Gravitacija kao relativistička teorija polja

Jelena Filipović
Fizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu

19. siječnja 2019.

Sažetak

Specijalna relativistička teorija polja javlja se, zahvaljujući svojim uspjesima u objašnjavanju elektroslabih i jakih interakcija, kao zanimljiv kandidat za opisivanje gravitacijskog međudjelovanja. U ovom smo seminaru na njezinu temelju, uz korištenje rezultata eksperimenata vezanih za gravitaciju, izveli Hilbert-Einsteinovu jednadžbu.

Sadržaj

I Uvod

Opća teorija relativnosti, koju je Albert Einstein objavio 1916. godine u članku Osnove opće teorije relativnosti, pruža opis gravitacije kao geometrijskog svojstva prostora i vremena. Takva geometrijska predodžba međudjelovanja je u temelju različita od one koja se javlja u specijalnoj relativističkoj teoriji polja, koja prikazuje jaka i elektroslaba međudjelovanja kao izmjenu kvanata među poljima. No, želja za unifikacijom sila rezultirala je pokušajima interpretacije gravitacije kao specijalne relativističke teorije polja. Važne doprinose tome dali su Deser i Feynman [1] u svojim predavanjima o gravitaciji. U seminaru ćemo se ponajviše služiti raspravom T. Ortina koja je dana referencom [4].

Općenito o gravitonu

Graviton je čestica koja prenosi gravitacijsku interakciju. Dugodosežnost gravitacijske interakcije implicira da je graviton bezmaseno polje. Nadalje, spin gravitona je cjelobrojan jer je interakcija statička i paran zbog toga što u gravitaciji nema odbojne interakcije. Eksperimentalno opaženo zakretanje svjetlosti kraj zvijezda onemogućuje da je graviton polje spina nula. Naime, propagator spina 0 bezmasene čestice je proporcionalan s k^{-2} i jedino vezanje mu je $T^{\mu}_{\mu}k^{-2}T^{\nu}_{\nu}$. Međutim, u elektromagnetizmu vrijedi $T^{\mu}_{\mu} = 0$. To znači da nema međudjelovanja između bezmasene čestice brzine svjetlosti i bezmasenog gravitona, a to nije u skladu s ogibom svjetlosti kraj zvijezda. Dakle, najmalji spin koji graviton može imati je spin 2. Prije nego što nastavimo s daljnjom raspravom o čestici spina 2, proučit ćemo kako se baždarne simetrije, identiteti i očuvane struje ponašaju na jednostavnijem primjeru spin-1 polja.

II Elektromagnetizam kao specijalna relativistička teorija polja spina 1

Čestica spina 1 opisana je vektorskim poljem A_μ. Najjednostavnija valna jednadžba koju takvo bezmaseno polje može zadovoljavati je oblika $\partial^2 A^\mu = 0$ [1]. Ako bezmasenu slobodnu teoriju želimo vezati na materiju, to opisujemo jednadžbom

$$\partial^2 A^\mu = j^\mu, \tag{1}$$

pri čemu je j^μ vektorska struja. Međutim, gustoća energije nije pozitivno definitna zbog nefizikalnih stanja koja dolaze od viška komponenata polja A_μ. Bolje rečeno, polje A_μ ima četiri komponente od kojih samo dvije opisuju stanja heliciteta. Neželjena stanja možemo ukloniti zadavanjem tzv. Lorentzovog uvjeta $\partial_\mu A^\mu = 0$, koji zajedno s (1) daje očuvanje struje

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{2}$$

[1] $\partial^2 = \partial_\mu \partial^\mu$, $\mu =0, 1, 2, 3$

Voljeli bismo konstruirati lagranžijan takav da iz jednadžbi gibanja, koje su oblika

$$D^\mu(A) = j^\mu, \tag{3}$$

slijedi očuvanje struje, odnosno

$$\partial_\mu D^\mu(A) = 0. \tag{4}$$

Jednadžba (4) bi tada predstavljala baždarni identitet iz kojeg slijedi Lorentzov uvjet. Najopćenitiji Lorentz-invarijantni lagranžijan s kvadratnim članovima ∂A je

$$\mathcal{L} = \alpha \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \beta \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \tag{5}$$

