Ispitivanje kvantne strukture prostorvremena

Marija Čuić
Fizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu
(Dated: 23. siječnja 2019.)

Nekomutativni prostori predstavljaju generalizaciju pojma prostorvremena na Planckovoj skali. Kao takvi, predviđaju pojave koje se ne mogu opaziti u komutativnim prostorima, kao što je lom Lorentzove simetrije. U ovom seminaru konstruirat ćemo simetriju nekomutativnih prostora Moyalovog tipa deforimiranjem Poincaréove grupe. Taj rezultat odrazit će se i na čestične statistike te će se pokazati da se i valne funkcije sustava fermiona ili bozona moraju deformirati. Na kraju ćemo spomenuti teorijska predviđanja teorije polja na nekomutativnim prostorima nastala na temelju deformiranih statistika.

SADRŽAJ

1. UVOD

Motivacija za nekomutativne prostore javlja se na više mjesta u teorijskoj fizici. Već prve naznake vidimo u kvantnoj mehanici, gdje se pojavljuju komutacijske relacije između kanonskih koordinata i impulsa, tj. dolazi do razmazivanja točaka u faznom prostoru. Prvi koji je konstruirao takav prostor bio je Snyder, koji je predložio, između ostalog, to da bi nekomutativni prostori mogli ukloniti divergencije iz teorije polja.

Dodatni argument za razmazivanje točaka prostorvremena nalazimo u činjenici da ispitivanjem prostorvremena na Planckovoj skali moramo korsititi čestice velike energije, čime im se lokalizira valna duljina. U nekom trenutku valna duljina postaje manja od Schwarzschildovog radijusa i čestica kolabira u crnu rupu, a unutar tog radijusa ne možemo ispitivati prostorvrijeme. Kako bi se taj problem uzeo u obzir, nameće se minimalni volumen prostorvremena s komutacijskim relacijama, koje daju relacije neodređenosti oblika [1]

$$\Delta\hat{x}^\mu \Delta\hat{x}^\nu \geq l_p^2, \tag{1.1}$$

gdje je $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-33}$ cm Planckova duljina.

Uz to, možda i najvažniji argument zbog kojeg su nekomutativni prostori dobili na popularnosti jest teorija struna, u kojoj se isti pojavljuju kao niskoenergetski limes.

Pri izgradnji teorije polja, kako na običnom prostorvremenu, tako i na nekomutativnom, treba voditi računa o fizikalnosti teorije. To osiguravaju tzv. Wightmanovi aksiomi, kao i Coleman-Mandula teorem, koji govori da se unutarnje simetrije teorije polja i simetrije prostorvremena mogu kombinirati samo na trivijalan način. Za sada nije pokazano, poštujući Wightmanove aksiome, da postoji zadovoljavajuća teorija s interakcijom u 4 dimenzije, no na nekomutativnom prostoru je nađena egzaktno rješiva ϕ^4 teorija [10]. Također su neka istraživanja pokazala da teorije na nekomutativnim prostorvremenima zaobilaze Coleman-Mandula teorem, uz već postojeću teoriju supersimetrija [11].

U ovom seminaru bazirat ćemo se na Moyalovom nekomutativnom prostoru, koji je dan s nekomutativnim relacijama oblika

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \tag{1.2}$$

gdje su θ_{ij} komponente konstantnog antisimetričnog tenzora ranga dva. Evidentno je da ova relacija ne poštuje Lorentzovu simetriju, barem ako pretpostavimo da se nekomutativne koordinate transformiraju kao obične. Cilj ovog seminara je naći simetriju ovog prostora, što ćemo postići deformacijom Poincaréove algebre. Kako bismo to napravili, uvest ćemo prvo neke matematičke pojmove, od kojih je najvažniji *Hopfova algebra* te pojmove zakretanja i $\star$-produkta. Hopfova algebra predstavlja najjednostavnije poopćenje pojma Liejeve algebre koje još uvijek omogućava opis deformirane strukture prostorvremena. Nadalje, pogledat ćemo kako se u ovom prostoru ponašaju čestične statistike, odnosno, kako se mijenjaju valne funkcije sustava identičnih čestica, kao i komutacijske relacije između operatora stvaranja i poništenja. Pokazat ćemo kako se taj rezultat može dovesti u vezu s eksperimentom koji bi mogao potvrditi postojanje nekomutativnih prostora.

2. HOPFOVE ALGEBRE

U ovom poglavlju definiramo matematičke alate potrebne za nalaženje simetrije Moyalovog prostora. Prvi korak u konstrukciji nekomutativnih prostora je opisivanje običnog prostorvremena algebrom glatkih funkcija. Zato definiramo pojam algebre i koalgebre na način pogodan za takvu konstrukciju.

Definicija 1. Asocijativna **algebra** s jedinicom je vektorski prostor $\mathcal{A}$ s dva linearna preslikavanja, množenjem $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ i jedinicom $\eta : \mathbb{C} \mapsto \mathcal{A}$ koja zadovoljavaju

$$m(m \otimes \mathbb{1}) = m(\mathbb{1} \otimes m) \quad \text{(asocijativnost)},$$
$$m(\eta \otimes \mathbb{1}) = m(\mathbb{1} \otimes \eta) = id \quad \text{(postojanje identitete)}.$$

Ovdje $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ označava tenzorski produkt algebri, $\mathbb{1}$ jedinični element, a id identitetu na $\mathcal{A}$.

