spuštaju pomoću γ_{AB}[2]. C_{AA} i m_B ovise o $(u, z, \tilde{z})$. Veličina m_B je poznata kao Bondijeva gustoća mase. Za Kerrov prostor, m_B je konstantna i proporcionalna masi ($m_B = GM$), ali u generičkom prostoru ovisi o $(u, z, \tilde{z})$. Integral Bondijeve gustoće mase po sferi je ukupna Bondijeva masa. C_{AB} opisuje gravitacijske valove. Može pokazati iz lijevog uvjeta iz (11) da je C_{AB} tenzor bez traga. Bondijev tenzor je definiran kao:

$$N_{AB} = \partial_u C_{AB}. \tag{12}$$

N_{AB} opisuje gravitacijsko zračenje koji prolazi kroz $\mathcal{I}^+$ (njegov kvadrat je proporcionalan s tokom energije koje prolazi). Prvi red u metrici (11) je ravan Mikovski prostor (7), dok je drugi red vodeća korekcija na ravni prostor. Točke "..." uključuju članove razvoja koje ne doprinose računima.

[1]Primjer: $\Gamma^z_{zz} = -2\tilde{z}/(1+z\tilde{z})$
[2]Primjer: $\gamma_{AB}D^AD^B = D^2$

Pretpostavljamo da je metrika vođena Einstenovom jednadžbom:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T^M_{\mu\nu}. \tag{13}$$

Gdje je $T^M_{\mu\nu}$ tenzor energije i momenta (kratko tenzor stresa), G gravitacijska konstanta, $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor i R riccijev skalar. Ako uzmemo u obzir kuglu na velikom r, njezina površina raste kao r^2. Integral T^M_{uu} po površini te kugle dobivamo tok energije, tako da ako želimo isključiti rješenja s beskonačnim energijama moramo poštivati :

$$T^M_{uu} \approx \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-2}) \tag{14}$$

Iz (13) i (14) dobivamo ograničenja na m_B :

$$\partial_u m_B = \frac{1}{4}[D_z^2 N^{zz} + D_{\tilde{z}}^2 N^{\tilde{z}\tilde{z}}] - T_{uu}, \tag{15}$$

gdje je :

$$T_{uu} = \frac{1}{4}N_{zz}N^{zz} + 4\pi \lim_{r\to\infty}[r^2 T^M_{uu}]. \tag{16}$$

Izraz T_{uu} sadrži korekcije iz tenzora stresa za linearizirane gravitacijske valove. Pretpostavimo da je u blizini $\mathcal{I}^+_-$ i $\mathcal{I}^+_+$ Bodnijev tenzor pada brže od $\frac{1}{|u|}$. Ovaj (i jači) asimptotični rubni uvjet su dokazali Christodoulou i Klainerman [14] da se drži u konačnom susjedstvu ravnog prostora. Ovdje ćemo razmotriti prostor s ovim asimptotskim ponašanjem. N_{zz} tada trivijalno određuje C_{AB} do integrirane funkcije integrirajući (12). Također, uz uvjet da je u vakuumu $N_{AB} = 0$, $T^M_{uA} = 0$ i iz (16) dobivamo:

$$C_{zz}|_{\mathcal{I}^+_-} = -2D_z^2 C, \tag{17}$$

gdje je $C(z, \tilde{z})$ neka funkcija na $\mathcal{I}^+_-$. Sa zadanim Bodnijevim tenzorom i početnim podacima (19) na $\mathcal{I}^+_-$, ograničenja (15) mogu biti integrirana za dobivanje gustoće mase m_B na $\mathcal{I}^+$. Stoga Cauchyjevi podaci na $\mathcal{I}^+$ uključuju:

$$\{N_{AB}(u, z, \tilde{z}), C(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^+_-}, m_B(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^+_-}, C_{AB}(u, z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^+_-}\}. \tag{18}$$

Cauchyevi podaci (18) transformiraju se netrivijalno pod BMS^{+}[3] podgrupom [3,4] difemomorfizama djelujući blizu $\mathcal{I}^+$, što uključuje boostove, rotacije i supertranslacije (formule za koje se nalaze u sljedećem odjeljku).

Sličan skup jednadžbi primjenjuje se blizu $\mathcal{I}^-$, gdje primjenjujemo napredne Bondi koordinate (6) $(v, r, z, \tilde{z})$ u kojem metrika ima asimptotsku ekspanziju:

$$ds^2 = -dv^2 + 2dvdr + 2r^2\gamma_{z\tilde{z}}dzd\tilde{z} + \frac{2m_B}{r}dv^2 + rC_{zz}dz^2 + rC_{\tilde{z}\tilde{z}}d\tilde{z}^2 + \ldots, \tag{19}$$

gdje sada m_B i C_{AB} sada ovise o $(v, z, \tilde{z})$. Analog Cauchyjevim podacima (18) za $\mathcal{I}^-$ je:

$$\{N_{AB}(v, z, \tilde{z}), C(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^-_+}, m_B(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^-_+}, C_{AB}(v, z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^-_+}\}. \tag{20}$$

2.3 Supertranslacije

Prema definiciji prostor ima simetrije opisane pomoću Kilingovog vektorskog polja ξ, ako Liejeva derivacija metrike g_{ab}, kojom je opisan prostor dan, iščezava:

$$\pounds_\xi gab = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0, \tag{21}$$

gdje je ∇_a kovarijantna derivacija. U asimptotskim simetrijama Liejeva derivacija metrike sadrži članove koje opadaju u beskonačnostima:

$$\pounds_\xi gab \approx \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-1}) + \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-2}) + \ldots. \tag{22}$$