čija jednadžba gibanja glasi

$$D^\nu(A) = \alpha \partial^2 A^\nu + \beta \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0. \tag{6}$$

Kad izraz (6) uvrstimo u baždarni uvjet (4), dobijemo $\alpha = -\beta$. Lagranžijan (5) time postaje

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{7}$$

gdje je $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ te vrijedi $D^\nu = \partial_\mu F^{\mu\nu}$. Iz baždarne invarijantnosti slijedi

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\nu} - \partial_\mu \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu A_\nu)}\right]\delta A_\nu \\ &= \partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu \sim \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}\Lambda.\end{aligned} \tag{8}$$

Prva jednakost je rezultat općenite varijacije lagranžijana s obzirom na polje A_ν. Relacija u drugom redu dolazi od toga što ako δA_ν uzmemo kao baždarnu transformaciju, onda varijacija lagranžijana s obzirom na nju mora biti proporcionalna baždarnom identitetu $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu}$ do na površinske članove. Integracija daje izraz

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda. \tag{9}$$

Posljednja jednakost predstavlja baždarnu transformaciju polja A_μ.

Vezanje na materiju

Slobodni lagranžijan koji opisuje materiju i bezmaseno polje spina 1 ima sljedeći oblik

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{10}$$

Jednadžbe gibanja su

$$\partial^2 \phi = 0, \tag{11}$$
$$\partial^2 \phi^* = 0, \tag{12}$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{13}$$

Lagranžijan (10) je invarijantan na sljedeće transformacije polja

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \tag{14}$$
$$\delta \phi = ie\lambda\phi. \tag{15}$$

Varijacija lagranžijana (10) s obzirom na parametar λ je dana izrazom

$$\begin{aligned}\delta_\lambda \mathcal{L}_0 &= -\frac{ie}{2}\partial_\mu \lambda \left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*\right) \\ &= e\lambda \partial_\mu j^\mu_{(0)},\end{aligned} \tag{16}$$

pri čemu je $j^\mu_{(0)}$ Noetherina struja vezana uz parametar λ

$$j^\mu_{(0)} = -\frac{i}{2}\left(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial_\mu \phi\right). \tag{17}$$

Za struju $j^\mu_{(0)}$ vrijedi zakon očuvana jer iz jednadžbi (11) i (12) slijedi $\partial_\mu j^\mu_{(0)} = 0$. Međutim, $j^\mu_{(0)}$ očigledno nije izvor za $F^{\mu\nu}$. Stoga ćemo lagranžijanu (10) dodati član vezanja $\mathcal{L} \sim eA_\mu j^\mu_{(0)}$ jer on reproducira Maxwellovu jednadžbu $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -ej^\nu_{(0)}$:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + eA_\mu j^\mu_{(0)}. \tag{18}$$

Jednadžbe gibanja sada postaju

$$\partial^2 \phi + ie\partial_\mu A^\mu \phi + 2ieA_\mu \partial^\mu \phi = 0, \tag{19}$$
$$\partial^2 \phi^* - ie\partial_\mu A^\mu \phi^* - 2ieA_\mu \partial^\mu \phi^* = 0, \tag{20}$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -ej^\nu_{(0)}. \tag{21}$$

No, javlja se problem da za struju $j^\mu_{(0)}$ više ne vrijedi zakon očuvanja:

$$0 = \partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = -e\partial_\mu j^\mu_{(0)} \neq 0! \tag{22}$$

Razlog tome je to da $j^\mu_{(0)}$ predstavlja Noetherinu struju lagranžijana (10), a ne lagranžijana (18). Očuvana struja lagranžijana (18), s obzirom na parametar λ, dana je izrazom $j^\mu_{(1)} = j^\mu_{(0)} + eA_\mu \phi^* \phi$. Problem nekonzistentnosti ćemo pokušati riješiti Noetherinom metodom.

Noetherina metoda

Noetherina metoda je iterativan način pronalaska novih Noetherinih struja. Cilj nam je iz slobodne akcije $S_0 = \int d^4x \mathcal{L}_0$, invarijantne na početne transformacije $\delta_0 \varphi$, dobiti novu akciju

$$S = \int d^4x(\mathcal{L}_0 + \varepsilon\mathcal{L}_1 + \varepsilon^2\mathcal{L}_2 ...) \tag{23}$$

i nova pravila transformacije

$$\delta\varphi = \delta_0\varphi + \varepsilon\delta_1\varphi + \varepsilon^2\delta_2\varphi ..., \tag{24}$$

takva da je akcija (23) invarijantna na transformaciju (24), pri čemu je ε parametar deformacije.