Njoj dualnu strukturu posjeduje koalgebra, što znači da se formalna definicija dobije okretanjem strelica u definiciji algebre i dodavanjem prefiksa *ko-* na preslikavanja.

Definicija 2. **Koalgebra** je vektorski prostor $\mathcal{A}$ s dva linearna preslikavanja, komnoženjem (koproduktom) $\Delta : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ i kojedinicom $\epsilon : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{C}$ koja zadovoljavaju

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \quad \text{(koasocijativnost)},$$
$$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id \quad \text{(postojanje identitete)}.$$

Definicija 3. **Bialgebra** $(\mathcal{A}, m, \Delta, \eta, \epsilon)$ je vektorski prostor $\mathcal{A}$ sa strukturnim preslikavanjima algebre i koalgebre koja zadovoljavaju prethodno definirana svojstva i koja su međusobno kompatibilna, tj.

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \quad \Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1},$$
$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b), \quad \epsilon(\mathbb{1}) = 1.$$

Za definiciju Hopfove algebre potreban nam je još pojam inverza u koalgebri, tzv. antipoda.

Definicija 4. **Hopfova algebra** je bialgebra s linearnim preslikavanjem $S : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ kojeg nazivamo antipodom (ili koinverzom) sa svojstvom

$$m(S \otimes id) \circ \Delta = m(id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon.$$

Iz svojstva antipoda slijedi da je antihomomorfizam, tj. $S(ab) = S(b)S(a)$, za razliku od koprodukta i kojedinice koji su homomorfizmi.

2.1. Univerzalna omotačka algebra

Jedan primjer Hopfove algebre s kojim ćemo dalje raditi je univerzalna omotačka algebra $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ Liejeve algebre $\mathcal{P}$, koja se definira kao algebra razapeta polinomima generatora $\mathcal{P}$ modulo komutacijske relacije $[X_i, X_j] = c_{ij}^{\ k} X_k$, gdje su X_i generatori $\mathcal{P}$. Ona je pogodna za rad s tenzorskim produktima te će nam omogućiti da definiramo deformaciju Poincaréove algebre. Kako bismo definirali strukturu Hopfove algebre za univerzalnu omotačku algebru, definiramo kostrukture na generatorima Liejeve algebre

$$\Delta(X_i) = X_i \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes X_i, \quad \Delta(\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}; \tag{2.1}$$
$$\epsilon(X_i) = 0, \quad \epsilon(\mathbb{1}) = 1; \tag{2.2}$$
$$S(X_i) = -X_i, \quad S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}. \tag{2.3}$$

Kostrukture definirane na ovaj način nazivaju se primitivnima. Djelovanje kostruktura prirodno se poopćuje na sve elemente $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ zahtjevima da su Δ i ϵ homomorfizmi, a S antihomomorfizam, dakle da imaju svojstva dana u definicijama bialgebre i Hopfove algebre.

Trebalo bi još provjeriti da je konstrukcija Hopfove algebre $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ dobro definirana, tj. da su kostrukture dobro definirane. Budući da se svi dokazi provode na analogan način, pokazat ćemo da je Δ dobro definiran. Zbog linearnosti $[X_i, X_j]$ vrijedi

$$\Delta([X_i, X_j]) = [X_i, X_j] \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes [X_i, X_j],$$

a zbog činjenice da je Δ homomorfizam, slijedi

$$\Delta([X_i, X_j]) = \Delta(X_i)\Delta(X_j) - \Delta(X_j)\Delta(X_i).$$

Kako bismo pokazali da su ta dva izraza jednaka, a i kako bismo ubuduće lakše računali slične izraze, uvodimo tzv. *Sweedlerovu notaciju*, koja glasi

$$\Delta(\xi) = \sum_\alpha \xi^{(1)\alpha} \otimes \xi^{(2)}_\alpha, \quad \xi \in \mathcal{P}. \tag{2.4}$$

Ova notacija pogodna je za rad s tenzorskim produktima algebri, gdje je produkt dan kao $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes bd$. Često se u izrazima oblika (2.4) podrazumijeva sumacija pa se i ne piše. Ovako konstruirana Hopfova algebra je kokomutativna, tj. vrijedi $\Delta(\xi) = \xi^{(1)} \otimes \xi^{(2)} = \xi^{(2)} \otimes \xi^{(1)}$.

3. ZAKRETANJE POINCARÉOVE ALGEBRE

Poincaréova algebra $\mathcal{P}$ dana je generatorima translacija P_μ i Lorentzovim generatorima $M_{\mu\nu}$ koji zadovoljavaju komutacijske relacije

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \qquad (3.1)\\ [P_\mu, M_{\sigma\rho}] &= i(\eta_{\sigma\mu} P_\rho - \eta_{\rho\mu} P_\sigma),\\ [M_{\mu\nu}, M_{\sigma\rho}] &= i(\eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma}). \end{aligned}$$

Djelovanje reprezentacija $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ na tenzorski produkt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ dano je primitivnim koproduktom (2.1), kojeg ćemo u ovom slučaju označavati s Δ_0 kako bi se razlikovao od deformiranog. Kako bi djelovanje koprodukta bilo dobro definirano, mora biti kompatibilno s množenjem m, tj.

$$P_\mu \triangleright m_0(f_1 \otimes f_2) = m_0 \Delta_0(P_\mu)(f_1 \otimes f_2), \tag{3.2}$$

gdje m_0 također označava nedeformirano množenje[1].