Za neko polje F kažemo da je naslijedilo simetriju prostora ako njegova derivacija po tom isto Killingovom polju takoder iščezava:

$$\pounds_\xi F = 0 \tag{23}$$

[3] Općenito BMS$^{\pm}$ je grupa na $\mathcal{I}^{\pm}$

Ako uzmemo da Kilingovo polje ima sljedeća ograničenja skraćujemo si račun:

$$\zeta^u, \zeta^r \sim \mathcal{O}(1), \quad \zeta^A \sim \mathcal{O}(\mathrm{r}^{-1}) \tag{24}$$

Ovaj uvjet eliminira 6 Lorentzovih generatora (boostove i rotacije), koji rastu s r u beskonačnosti. Pomoću (22) i gornjih uvjeta dobivamo Kilingov vektor oblika:

$$\zeta_f = d\partial_u + D^z D_z f \partial_r - \frac{1}{r}(D^z f \partial_z + D^{\tilde{z}} f \partial \tilde{z}) + \dots, \tag{25}$$

gdje je f bilo koja funkcija koja ovisi o $(z, \tilde{z})$. Transformacije generirane s (25) se zovu *supertranslacije*. Supertranslacije su generalizacija četiri translacije u Minkowskom prostoru. Na primjer, ako uzmemo $f(z, \tilde{z}) = konst$ (25) generira u translaciju. Ako uzmemo da je $f(z, \tilde{z}) = Y_m^1$ ($l = 1$ harmonik) na sferi dobivamo tri prostorne translacije [1]. Kompletna BMS^+ grupu dobivamo *poluproduktom* supetranslacija i Lorentzove grupe.

Supertranslacije transformiraju jednu geometriju u novu fizikalno drugačiju geometriju, unatoč činjenici da su one simetrije. Na primjer, promotrimo rješenje gdje odlazni puls gravitacijskih valova prelazi na južni pol $\mathcal{I}^+$, i drugi puls prelazi sjeverni pol $\mathcal{I}^+$, oboje u retardiranom vremenu $u = u_0$. Sada supertranslatiramo ovo rješenje s funkcijom $f(z, \tilde{z})$ koje ima svojstvo da $f(\text{južni pol}) = f_1$ i $f(\text{sjeverni pol}) = 0$. Nova rješenja sada imaju jedan odlazni puls na sjevernom polu samo na $u = u_0$ i jedan na južnom polu samo na $u = u_0 + f1$, tj. pojavljuju se proizvoljno velika relativna kašnjena. Cauchy $\mathcal{I}^+$ podaci su se mjerljivi promijenili supertranslacijama.

Djelovanjem supertranslacija na $\mathcal{I}^+$ polja m_B , N_{AB}, C i C_{AB} dobivamo:

$$\pounds_\zeta N_{AB} = f\partial_u N_{AB} \tag{26}$$

$$\pounds_\zeta m_B = f\partial_u m_B + \frac{1}{4}(N^{AB} D_A D_B f + 2 D_A f D_B N^{AB}), \tag{27}$$

$$\pounds_\zeta C_{AB} = f N_{AB} - 2D^2 f, \tag{28}$$

$$\pounds_\zeta C = f. \tag{29}$$

Implikacije jednažbe (28) su zanimljive. Pretpostavimo da supertransliramo ravni Minkowski prostor opisan s $m_B = Nzz = Czz = 0$ i uzmemo $f = C$, tada (26-27) podrazumjeva da će supertranslatirani prostor i dalje imati Bondi masu i Bondijev tenzor jednake nuli. To je u skladu s činjenicom da diomorfizam (simetrije) ne može promijeniti fizikalnu masu ili stvoriti gravitacijske valove. Međutim, supertranslatirani prostor ima $C_{AB} \neq 0$. Tj. C_{AB} na $\mathcal{I}^+$ nije invarijantna pod supertranslacijama. Drugim riječima, supertranslacijska simetrija spontano je slomljena i mijenja fizikalno (u kantnom slučaju kvantno) stanje sustava. Izraz (29) nam govori da je C pri izboru $f = C$ Goldstoneov bozon spontano razbijene supertranslacijske simetrije, koji parametrizira klasično nejednaki gravitacijski vakuum. Postoji beskonačan broj degeneriranih klasičnih vakuuma obilježenih funkcijom $C|_{\mathcal{I}^+_-}$, od kojih je svaka očuvana različitom Poincare podskupinom BMS $+^4$. Ovi vakuumi imaju različite kutne momente. Ovo se ponekad naziva i 'problem kutnoga momenta' u OTR-u.

Djelovanjem supetranslacija na $\mathcal{I}^-$ dobivamo slične jednadžbe.