Noetherinu metodu ćemo pobliže prikazati na problemu vezanja u elektromagnetizmu, opisanom u prethodnom poglavlju. Najprije ćemo izjednačiti parametre transformacija danih u izrazima (14) i (15) $\lambda = \Lambda$ te ćemo ih smatrati lokalnima $\Lambda = \Lambda(x)$:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \tag{25}$$

$$\delta\phi = ie\Lambda\phi. \tag{26}$$

Za lagranžijan (10) sada vrijedi

$$\delta\mathcal{L}_0 = -e\partial_\mu\Lambda j^\mu_{(0)} \neq 0, \tag{27}$$

pa ćemo mu dodati član $\mathcal{L} \sim eA_\mu j^\mu_{(0)}$. Varijacijom novog lagranžijana dobivamo

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_1 = &-e\partial_\mu\Lambda j^\mu_{(0)} + e\partial_\mu\Lambda j^\mu_{(0)} \\ &- e^2\partial_\mu\Lambda A^\mu\phi^*\phi \neq 0.\end{aligned} \tag{28}$$

Kako nam varijacija lagranžijana još uvijek ne iščezava, dodat ćemo član $\mathcal{L} \sim \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu \phi^*\phi$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 = &\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &+ eA_\mu j^\mu_{(0)} + \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu\phi^*\phi.\end{aligned} \tag{29}$$

Taj član poništava preostali dio u varijaciji lagranžijana (28):

$$\delta\mathcal{L}_1 = -e^2\partial_\mu\Lambda A^\mu\phi^*\phi + e^2\partial_\mu\Lambda A^\mu\phi^*\phi = 0. \tag{30}$$

Time smo došli do željenog rezultata.

III Slobodno gravitacijsko polje spina 2

Dosad smo zaključili da graviton mora biti bezmaseno polje te da mu najmanji iznos spina može biti 2. Iz teorije reprezentacije se vidi da graviton mora biti simetričan Lorentzov tenzor s dva indeksa $h^{\mu\nu}$ čiji se indeksi spuštaju Minkowski metrikom $\eta_{\mu\nu}$ te da mu trag mora iščezavati

$$h \equiv h^\mu{}_\mu = 0. \tag{31}$$

Nadalje, izvor Newtonskog gravitacijskog polja je *gravitacijska masa*, koja je jednaka inercijskog masi materijalnih tijela. U specijalnoj relativističkoj teoriji polja inercijskoj masi je analogan tenzor energije i impulsa $t^{\mu\nu}$ te on predstavlja izvor gravitacijskog polja. To znači da se bezmaseni graviton $h^{\mu\nu}$ spina 2 na materiju treba vezati putem tenzora energije i impulsa materije $t^{\mu\nu}_{\mathrm{matter}}$. Stoga, tražimo lagranžijan takav da jednadžba gibanja ima oblik

$$D^{\mu\nu}(h) = \chi t^{\mu\nu}_{\mathrm{matter}}, \tag{32}$$

pri čemu je $D_{\mu\nu}(h) = 0$ jednadžba gibanja za slobodni graviton, a χ je konstanta vezanja. Iz zakona očuvanja energije $\partial_\mu t^{\mu\nu}_{\mathrm{matter}} = 0$ i izraza (32) slijedi jednakost

$$\partial_\mu D^{\mu\nu}(h) = 0. \tag{33}$$

Svojstvo (33) vrijedi i izvan masene ljuske, što znači da se ono može smatrati baždarnim identitetom teorije.
Sada želimo pronaći linearnu teoriju za slobodno polje čiji će lagranžijan sadržavati isključivo članove do drugog stupnja u $\partial_\mu h_{\nu\rho}$. Najopćenitiji takav Lorentz invarijantni lagranžijan dan je s