Deformaciju $\mathcal{U}(\mathcal{P})$, točnije strukturnih preslikavanja povodimo s tzv. zakretanjem (*eng.* twist) $\mathcal{F} \in \mathcal{U}(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{P})$, koji zadovoljava relacije kocikličnosti i kounitarnosti, respektivno

$$(\mathcal{F} \otimes \mathbb{1})(\Delta \otimes id)\mathcal{F} = (\mathbb{1} \otimes \mathcal{F})(id \otimes \Delta)\mathcal{F}, \tag{3.3}$$
$$(\epsilon \otimes id)\mathcal{F} = (id \otimes \epsilon)\mathcal{F} = \mathbb{1}. \tag{3.4}$$

Deformacija koprodukta dana je transformacijom sličnosti

$$\Delta_\theta(X) = \mathcal{F}\Delta_0(X)\mathcal{F}^{-1}, \tag{3.5}$$

gdje Δ_θ označava deformirani koprodukt, a X generator $\mathcal{P}$. Pri ovakvoj deformaciji, samo djelovanje generatora ostaje isto. Također, u ovom slučaju ne mijenjaju se ni kojedinica, ni antipod.

Za operator zakretanja uzimamo da je oblika

$$\mathcal{F} = \exp(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}P_\mu \otimes P_\nu). \tag{3.6}$$

Budući da generatori translacija P_μ međusobno komutiraju, koprodukt $\Delta_0(P_\mu)$ ostaje nepromijenjen, tj.

$$\Delta_0(P_\mu) = \Delta_\theta(P_\mu) = \mathbb{1} \otimes P_\mu + P_\mu \otimes \mathbb{1}. \tag{3.7}$$

Ono što se mijenja jest $\Delta_0(M_{\alpha\beta})$ pa deformirani koprodukt glasi

$$\Delta_\theta(M_{\alpha\beta}) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}P_\mu\otimes P_\nu}\Delta_0(M_{\alpha\beta})e^{\frac{-i}{2}\theta^{\mu\nu}P_\mu\otimes P_\nu}. \tag{3.8}$$

Kako bismo to izračunali, koristimo BCH lemu $e^A B e^{-A} = \sum\limits_n \frac{1}{n!}\underbrace{[A,[A,...[A,B]]}_{n}$, iz čega slijedi

$$\Delta_\theta(M_{\alpha\beta}) = M_{\alpha\beta} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes M_{\alpha\beta} \tag{3.9}$$
$$-\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}\left[(\eta_{\mu\alpha}P_\beta - \eta_{\mu\beta}P_\alpha) \otimes P_\nu + P_\mu \otimes (\eta_{\nu\alpha}P_\beta - \eta_{\nu\beta}P_\alpha)\right].$$

Vrijedi napomenuti da deformirana koalgebra u ovom slučaju više nije kokomutativna.

3.1. ⋆-produkt

Uzmimo da nedeformirana Poincaréova algebra $\mathcal{P}$ ima reprezentaciju na komutativnoj algebri glatkih funkcija $\mathcal{A}_0$, u kojoj je produkt dan kao produkt po točkama

$$m(f(x) \otimes g(x)) = f(x)g(x) = (fg)(x). \tag{3.10}$$

[1] Ovdje $\triangleright$ simbolizira tzv. lijevo djelovanje algebre $\mathcal{A}_0$ na vektorski prostor funkcija V. Formalno je definirano kao linearno preslikavanje $\mathcal{A}_0 \otimes V \to V$, takvo da $(a_1a_2)\triangleright f = a_1 \triangleright (a_2 \triangleright f)$ i $\mathbb{1} \triangleright f = f$, $a_1, a_2 \in \mathcal{A}_0$, $f \in V$.

Reprezentacija Poincaréove algebre na $\mathcal{A}$ dana je djelovanjem generatora kao

$$P_\mu \triangleright f(x) = i\partial_\mu f(x),$$
$$M_{\mu\nu} \triangleright f(x) = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)f(x). \tag{3.11}$$

Spomenuli smo već da je djelovanje Hopfove algebre na tenzorski produkt algebri $\mathcal{A}$ dano s koproduktom

$$m \circ (\Delta_0(\xi) \triangleright (f \otimes g)) = m(\xi^{(1)} \triangleright f \otimes \xi^{(2)} \triangleright g) \tag{3.12}$$

U slučaju deformirane algebre $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ koristimo deformirani koprodukt i kako bi djelovanje na $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ bilo konzistentno, sam produkt funkcija mora se promijeniti. Uvodimo tzv. ⋆-produkt

$$m_\theta(f(x) \otimes g(x)) \equiv f \star g = m \circ \mathcal{F}^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(x)). \tag{3.13}$$

Time dobivamo nekomutativnu algebru funkcija koju ćemo označavati s $\mathcal{A}_\theta$.