2.4 Problem raspršenja i očuvani naboji

Problem raspršivanja u klasičnoj općoj relativnosti je, kako je već rečeno u odjeljku 2.2, pronaći preslikavanje od Cauchyjevih podataka na $\mathcal{I}^-$ do onih na $\mathcal{I}^+$. Takvo preslikavanje nije formalno određeno niti maksimalnim Cauchyevem razvojem $\mathcal{I}^-$ podataka (20) s Einsteinovom jednadžbom[1]. Ovo određuje podatke na $\mathcal{I}^+$ najviše do BMS^+ transformacije. Potreban je recept da bismo priložili $\mathcal{I}^+$, odabrali BMS^+ grupu (Cauchyjeve podatke) i odredili početne vrijednosti za integraciju m_B i N_A duž $\mathcal{I}^+$ pomoću ograničenja (15-16). Bez takvog recepta, problem raspršivanja u OTR-u nije definiran. U [12], predloženo je da se grupa BMS^+-a odredi pomoću graničnih uvjeta koji su Lorentz i CPT invarijantni :

$$m_B(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^-_+} = m_B(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^+_-}, \quad C(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^-_+} = C(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^+_-}, \quad f(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^-_+} = f(z, \tilde{z})|_{\mathcal{I}^+_-} \tag{30}$$

Ovi uvjeti razbijaju kombiniranu $\mathrm{BMS}^+\mathrm{xBMS}^-$ akciju na $\mathcal{I}^+$ i $\mathcal{I}^-$ na dijagonalnu podgrupu koja čuva te uvjete. Drugim riječim, ostaje kao simetrija gravitacijskog raspršivanja. S našim konvencijama (30) antipodalno izjednačava prošla i buduća polja u blizini prostorne beskonačnosti i^0.

Za granične uvjete (30) je dokazano [1,13] da bude implicitan u svim članovima razvoja u standardnoj slaboj teoriji perturbacije pokazujući njegovu ekvivalenciju Weinbergovom TMR [2], što nas motivira da su članovi u

[4] Općenito, nema preferirane Poincarove podskupine BMS^+

(30)) dio definicije problema raspršenja kada su polja dovoljno slaba blizu prostorne beskonačnosti, čak i ako unutrašnjost sadrži crnu rupu.

Granični uvjeti (30) impliciraju da postoji beskonačan broj očuvanih naboja u OTR raspršenju. Obitelj očuvanih naboja su supertranslatirani naboji:

$$Q_f^+ = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}_-^+} dz^2 \gamma_{z\bar{z}} f m_B, \quad Q_f^- = \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}_+^-} dz^2 \gamma_{z\bar{z}} f m_B \tag{31}$$

Granični uvjeti (32) podrazumijevaju zakone očuvanja:

$$Q_f^+ = Q_f^- \tag{32}$$

Slučaj $f = 1$ je samo očuvanje ukupne , a $l = 1$ harmonik ($f = Y_m^1$) daje dobro poznato očuvanje momenta. Opći slučaj (32) daje a beskonačan broj novih generalizacija ovih četiri zakona. Odabir da f bude delta funkcija, (32) izjednačava ulazni tok energije u nekoj točki (uključujući linearne gravitacijske članove) s ukupnim odlaznim tokom energije u antipodalnoj točki. Prema tome, zakon očuvanja (32) kaže da je energija očuvana u svakom kutu.

U kvantoj mehanici simetrije se određuju iz komutatora, koji su srodni s Possionovim zagradama (pomnožimo ih faktorom i), a koji su jednaki Liejevoj derivacijom po Kilingovim vektorima. Drugim riječima, ako neki naboj uzrokuje (infinitezimanlu) simetriju na nekom polju, tada je komutator između naboja i polja jednak Liejevoj derivaciji, pomnožen s i. Primjenom komutatora s Q_f^+ s C_{AB}, C, m_B i na C_{AB} dobivamo:

$$[Q_f^+, C_{AB}] = i\pounds_\zeta C_{AB}, \tag{33}$$

$$[Q_f^+, C] = i\pounds_\zeta C, \tag{34}$$

$$[Q_f^+, N_{AB}] = i\pounds_\zeta N_{AB}, \tag{35}$$

$$[Q_f^+, m_B] = i\pounds_\zeta m_B. \tag{36}$$

Kao što smo i očekivali supertranslatirani naboji generiraju simetrije na poljima C_{AB},C, m_B i na C_{AB}, iako mijenjaju fizikalno stanje sustava. Slično dobivamo i za Q_f^-.

3 Teorem o mekanom raspršenju

3.1 Simetrije S matrice

Kvantne amplitude raspršivanja se mogu napisati pomoću S matrice na sljedeći način:

$$\langle f| S |i\rangle \tag{37}$$

Iskoristimo li očuvanja naboja (32),činjenicu da je S konstruirana od eksponencijala Hamiltonijana [16] i svojstvo:

$$[Q_f^+, Q_{f'}^+] = 0, \tag{38}$$

slijedi da infinitezimalna BMS transforamcija komutira s S matricom, tj. $[Q_f^\pm, S] = 0$. odavde slijedi izraz za infinitezimalnu BMS^0 invarijantnost S matrice:

$$\langle f| (Q_f^+ S - S Q_f^-) |i\rangle = 0. \tag{39}$$

Integrirajmo jednadžbe (31) po dijelovima, iskoristimo jednadžbu ograničenja (15) (kako je već rečeno za $\mathcal{I}^-$ dobivamo slične jednadžbe) i pretpostavimo da m_B iščezava u $t \to \infty$ dobivamo:

$$\begin{aligned} Q_f^+ &= \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}^+} dud^2z \gamma_{z\bar{z}} f \Big[T_{uu} - \frac{1}{4}(D_z^2 N^{zz} + D_{\bar{z}}^2 N^{\bar{z}\bar{z}}) \Big] \\ Q_f^- &= \frac{1}{4\pi G} \int_{\mathcal{I}^-} dvd^2z \gamma_{z\bar{z}} f \Big[T_{uu} + \frac{1}{4}(D_z^2 N^{zz} + D_{\bar{z}}^2 N^{\bar{z}\bar{z}}) \Big]. \end{aligned} \tag{40}$$