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &a\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\mu h^{\nu\rho} + b\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\nu h^{\mu\rho} \\ &+ c\partial_\mu h\partial_\rho h^{\mu\rho} + d\partial_\mu h\partial^\mu h.\end{aligned} \tag{34}$$

Jednadžba gibanja je

$$\begin{aligned}D^{\alpha\beta}(h) = &2a\partial^2 h^{\alpha\beta} + 2b\partial_\mu\partial^{(\alpha}h^{\beta)\mu} + c\partial^\alpha\partial^\beta h \\ &+ c\eta^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial_\lambda h^{\mu\lambda} + 2d\eta^{\alpha\beta}\partial^2 h = 0.\end{aligned} \tag{35}$$

Teoriji želimo nametnuti baždarni uvjet (33), iz kojeg primjenom na izraz (35) slijede koeficijenti: $a = -\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}c = -d$. Uzimamo da je $a = \frac{1}{4}$, čime lagranžijan (34) postaje Fierz-Paulijev lagranžijan [2]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\mu h^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\nu h^{\mu\rho} \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial_\rho h^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\partial_\mu h\partial^\mu h,\end{aligned} \tag{36}$$

a jednadžba gibanja poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned}D_{\mu\nu}(h) \equiv &\partial^2 h_{\mu\nu} - 2\partial^\rho\partial_{(\mu}h_{\nu)\rho} + \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta} \\ &+ \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\partial^2 h = 0.\end{aligned} \tag{37}$$

Trebamo odrediti i baždarnu invarijantnost Fierz-Paulijevog lagranžijana:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta h_{\nu\rho}} - \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu h_{\nu\rho})}\right]\delta h_{\nu\rho} \\ &= D^{\nu\rho}\delta h_{\nu\rho} \sim \partial_\nu D^{\nu\rho}\epsilon_\rho.\end{aligned} \tag{38}$$

Prva jednakost je rezultat općenite varijacije lagranžijana s obzirom na polje $h^{\nu\rho}$. Relacija u drugom redu dolazi od toga što ako $\delta h_{\nu\rho}$ uzmemo kao baždarnu transformaciju, onda varijacija lagranžijana s obzirom na nju mora biti proporcionalna baždarnom identitetu (33) do na površinske članove, pri čemu parametar ϵ_ρ mora biti lokalni Lorentzov vektor. Integriranjem desne strane te relacije dolazimo do konačnog izraza za baždarnu transformaciju:

$$\delta h_{\mu\nu} = -\partial_\mu\epsilon_\nu - \partial_\nu\epsilon_\mu. \tag{39}$$

Primjenom baždarne simetrije možemo ukloniti osam neželjenih stupnjeva slobode koji neodgovaraju helicitetu bezmasenog polja $h_{\mu\nu}$ spina 2.
U transverznom baždarenju s iščezavajućim tragom vrijedi

$$\partial_\mu h^{\mu\nu} = 0 = h, \tag{40}$$

što vodi na relaciju

$$D_{\mu\nu}(h) = \partial^2 h_{\mu\nu} = 0. \tag{41}$$

IV Problem nekonzistentnosti i Noetherina metoda

Vezanje na materiju

Kada teoriji želimo dodati vezanje na materiju, langražijan (36) dobiva dodatni član koji dolazi od materije $\mathcal{L}_{\text{matter}}(\phi) = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2$ i član vezanja $\frac{1}{2}\chi h_{\mu\nu} t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi)$:

$$\mathcal{L}(h,\phi) = \mathcal{L}_{\text{FP}} + \mathcal{L}_{\text{matter}}(\phi) + \frac{1}{2}\chi h_{\mu\nu} t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi). \tag{42}$$

Ovakav lagranžijan vodi na jednadžbu (32), iz koje, primjenom baždarnog identiteta (33), slijedi očuvanje tenzora energije i impulsa materije

$$\partial_\mu t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi) = 0. \tag{43}$$