Pogledajmo sada kako izgleda komutator koordinata koristeći prethodnu formulu

$$m_\theta(x_\mu \otimes x_\nu) = x_\mu \star x_\nu = m \circ \left(e^{\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\otimes\partial_\beta}(x_\mu \otimes x_\nu)\right)$$
$$= m \circ (x_\mu \otimes x_\nu + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\mu} \otimes \eta_{\beta\nu})$$
$$= x_\mu x_\nu + \frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}; \tag{3.14}$$
$$m_\theta(x_\nu \otimes x_\nu) = x_\nu \star x_\mu = x_\mu x_\nu + \frac{i}{2}\theta_{\nu\mu}; \tag{3.15}$$

iz čega, zbog antisimetričnost tenzora θ, slijedi

$$[x_\mu, x_\nu]_\star = i\theta_{\mu\nu}, \tag{3.16}$$

što i jest Moyalova zagrada s kojom smo krenuli. Dakle, algebre $\mathcal{A}_0$ i $\mathcal{A}_\theta$ su izomorfne.

3.2. Teorija polja i reprezentacije deformirane Poincaréove algebre

Uspoređujući (1.2) i (3.16) vidimo da nekomutativnu teoriju možemo izgraditi redefinirajući produkt funkcija tako da bude kompatibilan s deformiranim koproduktom. Kvantna teorija polja dobivena na taj način je invarijantna na deformiranu Poincaréovu algebru. Kako bismo to provjerili, uzmimo za primjer funkciju $f_{\rho\sigma} = x_\rho x_\sigma$ i usporedimo djelovanje nedeformiranih i deformiranih Lorentzovih generatora na f. U nedeformiranom slučaju imamo

$$M_{\mu\nu} \triangleright f_{\rho\sigma} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)f_{\rho\sigma}$$
$$= i(f_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - f_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho} + f_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma} - f_{\rho\mu}\eta_{\nu\sigma}), \tag{3.17}$$

što je odlika općenitog Lorentzovog tenzora ranga dva. U deformiranom slučaju za funkciju oblika $f_{\rho\sigma} = x_\rho \star x_\sigma$ ne dobijemo isti izraz, što i nije neočekivano. No, za simetrizirani oblik $f^\theta_{\rho\sigma} = x_{(\rho} \star x_{\sigma)} = \frac{1}{2}(x_\rho \star x_\sigma + x_\sigma \star x_\rho)$ dobije se prethodni oblik

$$M^\theta_{\mu\nu} f^\theta_{\rho\sigma} = m_\theta \circ \left(\Delta_\theta(M_{\mu\nu}) \left(\frac{1}{2}(x_\rho \otimes x_\sigma + x_\sigma \otimes x_\rho) \right) \right)$$
$$= i(f^\theta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - f^\theta_{\nu\sigma}\eta_{\mu\rho} + f^\theta_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma} - f^\theta_{\rho\mu}\eta_{\nu\sigma}), \tag{3.18}$$

čime smo potvrdili kovarijantnost s obzirom na deformiranu Poncaréovu algebru. Ovaj argument vrijedi za bilo koji simetrizirani tenzor izgrađen od $\star$-produkata koordinata. Primjerice, pomnožimo li prethodnu relaciju s $\eta^{\rho\sigma}$, dobijemo da je dužina Minkowskog $x_\mu \star x^\mu$ invarijantna na djelovanje $M^\theta_{\mu\nu}$.

Uz to, radi konzistentnosti, možemo provjeriti invarijantnost tenzora $\theta_{\rho\sigma}$ na djelovanje $M^\theta_{\mu\nu}$ tako da izračunamo $M^\theta_{\mu\nu}([x_\rho, x_\sigma]_\star)$ koristeći (3.9)

$$M^\theta_{\mu\nu}([x_\rho, x_\sigma]_\star) = ([x_\mu, x_\sigma]_\star - i\theta_{\mu\sigma})\eta_{\nu\rho}$$
$$-([x_\nu, x_\sigma]_\star - i\theta_{\nu\sigma})\eta_{\mu\rho} - ([x_\mu, x_\rho]_\star - i\theta_{\mu\rho})\eta_{\nu\sigma}$$
$$+([x_\nu, x_\rho]_\star - i\theta_{\nu\rho})\eta_{\mu\sigma} = 0. \tag{3.19}$$

Budući da je $\theta_{\rho\sigma} = -i[x_\rho, x_\sigma]_\star$, slijedi $M^\theta_{\mu\nu}(\theta_{\rho\sigma}) = 0$, tj. slijedi da je $\theta_{\rho\sigma}$ invarijantan na deformiranu Poincaréovu algebru.

Iz ovoga možemo zaključiti da bismo zamjenom svih produkata polja u Lagrangijanu koji opisuje komutativnu teoriju sa $\star$-produktom polja dobili odgovarajuću teoriju na nekomutativnom prostoru. Važan zaključak ove rasprave je da se reprezentacije Poncaréove algebre nisu promijenile prilikom deformacije. Komutativna teorija ima Casimirove operatore P^2 i W^2, gdje je $W_\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}M^{\beta\gamma}P^\delta$ tzv. Pauli-Ljubanski operator. Budući da je zakretanje dano kao eksponent operatora translacije, odmah vidimo da se P^2 ne mijenja, a za W_α pogledajmo izraz (3.9). Vidimo da bi dodatni članovi nastali zbog deformacije imali produkt tipa $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}P_\alpha P_\beta$, što iščezava jer operatori translacije komutiraju međusobno, odnosno, njihov produkt je simetričan na zamjenu indeksa, a Levi-Civita tenzor je antisimetričan. Reprezentacije u nekomutativnom slučaju će također biti labelirane svojstvenim vrijednostima Casimirovih operatora, m^2 i $m^2 s(s+1)$, respektivno.