Ubacimo li taj izraz u (39) i označimo n dolaznih (m odlaznih) čestica na u točku z_k^i (z_k^f) koji nose energiju E_k^i (E_k^f) gdje vrijedi zakon očuvanja energije[5] d:

$$\sum_{k=1}^{m} E_k^i = \sum_{k=1}^{n} E_k^f. \tag{41}$$

dobivamo:

$$\langle f(x)|\, P_z S\, |i(x)\rangle = \frac{1}{4\pi G}\left[\sum_{k=1}^{m} E_k^i f(z_k^i) - \sum_{k=1}^{n} E_k^f f(z_k^f)\right] \langle f(x)|\, S\, |i(x)\rangle\,, \tag{42}$$

gdje je

$$P_z = \frac{1}{8\pi G}\int d^2 z \gamma^{zz} D_z^2 f\Big[\int_{\mathcal{I}^+} du N_{zz} - \int_{\mathcal{I}^-} dv N_{zz}\Big], \tag{43}$$

struja mekanog gravitona. Ovdje koristimo oznaku (x, x') ako smo u prostornoj bazi i (p, p') ako smo u impulsnoj bazi. Jednadžba (42) nam daje beskonačno mnogo Wardovih identiteta, jedan za svaku funkciju f. Sada treba pokazati da je TMR može dobiti preko očuvanja energije. Uvrstimo $f = \frac{1}{z-w}$ i koristimo $\partial_{\bar z}\frac{1}{z-w} = 2\pi\delta^2(z-w)$ dobivamo oblik koji ćemo kasnije koristiti:

$$\langle f(x)|\, P_z S\, |i(x)\rangle = \left[\sum_{k=1}^{m}\frac{E_k^i}{z-z_k^i} - \sum_{k=1}^{n}\frac{E_k^f}{z-z_k^f}\right]\langle f(x)|\, S\, |i(x)\rangle\,. \tag{44}$$

Pokazat ćemo da je to Wardov identitet u odjeljku 3.3.

3.2 Pregled TMR-a

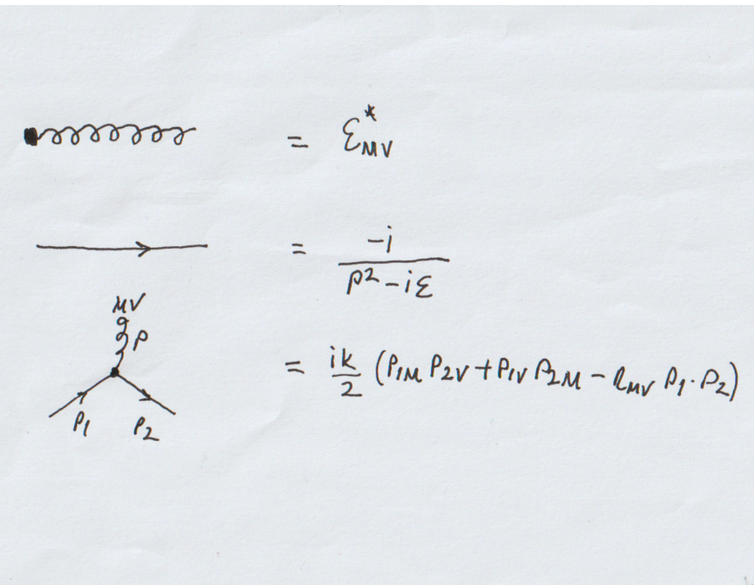
Radi jednostavnosti promotrit ćemo TMR na skalarnoj teoriji slobodnih bezmasenih čestica s danim Langražijanom [13]:

$$\mathcal{L} = \frac{2R}{k^2} + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{k}{2}h^{\mu\nu}\Big[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^\rho\phi\partial_\rho\phi\Big], \tag{45}$$

gdje je $k^2 = 32\pi G$, $h_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu})/k$ gravitonsko polje koje se veže za materiju i normalizirano tako da nema konstante G u kinetičkom članu. Graviton ima 4-moment q^μ i polarizacijski tenzor $\epsilon_{\mu\nu}$ koji zadovoljavaju:

$$\epsilon_{\mu\nu}q^\mu = 0, \quad \epsilon^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = 0, \quad q^2 = 0 \tag{46}$$

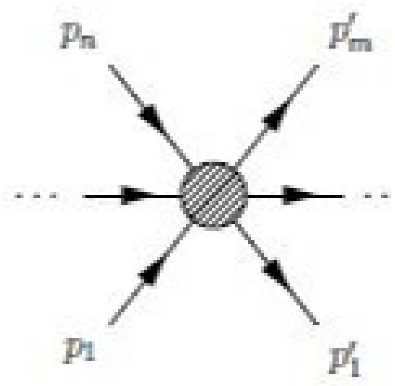
Na Slici 4. su prikazana Feynmanova pravila za danu teoriju.



Slika 4: Feynmmanovi dijagrami za graviton.

[5]U tom slučaju $T_{aa} \approx 4\pi G\sum_k E_k^d\delta(a-a_k)\frac{\delta^2(z-z_k^d)}{\gamma_{z\bar z}}$, gdje su $a = u, v;\ d = f, i$

Promotrimo n dolaznih (s momentima $p_1, \ldots, p_n$) i m odlaznih (s momentima $p'_1, \ldots, p'_n$) bezmasivnih skalarnih čestica predstavljenih na dijagramu na Slici 5. Promotrimo realni (virtualni ne pridonose polu) mekani graviton ($q^\mu \to 0$) koji se raspršuje od odlaznih ili dolaznih čestica. Dijagrami koji najviše doprinose su prikazan na Slici 6.