Dakle, tenzor $t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi)$, koji se javlja u jednadžbama (32) i (43), mora biti simetričan, zato što je $D^{\mu\nu}$ simetričan, te mu divergencija mora biti jednaka nuli. Ta dva svojstva se ostvaruju u Belinfante tenzoru energije i impulsa slobodne tvari, kojeg nalazimo simetrizacijom kanonskog tenzora energije i impulsa tako da mu dodajemo članove koji iščezavaju na ljusci. Belinfante tenzor energije i impulsa je u slučaju skalarnog, vektorskog i simetričnog tenzora jednak Rosenfeldovom tenzoru energije i impulsa, kojeg ćemo u daljnjem tekstu detaljnije predstaviti i koristiti u računu.
No, najprije trebamo provjeriti je li očuvanje tenzora energije i impulsa (43) u skladu s jednadžbom gibanja koju lagranžijan (42) daje za polje ϕ. Nju ćemo dobiti tako da izračunamo tenzor

$$t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi) = -\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi + \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial\phi)^2 \tag{44}$$

te ga uvrstimo u lagranžijan (42), čime dobivamo izraz

$$\mathcal{L}(h,\phi) = \frac{1}{2}\left(\eta_{\mu\nu} - \chi\bar{h}_{\mu\nu}\right)\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi, \tag{45}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \tag{46}$$

iz kojeg direktno slijedi jednadžba gibanja

$$\partial^2\phi = \chi\partial_\mu(\bar{h}^{\mu\nu}\partial_\nu\phi). \tag{47}$$

Divergiranjem izraza (44) i uvrštavanjem jednadžbe (47) dobivamo

$$\partial_\mu t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi) = -\chi\partial_\lambda(\bar{h}^{\lambda\rho}\partial_\rho\phi)\partial^\nu\phi, \tag{48}$$

što očigledno nije u skladu s izrazom (43). Problem je u tome što vezanje dano lagranžijanom (42) mijenja jednadžbu gibanja s lijeve strane izraza (32) te bismo trebali također zamjeniti tenzor energije i impulsa $t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi)$ s tenzorom $t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi,h)$ dobivenim iz $\mathcal{L}_{\text{matter}}(\phi) + \frac{1}{2}\chi h_{\mu\nu}t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi)$ kako bismo spasili taj izraz. No, to neće funkcionirati jer bismo za računanje novog tenzora $t^{\mu\nu}_{\text{matter}}(\phi,h)$ trebali uključiti i Fierz-Paulijev dio lagranžijana (36) zato što je jedino ukupni tenzor energije i impulsa očuvan, odnosno u skladu s jednadžbom (43). Tu nekonzistentnost ćemo pokušati ispraviti Noetherinom metodom.

Newtonska granica

Prije primjene Noetherine metode, pogledat ćemo kako se teorija koju smo dosad izgradili ponaša u Newtonskoj granici. Specijalno-relativistička akcija za česticu mase M, modificirana tako da uključuje vezanje na gravitaciju i integrirana po 4-dimenzionalnoj Diracovoj δ-funkciji, ima sljedeći oblik

$$S = -M\int d\xi \frac{1}{\sqrt{\eta_{\alpha\beta}\dot{X}^\alpha\dot{X}^\beta}}\big(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\chi h_{\mu\nu}(X)\big)\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu, \tag{49}$$

gdje je ξ općeniti parametar putanje čestice te vrijedi $\dot{X}^\mu = \frac{dX^\mu}{d\xi}$. Tenzor energije i impulsa točkaste čestice mase M se može izračunati iz rješenja jednadžbi gibanja slobodne čestice $\dot{P}^\mu = 0$ i $P^\mu P_\mu = M^2$. On iznosi

$$t^{\mu\nu} = -M\delta^\mu_0\delta^\nu_0\delta^3(\vec{x}). \tag{50}$$

Uvrštavanjem (50) u (32) dobivamo jednadžbe gibanja za gravitacijsko polje

$$D^{00}(h) = -\chi M\delta^{(3)}(\vec{x}), \tag{51}$$

$$D^{ij}(h) = 0. \tag{52}$$

Kako bismo riješili te jednadžbe, koristit ćemo De Donderovo baždarenje

$$\partial^\mu\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{53}$$

Time jednadžba gibanja (37) poprima oblik

$$D_{\mu\nu}(\bar{h}) = \partial^2\bar{h}_{\mu\nu}. \tag{54}$$

Sada, izjednačavajući izraze (51) i (52) s (54), dobivamo rješenje za gravitacijsko polje:

$$h^{\mu\mu} = \frac{2}{\chi}\phi, \tag{55}$$

gdje za ϕ vrijedi

$$\phi = \frac{\chi^2 M}{16\pi|\vec{x}|}. \tag{56}$$

Vidimo da ϕ može biti identificirano s Newtonskim potencijalom. Da bismo to potvrdili, trebamo vidjeti kako ono utječe na gibanje probne čestice.