4. DEFORMIRANE ČESTIČNE STATISTIKE

U ovom poglavlju pokazat ćemo kako deformiranje koprodukta povlači deformiranje statistika za kvantni sustav n čestica i za kvantnu teoriju polja.

4.1. Kvantna mehanika

Radi jednostavnosti radimo s dvočestičnim sustavom. Valna funkcija dvije čestice u slučaju $\theta_{\mu\nu} = 0$ je tenzorski produkt jednočestičnih valnih funkcija, tj. živi u $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_0$, gdje je $\mathcal{A}_0$ već spomenuta algebra glatkih funkcija s produktom po točkama. Lorentzove transformacije $\mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_0$ uvode se preko primitivnog koprodukta Δ_0. U nekomutativnom slučaju valna funkcija je element $\mathcal{A}_\theta \otimes \mathcal{A}_\theta$ i transformira se preko deformiranog koprodukta Δ_θ.

Uobičajeno u fizici radimo sa simetričnim (bozoni) ili antisimetričnim (fermioni) valnim funkcijama

$$\phi \otimes_S \chi = \frac{1}{2}(\phi \otimes \chi + \chi \otimes \phi), \tag{4.1}$$
$$\phi \otimes_A \chi = \frac{1}{2}(\phi \otimes \chi - \chi \otimes \phi), \tag{4.2}$$

koje zadovoljavaju

$$\phi \otimes_S \chi = +\chi \otimes_S \phi, \tag{4.3}$$
$$\phi \otimes_A \chi = -\chi \otimes_A \phi \tag{4.4}$$

U Lorentz invarijantnoj teoriji, statistike moraju biti jednake u bilo kojem referentnom sustavu. Matematički iskaz toga je da simetrizacija, odnosno, antisimetrizacija moraju komutirati s Lorentzovim transformacijama.

U slučaju deformiranog koprodukta, očekivano nećemo imati takvo slaganje. Kako bismo to vidjeli, pišemo $\mathcal{F}$ i $\mathcal{F}^{-1}$ u Sweedlerovoj notaciji

$$\mathcal{F} = \sum_\alpha f^{(1)\alpha} \otimes f^{(2)}_\alpha, \quad \mathcal{F}^{-1} = \sum_\alpha \tilde{f}^{(1)\alpha} \otimes \tilde{f}^{(2)}_\alpha, \tag{4.5}$$

tako da

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} = \sum_{\alpha,\beta} f^{(1)\alpha}\tilde{f}^{(1)\beta} \otimes f^{(2)}_\alpha \tilde{f}^{(2)}_\beta \tag{4.6}$$

Djelovanje Lorentzovih transformacija na jednočestična stanja definira se sa

$$\Lambda \triangleright \phi = \rho(\Lambda) \triangleright \phi, \tag{4.7}$$

gdje je ρ reprezentacija Lorentzove algebre na prostoru funkcija $\mathcal{A}_\theta$. Nadalje, djelovanje Lorentzove transformacije na dvočestično stanje, tj. na tenzorski produkt dva jednočestična stanja realizirano je putem koprodukta na sljedeći način

$$\Lambda \triangleright (\phi \otimes \chi) = (\rho \otimes \rho)\Delta(\Lambda)(\phi \otimes \chi). \tag{4.8}$$

Dakle, pomoću koprodukta ta se definicija djelovanja proširuje na dvočestična i općenito na n-čestična stanja. Lorentzova transformacija u deformiranom slučaju tada glasi

$$\Lambda : \phi \otimes \chi \to (\rho \otimes \rho)\Delta(\Lambda)_\theta(\phi \otimes \chi)$$
$$= \sum_{\alpha,\beta} \rho(f^{(1)\alpha}\Lambda\tilde{f}^{(1)\beta})\phi \otimes \rho(f^{(2)}_\alpha \Lambda \tilde{f}^{(2)}_\beta)\chi \tag{4.9}$$

Provodeći simetrizaciju/antisimetrizaciju prethodnog izraza, dobivamo

$$\sum_{\alpha,\beta}\rho(f^{(1)\alpha}\Lambda\tilde{f}^{(1)\beta})\phi\otimes\rho(f^{(2)}_{\alpha}\Lambda\tilde{f}^{(2)}_{\beta})\chi$$
$$\pm\rho(f^{(2)\alpha}\Lambda\tilde{f}^{(2)\beta})\chi\otimes\rho(f^{(1)}_{\alpha}\Lambda\tilde{f}^{(1)}_{\beta})\phi, \tag{4.10}$$

dok s druge strane imamo

$$(\rho\otimes\rho)\Delta(\Lambda)_\theta(\phi\otimes_{S,A}\chi)$$
$$=\sum_{\alpha,\beta}\rho(f^{(1)\alpha}\Lambda\tilde{f}^{(1)\beta})\phi\otimes\rho(f^{(2)}_{\alpha}\Lambda\tilde{f}^{(2)}_{\beta})\chi$$
$$\pm\rho(f^{(1)\alpha}\Lambda\tilde{f}^{(1)\beta})\chi\otimes\rho(f^{(2)}_{\alpha}\Lambda\tilde{f}^{(2)}_{\beta})\phi. \tag{4.11}$$

Vidimo da se prethodna dva izraza ne poklapaju, što je posljedica toga da deformirani koprodukt nije kokomutativan.