Slika 5: Raspršenje n dolaznih (sa momentima $p_1, \ldots, p_n$) i m odlaznih (sa momentima $p'_1, \ldots, p'_n$) bezmasivnih skalarnih čestica.

Nakon raspisa dobivamo izraz za raspršivanje gravitona na skalarnim bezmasenim česticama:

$$\mathcal{M}(q, p', p) = \frac{k}{2}\Big[\sum_{k=1}^{m} \frac{p'_{k\mu} p'_{k\nu}}{p' \cdot q} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k\mu} p_{k\nu}}{p \cdot q}\Big]\epsilon^{\mu\nu}\mathcal{M}_0(p', p) = \mathcal{M}_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu}\mathcal{M}_0(p', p), \tag{47}$$

gdje smo uvrstili $q^2 = 0$. Predfaktor u uglatim zagradama je jedinstven i ne ovisi o spinu čestica. U [2] je napravljen slučaj sa spinom. Iz Wardovog identiteta:

$$q^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu} = 0, \tag{48}$$

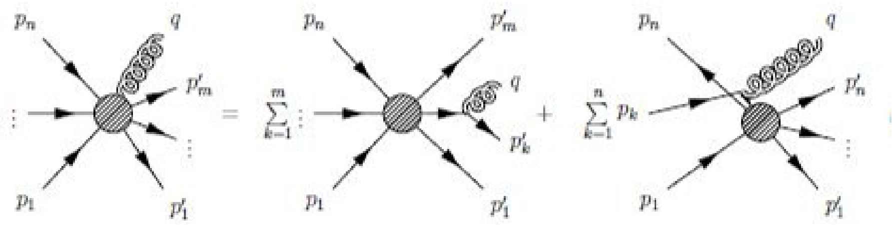
slijedi da je izraz (46) invarijatan na transformaciju:

$$\epsilon^{\mu\nu} \to \epsilon^{\mu\nu} + B^\mu(q) q^\nu. \tag{49}$$

Ako ubacimo tu transformaciju u (47) dobivamo zakon očuvanja 4-momenta iz Wardovog identiteta (48):

$$\delta\epsilon^{\mu\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu} = kB^\mu(q)\Big[\sum_{k=1}^{m} p'_{k\mu} - \sum_{k=1}^{n} p_{k\mu}\Big]\mathcal{M}_0 = 0 \tag{50}$$

Ovime smo pokazali da iz Wardovog identiteta možemo dobiti zakone očuvanja.



Slika 6: Dominanti dijagrami pri raspršenju mekanih gravitona.

3.3 Od simetrija do TMR-a

Sada ćemo dokazati da je izraz (42), koji dolazi od očuvanje naboja povezan s TMR (47). Problem je što je izraz (44) u koordinatnoj bazi, a izraz (52) u impulsnoj bazi. Da povežemo te jednažbe moramo naći operatore u istoj bazi. To ćemo učini tako da operatore u (44) raspišemo u bazi ravnih valova, koji se rade u Kartezijevim koordinatama u ravnom prostoru (4). Blizu $\mathcal{I}^+$ gravitacijsko polje $h'_{\mu\nu}$ postaje slobodno i može se aproksimirati ekspanzijom po modovima:

$$h'_{\mu\nu}(x) = \sum_{\alpha=\pm} \int \frac{d^3g}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_q} [\epsilon^{*\alpha}_{\mu\nu}(\vec{q}) a'_\alpha(\vec{q}) e^{iq\cdot x} + \epsilon^{\alpha}_{\mu\nu}(\vec{q}) a'_\alpha(\vec{q})^\dagger e^{-iq\cdot x}], \tag{51}$$

gdje su $\omega_q = q^0 = |\vec{q}|$, α su dva heliciteta, $a'_\alpha(\vec{q})$ i vrijedi:

$$[a'_\alpha(\vec{q}), a'_\beta(\vec{q'})^\dagger] = (2\omega_q)(2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{q} - \vec{q'}). \tag{52}$$

Pri velikim t i r valni paket bezmasene čestice momentom centriranog oko $\vec{p}$ postaje lokaliziran na sferi S^2 blizu točke:

$$\vec{p} = \omega\hat{x} = \omega\frac{\vec{x}}{r} = \frac{\omega}{1+z\tilde{z}}(z+\tilde{z}, -iz+i, 1-z\tilde{z}), \tag{53}$$

Stoga, možemo moment bezmasene čestice parametrizirati s $(\omega, z, \tilde{z})$. Tako možemo parametrizirati momente s z^i_k (z^f_k) u jednadžbi (47). Ako uvrstimo $z = 0$ (sjeverni pol), tada je $q^\mu = \omega(1, 0, 0, 1)$,tj. 4-moment je usmjeren prema x^3 osi.