Stoga, uvrštavamo rješenje (55) čestice M u akciju (49) nove probne čestice mase m te koristimo statičko baždarenje $\xi = X^0 = t$. Rezultat je

$$\begin{aligned} S &= -m \int dt \left[\sqrt{1-v^2} + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \left(1+v^2\right) \phi \right] \\ &\approx \int dt \left(\frac{1}{2} m v^2 - m\phi + \frac{1}{8} m v^4 - \frac{3}{2} m v^2 \phi + ... \right). \end{aligned} \tag{57}$$

U donjoj jednakosti smo uzeli nerelativistički limes ($v << 1$). Prvi član predstavlja kinetičku energiju čestice s inercijskom masom m, dok je drugi jednak potencijalnoj energiji čestice s gravitacijskom masom m koja se kreće u potencijalu (56). Time smo potvrdili definiciju potencijala ϕ. Također, gravitacijska i inercijalna masa su u ovoj teoriji jednake. Druga dva člana su, redom, relativistička korekcija kinetičke energije slobodne čestice i korekcija zbog doprinosa gravitacijskog međudjelovanja kinetičkoj energiji.
Ovaj model daje dobro slaganje s ogibanjem svjetlosti, vremenskom diletacijom i sl. Sa zakretom perihela Merkura dolazi na 0.75 puta od opažene vrijednosti.

Noetherina metoda

Sada ćemo Noetherinu metodu primjeniti na lagranžijan sastavljen od Fierz-Paulijevog lagranžijana (36) i kinetičkog člana koji opisuje materiju

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = &\frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\mu h^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\nu h^{\mu\rho} \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial_\rho h^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \end{aligned} \tag{58}$$

s jednadžbama gibanja

$$D_{\mu\nu}(h) = 0, \tag{59}$$

$$\partial^2 \phi = 0. \tag{60}$$

Lagranžijan (58) je invarijantan na sljedeće transformacije polja:

$$\delta_0 x^\mu = \chi \Sigma^\mu, \tag{61}$$

$$\delta_0 h_{\mu\nu} = -\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu - \chi \Sigma^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu}, \tag{62}$$

$$\delta_0 \phi = -\chi \Sigma^\mu \partial_\mu \phi, \tag{63}$$

pri čemu je Σ^μ parametar globalne simetrije. Kanonski tenzor energije i impulsa materije $t_{\mu\nu}(\phi)$ je dan izrazom (44), a kanonski gravitacijski tenzor energije i impulsa $t_{\mu\nu}(h)$ iznosi

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu}(h) = &-\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\beta\gamma}\partial_\nu h^{\beta\gamma} + \partial_\mu h^{\beta\gamma}\partial_\beta h_{\nu\gamma} \\ &-\frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\rho h_{\nu\rho} - \frac{1}{2}\partial^\rho h \partial_\mu h_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial_\nu h + \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}. \end{aligned} \tag{64}$$

Za tenzore $t_{\mu\nu}(\phi)$ i $t_{\mu\nu}(h)$ vrijede zakoni očuvanja, odnosno

$$\partial^\mu t_{\mu\nu}(\phi) = -\partial^2 \phi \partial_\nu \phi = 0, \tag{65}$$

$$\partial^\mu t_{\mu\nu}(h) = -\frac{1}{2}\partial_\nu h_{\lambda\rho} D^{\lambda\rho}(h) = 0. \tag{66}$$

Tenzor $t_{\mu\nu}(\phi)$ nije izvor za polje $h_{\mu\nu}$, stoga ćemo lagranžijanu (58) dodati član $\mathcal{L} \sim \chi h^{\mu\nu} t_{\mu\nu}(\phi)$, koji predstavlja vezanje na materiju:

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_0 + \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu} t_{\mu\nu}(\phi). \tag{67}$$