Postoji i drugačiji način za prikazati ovo neslaganje. Definiramo operator zamjene τ_0 kao

$$\tau_0(\phi\otimes\chi)=\chi\otimes\phi. \tag{4.12}$$

U kvantnoj mehanici na ravnom prostoru taj operator komutira sa svim ostalim opservablama, što implicira da nijedan operator u Hilbertovom prostoru ne može promijeniti statistiku. Hilbertov prostor tada možemo izgraditi od elemenata oblika

$$\left(\frac{1\pm\tau_0}{2}\right)\phi\otimes\chi. \tag{4.13}$$

Iz relacija (4.10) i (4.11) slijedi da

$$\tau_0\Delta_\theta\neq\Delta_\theta\tau_0. \tag{4.14}$$

Logičan sljedeći korak je da deformiramo i operator τ_0 kako bi bio kompatibilan s deformiranim koproduktom, tj. kako bi čestične statistike bile kompatibilne s deformiranom Poincaréovom invarijantnošću. Definiramo deformirani operator zamjene koji komutira s deformiranim koproduktom

$$\tau_\theta=\mathcal{F}\tau_0\mathcal{F}^{-1},\quad \tau_\theta^2=\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}. \tag{4.15}$$

U skladu s time, definiramo stanja koja razapinju invarijantne podprostore dvočestičnog Hilbertovog prostora, koji respektivno opisuju generalizirane bozone, odnosno, fermione. Ta stanja poštuju deformirane čestične statistike

$$\phi\otimes_{S_\theta}\chi=\left(\frac{1+\tau_\theta}{2}\right)\phi\otimes\chi,\ \phi\otimes_{A_\theta}\chi=\left(\frac{1-\tau_\theta}{2}\right)\phi\otimes\chi. \tag{4.16}$$

Promotrimo slučaj čestica opisanih ravnim valovima $e_p(x)=e^{-ip\cdot x}$ i pronađimo kako izgledaju deformirane statistike.

Prvo izračunajmo par korisnih relacija

$$e^{-iP_\mu}e^{-ip\cdot x}=\sum_n\frac{(-1)^n}{n!}(\partial^\mu)^n e^{-ip\cdot x}$$
$$=\sum_n\frac{(-1)^n}{n!}(-ip_\mu)^n e^{-ip\cdot x}=e^{ip_\mu}e^{-ip\cdot x}; \tag{4.17}$$
$$\tau_0\mathcal{F}^{-1}(f\otimes g)=\tau_0\left(e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}P_\mu\otimes P_\nu}(f\otimes g)\right)$$
$$=e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}P_\nu\otimes P_\mu}(g\otimes f)=e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}P_\mu\otimes P_\nu}(g\otimes f)$$
$$=\mathcal{F}\tau_0(f\otimes g)\Rightarrow\tau_0\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}\tau_0. \tag{4.18}$$

Iz zadnje relacije slijedi svojstvo $\tau_\theta=\mathcal{F}\tau_0\mathcal{F}^{-1}=\mathcal{F}^2\tau_0$. Sada možemo izračunati fazu pri zamjeni jednočestičnih valnih funkcija u ukupnoj valnoj funkciji, dakle računamo izraze oblika

$$\left(\frac{1\pm\tau_\theta}{2}\right)(e_p\otimes e_q), \tag{4.19}$$

koristeći prethodno dobivene relacije. Rezultat koji se dobije glasi

$$(e_p\otimes_{S_\theta,A_\theta}e_q)=\pm e^{-i\theta^{\mu\nu}p_\mu q_\nu}(e_q\otimes_{S_\theta,A_\theta}e_p), \tag{4.20}$$

što se reducira na poznati slučaj kada $\theta^{\mu\nu}\to 0$.

4.2. Statistika kvantnih polja

Kvantno polje izvrijednjeno u točki prostorvremena daje operator koji djeluje na Hilbertovom prostoru. Ako polje u točki x_1 djeluje na vakuum, dat će jednočestično stanje centrirano oko točke x_1. Analogno tome tenzorski produkt dva polja $\Phi(x_1)\Phi(x_2)$ djelovanjem na vakuum daje dvočestično stanje s jednom česticom centriranom oko x_1, a drugom oko x_2.