U retardiranim Bondijevim koordinatama (11) možemo uočiti:

$$C_{AB}(u, z, \tilde{z}) = k \lim_{r\to\infty} \frac{h'_{AB}}{r}(u, r, z\tilde{z}). \tag{54}$$

Parametrizirajmo 4-moment gravitona:

$$q^\mu = \frac{\omega_q}{1+z\tilde{z}}(1+z\tilde{z}, z+\tilde{z}, -iz+i, 1-z\tilde{z}). \tag{55}$$

Dok polarizacijski tenzor gravitona možemo zapisati $\epsilon^{\pm\mu\nu} = \epsilon^{\pm\mu}\epsilon^{\pm\nu}$, gdje su:

$$\begin{aligned} \epsilon^{+\mu}(\vec{q}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{z}, 1, -i, -\tilde{z}), \\ \epsilon^{-\mu}(\vec{q}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z, 1, -i, -z), \end{aligned} \tag{56}$$

gdje vrijedi $\epsilon^{\pm\mu\nu} q_\nu = 0$. Definirajmo sada sljedeće veličine:

$$\begin{aligned} N^\omega_{zz}(z, \tilde{z}) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} du e^{i\omega u} \partial_u C_{zz}|_{\mathcal{I}^+}, \\ M^\omega_{zz}(z, \tilde{z}) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{i\omega v} \partial_v C_{zz}|_{\mathcal{I}^-}, \\ N^0_{zz}(z, \tilde{z}) &\equiv \lim_{\omega\to 0^+} \frac{1}{2}[M^\omega_{zz} + N^{-\omega}_{zz}] \\ M^0_{zz}(z, \tilde{z}) &\equiv \lim_{\omega\to 0^+} \frac{1}{2}[M^\omega_{zz} + M^{-\omega}_{zz}] \end{aligned} \tag{57}$$

Uvrstimo (57) u (54) da dobivamo sljedeće izraze:

$$\begin{aligned} N^0_{zz}(z, \tilde{z}) &= -\frac{k}{4\pi(1+z\tilde{z})^2} \lim_{\omega\to 0^+} [\omega a'_+(\omega\hat{x}) + \omega a'_-(\omega\hat{x})^\dagger], \\ M^0_{zz}(z, \tilde{z}) &= -\frac{k}{4\pi(1+z\tilde{z})^2} \lim_{\omega\to 0^+} [\omega a_+(\omega\hat{x}) + \omega a_-(\omega\hat{x})^\dagger] \end{aligned} \tag{58}$$

Struja mekanog gravitona (43) se može pisati:

$$P_z = \frac{1}{4G}\gamma^{z\tilde{z}} \partial_{\tilde{z}} O_{zz}, \quad O_{zz} = N^0_{zz} + M^0_{zz}. \tag{59}$$

Promotrimo sada element $\langle f(z')| O_{zz} S |i(z)\rangle$. Ubacimo u njega izraz (58) i iskoristimo činjenicu da $a'_-(\omega\hat{x})^\dagger$ $(a_+(\omega\hat{x}))$ anhilira konačno (početno) stanje za $\omega \to 0$ i da su amplitude za odlaznim gravitonom s pozitivnim helicitetom i za dolazni gravitonom s negativnog heliciteta istog iznosa [13] dobivamo:

$$\langle f(z')|\, O_{zz}S\, |i(z)\rangle = \frac{k}{2\pi(1+z\tilde{z})^2} \lim_{\omega\to 0^+} [\omega \langle f(z')|\, a'_+(\omega\hat{x}S)\, |i(z)\rangle] \tag{60}$$

Definiramo TMR (47) na sljedeći način:

$$\lim_{\omega\to 0^+} [\omega \langle f(z')|\, a'_+(\omega\hat{x}S)\, |i(z)\rangle] \equiv \frac{k}{2} \lim_{\omega\to 0^+} \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\omega[p'_k \cdot \epsilon^+(\vec{q})]^2}{p'_k \cdot q} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega[p_k \cdot \epsilon^+(\vec{q})]^2}{p_k \cdot q} \right] \langle f(z')|\, S)\, |i(z)\rangle . \tag{61}$$

Koristeći već zadano parametriziranje 4-momenta impulsa (55) i tenzora polarizacije (gornja jednadžba iz (56)) i još parametrizaciju impulsa čestica p_k i p'_k na sličan način:

$$\begin{aligned} p_k^{\mu} &= E_k^i \left(1, \frac{z_k^i + \tilde{z}_k^i}{1 + z_k^i \tilde{z}_k^i}, \frac{-(z_k^i - \tilde{z}_k^i)}{1 + z_k^i \tilde{z}_k^i}, \frac{1 - z_k^i \tilde{z}_k^i}{1 + z_k^i \tilde{z}_k^i} \right), \\ p_k^{\mu} &= \left(E_k^i \to E_k^f, \quad z_k^i \to z_k^f \right). \end{aligned} \tag{62}$$

i vratimo sve to u jednadžbu (60) dobivamo:

$$\langle f(z')|\, O_{zz}S\, |i(z)\rangle = \frac{8G}{1+z\tilde{z}} \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{E_k^f(\tilde{z} - \tilde{z}_k^f)}{(z - z_k^f)(1 + z_k^f \tilde{z}_k^f)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k^i(\tilde{z} - \tilde{z}_k^i)}{(z - z_i^f)(1 + z_i^f \tilde{z}_k^i)} \right] \langle f(z')|\, S)\, |i(z)\rangle \tag{63}$$

Preklopimo li lijevi izraz u (59) za početnim i konačim stanjem u z notaciji i iskoristimo li gorni izraz i očuvanje momenta dobivamo isti izraz kao u (44). Ovime smo dokazali da je desna strana (44) zaista Wardov identitet, samo u drukčijoj notaciji. Možemo ići i unatrag ovom notacijom. Počevši s definicijom TMR (61) parametriziramo momente kao u (55),(62) i tenzore polarizacije kao u (56). Zatim obrnutim postupkom i Wardovim identitetom na desnoj strani jednadžbe (44), dobivamo zakone očuvanja (tj. simetrije). Ovime smo pokazali da su asimtotske simetrije i TMR matematički povezani s Wardovim identitetom.