Ako uzmemo da je a_p operator poništenja, po analogiji sa standardnom teorijom polja očekujemo da vrijedi

$$\langle 0|\Phi^-(x)a_p^\dagger|0\rangle=e_p, \tag{4.21}$$
$$\frac{1}{2}\langle 0|\Phi^-(x_1)\Phi^-(x_2)a_q^\dagger a_p^\dagger|0\rangle=\left(\frac{1\pm\tau_\theta}{2}\right)(e_p\otimes e_q)(x_1,x_2)$$
$$=(e_p\otimes_{S_\theta,A_\theta}e_q), \tag{4.22}$$

qdje smo koristili standardni rastav polja po modovima, a $\Phi^-(x)$ označava samo modove uz operator poništenja. Također primijetimo drugačiji poredak impulsa p i q s lijeve i desne strane jednakosti (4.22), što predstavlja konvenciju za uspostavljanje veze između operatora stvaranja i poništenja i jednočestičnih stanja.

U ovom formalizmu mijenjaju se komutacijske relacije operatora stvaranja i poništenja. Koristeći opet relaciju (4.22), slijedi za stanja labelirana impulsom

$$|p,q\rangle_{S_\theta,A_\theta}=\pm e^{i\theta^{\mu\nu}p_\mu q_\nu}|q,p\rangle_{S_\theta,A_\theta}, \tag{4.23}$$

što povlači komutacijske relacije

$$a_p^\dagger a_q^\dagger=\pm e^{i\theta^{\mu\nu}p_\mu q_\nu}a_q^\dagger a_p^\dagger, \tag{4.24}$$
$$a_p a_q=\pm e^{i\theta^{\mu\nu}p_\mu q_\nu}a_q a_p. \tag{4.25}$$

Statistika kvantnih polja inducirana prethodnim relacijama tada glasi

$$\Phi^{-}(x_1)\Phi^{-}(x_2) = \pm e^{-i\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_1^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x_2^{\nu}}}\Phi^{-}(x_2)\Phi^{-}(x_1). \quad (4.26)$$

Bilo koja kvantizacija treba biti kompatibilna s prethodno dobivenom statistikom, odnosno, treba biti kompatibilna s deformiranom Poincaréovom invarijantnošću.

5. NE-PAULIJEVI PRIJELAZI NA NEKOMUTATIVNOM PROSTORU

Na temelju prethodnog poglavlja, opravdano je preispitati principe lokalne teorije polja, kao što je na primjer teorem o spinu i statistici i fizikalne implikacije koje on ima. Konkretno, možemo tražiti atomske ili nuklearne prijelaze koji bi na komutativnom prostoru bili zabranjeni Paulijevim principom isključenja.

Matematička arena na kojoj se tipično provode ovi računi nije Moyalov prostor, budući da on ne posjeduje sfernu simetriju koju imaju atomski i nuklearni procesi pa se račun brzo zakomplicira. Umjesto toga, radimo s algebrom koordinata prostorvremena koja se označava s $\mathcal{B}_{\chi\vec{n}}$ i dana je komutacijskim relacijama

$$\begin{aligned} [\hat{x}_0, \hat{x}_i] &= i\chi\epsilon_{ijk}n_j\hat{x}_k, \\ [x_i, x_j] &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdje i, j, k označavaju prostorne koordinate, x_0 je vremenska koordinata, $\chi \in \mathbb{R}$, a $\vec{n}$ je fiksni trodimenzionalni vektor.

Hopfovu algebru koja predstavlja simetriju ovog prostora opet nalazimo sličnom procedurom, ovaj put deformirajući koprodukt grupne algebre[2] Poincaréove grupe $\mathbb{C}\mathcal{P}$ zakretanjem oblika

$$G_{\chi\vec{n}} = e^{\frac{i}{2}\chi(P_0\otimes\vec{n}\cdot\vec{J} - \vec{n}\cdot\vec{J}\otimes P_0)}, \quad (5.2)$$

gdje je operator P_0 operator vremenske translacije, a operatori J_i operatori rotacije. Provodimo istu proceduru deformacije kao i u prethodnim poglavljima, iz čega se dobije novi koprodukt i novi operator zamjene. Zakrenuta antisimetrizacija inducira ovisnost svojstvenih stanja Hamiltonijana elektrona (nukleona) o $\chi\vec{n}$, što korigira vremena života atomskih (nuklearnih) procesa. Očekuje se da se te korekcije odvijaju na jako dugim vremenskim skalama, tj. proporcionalno s χ^{-2}, a χ je reda Planckove duljine.

Ono što dovodi do zabranjenih prijelaza je činjenica da se ti procesi odvijaju na Zemlji koja je rotirajući neinercijalni sustav. U usporedbi s vremenskim skalama na kojima se manifestiraju korekcije koje dolaze od nekomutativnosti, rotacija Zemlje je trenutni proces koji rezultira promjenom osi rotacije generatora J_i, tj. $\vec{m}(t) = R(t)\vec{n}$, gdje je $R(t) \in SO(3)$ vremenski ovisna matrica rotacije. Ono što se događa jest da se pri toj trenutnoj rotaciji ne mijenjaju svojstvena stanja $\tau_{\chi\vec{n}}$, ali ona sada nisu svojstvena stanja novog operatora $\tau_{\chi\vec{m}(t)}$. Razvoj starih stanja po novima daje doprinose i simetričnih i antisimetričnih svojstvenih stanja novog operatora zamjene.

Konkretno, na primjeru berilija koji ima 4 valentna elektrona, od kojih s 2 u osnovnom stanju, a 2 u pobuđenom, jedan iz pobuđenog stanja može prijeći u osnovno stanje, što bi u komutativnom prostoru bio zabranjen prijelaz, ali zbog prethodnog argumenta više nije zabranjen jer stanja pobuđenog elektrona i elektrona u osnovnom stanju neće biti ortogonalna. Dobije se da je omjer grananja (*eng.* branching ratio) zabranjenog i dozvoljenog procesa

$$B_\chi = \frac{1}{3}[5 + \cos(\chi E_1)]\sin^2(\frac{\chi}{4}\Delta E), \quad (5.3)$$

gdje je E_1 energija osnovnog stanja, a ΔE razlika energija pobuđenog i osnovnog stanja.

Postoji nekoliko eksperimenata koji se bave nalaženjem zabranjenih prijelaza ovog tipa čiji rezultati daju granice na prostorne i energetske skale. Rezultati nekih od tih eksperimenata nalaze se u tablici (1).

Slika 1. Granice na nekomutativni parametar χ. Preuzeto iz [7].

Experiment	Type	Bound on χ (Length scales)	Bound on χ (Energy scales)
Borexino	Nuclear	$\lesssim 10^{-43}$ m	$\gtrsim 10^{24}$ TeV
Kamiokande	Nuclear	10^{-42} m	10^{23} TeV
NEMO	Atomic	10^{-12} m	10^{5} eV
NEMO-2	Nuclear	10^{-41} m	10^{22} TeV
Maryland	Atomic	10^{-20} m	10 TeV
VIP	Atomic	10^{-21} m	100 TeV

Vidimo iz tablice da su energijske skale mnogo veće od Planckove energije. Također, vremena na kojima se očituju ne-Paulijevi prijelazi su puno dulja od starosti svemira, što opravdava omjere grananja reda veličine $10^{-58} - 10^{-55}$.

6. ZAKLJUČAK

U ovom radu pokušali smo motivirati nekomutativne prostore kao prikladan opis strukture prostorvremena na Planckovoj skali. Konstruirali smo simetriju za jednu vrstu nekomutativnog prostora, tzv. Moyalov prostor, deformirajući Poincaréovu algebru koristeći formalizam Hopfove algebre. Pokazali smo da ireducibilne reprezentacije ostaju iste, što opravdava eksperimentalno potvrđene rezultate koji su dobiveni ne uzimajući u obzir lom Lorentzove simetrije. Vidjeli smo da deformirana

[2] Grupna algebra lokalno kompaktne grupe može se konstruirati pomoću kontinuiranih funkcija s kompaktnim nosačem i produktom koji je dan konvolucijom tih funkcija.

Poncaréova algebra rezultira drugačijim statistikama sustava identičnih čestica, što je posljedica zahtjeva da se statistika ne mijenja prelaskom u drugi inercijalni sustav. Činjenica da se mijenjaju oblici simetričnih i antisimetričnih stanja rezultira u postojanju onoga što bismo do sada smatrali zabranjenim atomskim ili nuklearnim prijelazima. Na kraju smo izložili rezultate eksperimenata koji su dali osjećaj za skale na kojima se odvijaju ovakvi procesi, što objašnjava činjenicu da ih u uobičajenim eksperimentima ne opažamo.

LITERATURA

[1] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, "The Quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields," Commun. Math. Phys. **172** (1995) 187 [hep-th/0303037].

[2] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, "Noncommutative field theory," Rev. Mod. Phys. **73** (2001) 977 [hep-th/0106048].

[3] R. J. Szabo, "Quantum field theory on noncommutative spaces," Phys. Rept. **378** (2003) 207 [hep-th/0109162].

[4] P. Aschieri, "Lectures on Hopf Algebras, Quantum Groups and Twists," hep-th/0703013 [HEP-TH].

[5] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima and A. Tureanu, "On a Lorentz-invariant interpretation of noncommutative space-time and its implications on noncommutative QFT," Phys. Lett. B **604** (2004) 98 [hep-th/0408069].

[6] A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, G. Mangano, A. Pinzul, B. A. Qureshi and S. Vaidya, "Statistics and UV-IR mixing with twisted Poincare invariance," Phys. Rev. D **75** (2007) 045009 [hep-th/0608179].

[7] A. P. Balachandran and P. Padmanabhan, "Non-Pauli Effects from Noncommutative Spacetimes," JHEP **1012** (2010) 001 [arXiv:1006.1185 [hep-th]].

[8] A. P. Balachandran, A. Joseph and P. Padmanabhan, "Non-Pauli Transitions From Spacetime Noncommutativity," Phys. Rev. Lett. **105** (2010) 051601 [arXiv:1003.2250 [hep-th]].

[9] M. Chaichian and A. P. Demichev, "Introduction to quantum groups," Singapore, Singapore: World Scientific (1996) 343 p

[10] H. Grosse and R. Wulkenhaar, "Self-Dual Noncommutative ϕ^4 -Theory in Four Dimensions is a Non-Perturbatively Solvable and Non-Trivial Quantum Field Theory," Commun. Math. Phys. **329** (2014) 1069 [arXiv:1205.0465 [math-ph]].

[11] A. Ballesteros and F. Mercati, "Extended noncommutative Minkowski spacetimes and hybrid gauge symmetries," Eur. Phys. J. C **78** (2018) no.8, 615 [arXiv:1805.07099 [hep-th]].