4 Gravitacijski memorijski efekt

4.1 Memorijski efekt kao posljedica supertranslacije

Pretpostavimo da su na sferi postavljena dva detektora koji su istom $r = r_0$,ali su udaljena međusobno za δz u vremenskom periodu $u < u_i$. Njihovu vlastitu udaljenost ćemo označiti s L i ona je dana pomoću:

$$L = \int \sqrt{g^i_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}. \tag{64}$$

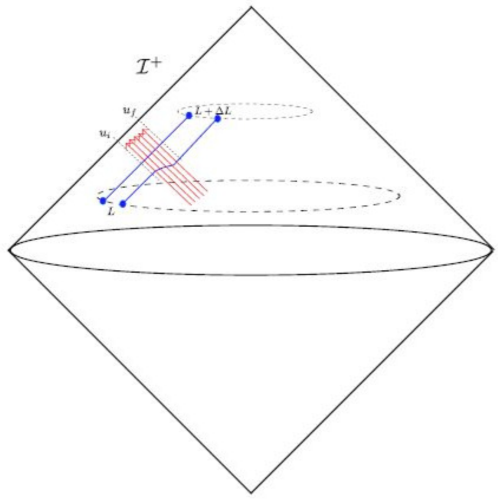
gdje je $g^i_{\mu\nu}$ početna metrika parametrizirana s (11) . U vremenskom periodu $u_i < u < u_f$ prolazi gravitacijski val koji mijenja metriku u $g^f_{\mu\nu}$. Nakon prolaska gravitacijskog vala detektori su opet u vakuumu ostavivši promijenjenu metriku i njihova međusobna kutna udaljenost se promijenila zbog te razlike u metrici (Slika 7), ta promjena međusobne udaljenosti se naziva gravitacijski memorijski efekt. Promjenu u međusobnoj udaljenosti ΔL je dana s:

$$\Delta L = \int \sqrt{g^f_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}} - \int \sqrt{g^i_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}}. \tag{65}$$

Iskoristimo gornje jednadžbe, razvijemo u red i zadržimo se na najvećim članovima, dobivamo da je promjena u udaljenosti:

$$\Delta L \approx \frac{r}{2L} \delta C_{zz} (\delta z)^2 + k.k \tag{66}$$

Dakle, promjena u udaljenosti između detektora je inducirana s promjenom u C_{AA}, koja se prema (26-29) javlja ako supertranslacije mijenjaju vakuumsko stanje. Ovime smo pokazali da su asimptotske simetrije povezane s gravitacijskim memorijskim efektom, preciznije rečeno supertranslacije induciraju memorijski efekt.



Slika 7: Memorijski efekt. Prolazak gravitacijskog zračenja kroz dva inercijalna detektora, koji se nalaze u $\mathcal{I}^+$, u vremenskom periodu $u_f - u_i$ uzrokuje promjenu u njihovoj relativnoj udaljenosti za ΔL.

4.2 Memorijski efekt i TMR

Proučimo rezultat koji su razmatrali Braginky i Thorne [17], kada su proučavali sudare masivnih objekata poput neutronskih zvijezda ili crnih rupa. Pronašli su da će se nakon sudara pojaviti promijena u metrici na $\mathcal{I}^+$. Ta razlika u metrici $\Delta h(\vec{x})_{\mu\nu}$, nakon prolaska gravitacijskog vala u vremenu $u = u_f$ je dana s:

$$\Delta h(u,\vec{x})_{\mu\nu} = \sqrt{\frac{G}{2\pi}}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{p_{i\mu}p_{i\nu}}{p_i\cdot k} - \sum_{i=1}^{n}\frac{p'_{i\mu}p'_{i\nu}}{p'_i\cdot k}\right)\theta(u-u_f) \tag{67}$$

gdje su p_ν (p'_ν) 4- momenti od m (n) odlaznih (dolaznih) objekata u sudaru, θ je step funkcija, $k = (1,\vec{x})$ je 4-vektor koji gleda od mjesta sudara (u centru Penrose dijagram) do udaljenog promatrača na $\mathcal{I}^+$. Dakle razlika između gornje razlike u metrici i $\mathcal{M}_{\nu\mu}$ predfaktora amplitude raspršenja (47):

$$\mathcal{M}_{\nu\mu} = \sqrt{8\pi G}\Big[\sum_{k=1}^{m}\frac{p'_{k\mu}p'_{k\nu}}{p'\cdot q} - \sum_{k=1}^{n}\frac{p_{k\mu}p_{k\nu}}{p\cdot q}\Big], \tag{68}$$

je u faktoru $\frac{1}{\omega}$ (zato jer je $q^\nu\omega(1.\vec{x})$)). Da dobijemo (67) iz (68) primjenimo Fourijerov tranformat $\int_{-\infty}^{\infty} du e^{i\omega u} u$ na gornju jednadžbu i iskoristimo da vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} du\frac{e^{i\omega u}}{\omega} = i\pi\theta(u). \tag{69}$$

Dakle, razlika u metrici (tj. memorijski efekt) i TMR međusobno su povezani Fourijerovom transformacijom do na konstanu. Ovaj rezultat nam govori da se crne rupe (ili neutronske zvijezde) i elementarne čestice na velikim udaljenostima ponašaju kao točke. Izvod u općenitom slučaju je dan u [11].

5 Zaključak

Proučavali smo tri IC pojave koje su na prvi pogled nepovezane. Prvo smo proučavali asimptotske simetrije. Počeli smo od definiranja metrike u Bondijevom baždarenju i razvili danu metriku oko $r = \infty$. Oblik članova smo odredili tako da smo postavili uvjete da nam metrika daje gravitacijske valove, da rješenja ne daju beskonačne energije i da nam geometrija je oblikovana Einsteinovom jednažbom polja. Odredili smo Kilingova vektorska polja na metrici, koje smo nazvali supertranslacije , i provjeravali kako ona djeluju na danim članovima. Rezultati nam govore da su dva prostora povezana supertranslacijama fizikalno nejednaka. Zatim smo definirali obitelj očuvanih naboja i pokazali da one jesu generatori simetrija danim poljima (članovima u razvoju). Napravili smo pregled izvoda TMR i pokazali da Wardov identitet vodi na očuvanje energije, što je u asimptotskom slučaju jedan dio simetrija. Kada smo krenuli od asimptotskih simetrija pokazali smo da možemo doći do TMR-a, ali u drugačijoj notaciji i pritom smo došli do rezultata koji kaže da postoji potencijalno beskonačno mnogo Wardovih identiteta. Stoga, Wardovi identiteti mogu biti skrivene simetrije u kvantnim poljima. Krenuvši od memorijskog efekta došli smo do toga da su one uzrok tomu da supertranslacije mijenjaju fizikalno stanje vakuuma, što nam daje da mjerenjem gravitacijskog efekta možemo proučavati asimptotske simetrije. Isto tako, ako primjenimo Fourijevov transformat na predfaktor u TMR-a, dobivamo memorijski efekt. U zaključku, tri dane IC pojave su međusobno povezane i ako napravimo pomak u jednoj od pojava možemo odmah naći rezultate i za druge dvije. Također, povezanost između memorijskog efekta i ostale dvije pojave nam daje alate za eksperimentalno proučavanje tih dviju pojava.

Literatura

[1] Andrew Strominger: Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory,promijeni ovo " Am. Math. Monthly 109:5 (2002) 409–442."

[2] S. Weinberg, "Infrared photons and gravitons," Phys.Rev. 140 (1965) B516-B524.

[3] H. Bondi, M. van der Burg, and A. Metzner, "Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems," Proc.Roy.Soc.Lond. A269 (1962) 21-52.

[4] R. Sachs, "Gravitational waves in general relativity. 8. Waves in asymptotically at space-times," Proc.Roy.Soc.Lond. A270 (1962) 103-126.

[5] A. Strominger, "Asymptotic Symmetries of Yang-Mills Theory," JHEP 07 (2014) 151, arXiv:1308.0589 [hep-th]; T. He, P. Mitra, A. P. Porfyriadis, and A. Strominger, "New Symmetries of Massless QED," JHEP 10 (2014) 112, arXiv:1407.3789 [hep-th].

[6] Y. B. Zel'dovich and A. G. Polnarev, "Radiation of gravitational waves by a cluster of superdense stars," Soviet Astronomy 51 (Feb., 1974) 30.

[7] D. Christodoulou, "Nonlinear nature of gravitation and gravitational wave experiments," Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 1486-1489; V. B. Braginskii and K. S. Thorne, "Gravitational-wave bursts with memory and experimental prospects," Nature 327 (May, 1987) 123125.

[8] Abbott, Benjamin P.; et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration) (2016). "Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger". Phys. Rev. Lett. 116 (6): 061102. arXiv:1602.03837

[9] P. D. Lasky, E. Thrane, Y. Levin, J. Blackman, and Y. Chen, "Detecting gravitational-wave memory with LIGO: implications of GW150914," Phys. Rev. Lett. 117 no. 6, (2016) 061102, arXiv:1605.01415 [astro-ph.HE].

[10] L. Susskind, "Electromagnetic Memory," arXiv:1507.02584 [hep-th].

[11] A. Strominger and A. Zhiboedov, "Gravitational Memory, BMS Supertranslations and Soft Theorems," JHEP 01 (2016) 086, arXiv:1411.5745 [hep-th].

[12] A. Strominger, "On BMS Invariance of Gravitational Scattering," JHEP 07 (2014) 152, arXiv:1312.2229 [hep-th].

[13] T. He, V. Lysov, P. Mitra, and A. Strominger, "BMS supertranslations and Weinberg's soft graviton theorem," JHEP 05 (2015) 151, arXiv:1401.7026 [hep-th].

[14] D. Christodoulou and S. Klainerman, "The global nonlinear stability of minkowski space," Seminaire Equations aux Derivees Partielles (Polytechnique) (1989-1990) 1-29. http://eudml.org/doc/111984.

[15] D. A. Nichols, "Spin memory effect for compact binaries in the post-Newtonian approximation," arXiv:1702.03300 [gr-qc].

[16] (Frontiers in Physics) Michael E. Peskin, Dan V. Schroeder-An introduction to quantum field theory-Addison-Wesley Pub. Co (1995)

[17] K. S. Thorne, "Gravitational-wave bursts with memory: The christodoulou effect," Phys. Rev. D 45 (Jan, 1992) 520-524.