Jednadžbe gibanja postaju:

$$D_{\mu\nu}(h) = \chi t_{\mu\nu}(\phi), \tag{68}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi = \chi \partial_\mu \left(h^{\mu\nu}\partial_\nu \phi - \frac{1}{2} h \partial^\mu \phi \right). \tag{69}$$

Međutim, $t_{\mu\nu}(\phi)$ više nije očuvan:

$$0 = \partial^\mu D_{\mu\nu} = \chi \partial^\mu t_{\mu\nu}(\phi) = -\chi \partial^2 \phi \partial_\nu \phi \neq 0! \tag{70}$$

Razlog tome, kao što smo i prije spomenuli, leži u činjenici da $t_{\mu\nu}(\phi)$ nije Noetherina struja vezana uz $\mathcal{L}_1$ dan izrazom (67), već uz $\mathcal{L}_0$ dan s (58). Očuvana je ukupna energija sustava, a ne samo ona koja dolazi od materije. To zapravo znači da ćemo gravitaciju morati vezati samu na sebe. Dakle, gravitacija će biti nelinarna teorija.
Ako lagranžijanu (67) pokušamo dodati član samointerakcije na sličan način kao što smo učinili s tenzorom energije i impulsa materije, dobivamo sljedeći oblik

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = &\frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\mu h^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\nu h^{\mu\rho} \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial_\rho h^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\partial_\mu h \partial^\mu h \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu} t_{\mu\nu}(\phi) + \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu} t_{\mu\nu}(h). \end{aligned} \tag{71}$$

No, takvo vezanje ne daje jednadžbu gibanja

$$D_{\mu\nu}(h) = \chi t_{\mu\nu}(\phi) + \chi t_{\mu\nu}(h). \tag{72}$$

kakvu zahtjevamo. Stoga, moramo potražiti složeniji član samomeđudjelovanja. Trebamo korekciju oblika $\mathcal{L}_{\mathrm{corr}} = \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mu\nu} \sim \chi h (\partial h)(\partial h)$ takvu da lagranžijan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = &\frac{1}{4}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\mu h^{\nu\rho} - \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\rho}\partial^\nu h^{\mu\rho} \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial_\rho h^{\mu\rho} - \frac{1}{4}\partial_\mu h \partial^\mu h \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu} t_{\mu\nu}(\phi) + \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu} \mathcal{L}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{73}$$

i izraz za gravitacijski tenzor

$$t_{\mu\nu}(h) = \mathcal{L}_{\mu\nu} - \partial_\sigma \left(h_{\rho\lambda} \frac{\delta \mathcal{L}^{\rho\lambda}}{\delta \partial_\sigma h^{\mu\nu}} \right). \tag{74}$$

vode na jednadžbu gibanja i zakon očuvanja energije i impulsa sljedećih oblika:

$$D_{\mu\nu}(h) = \chi t_{\mu\nu}(\phi) + \chi t_{\mu\nu}(h), \tag{75}$$
$$\partial^\mu \left(t_{\mu\nu}(\phi) + t_{\mu\nu}(h)\right) = 0. \tag{76}$$

S obzirom na simetrije, konzistentnost teorije možemo postići tako da izgradimo teoriju invarijantnu na lokalnu verziju simetrija polja ϕ i $h_{\mu\nu}$ čije su transformacije dane izrazima (62) i (63). To ćemo pokušati postići identifikacijom parametara $\Sigma^\mu = \epsilon^\mu$ te ćemo ih smatrati lokalnima. Osim toga, zahtjevamo da baždarne transformacije generiraju jedno te istu algebru na ϕ i na $h^{\mu\nu}$. To znači da ako imamo dvije transformacije δ_1 s infinitezimalnim parametrima ϵ_1 i ϵ_2, komutator tih transformacija primjenjen na ϕ i $h_{\mu\nu}$ mora također dati transformaciju δ_1 s nekim parametrom ϵ_3 koji je funkcija parametara ϵ_1 i ϵ_2 :

$$[\delta_1^{\epsilon_1}, \delta_1^{\epsilon_2}] = \delta_1^{\epsilon_3(\epsilon_1,\epsilon_2)}. \tag{77}$$

Poštujući navedene uvjete dobivamo zahtjev da lagranžijan (73) mora biti invarijantan do reda χ^2 na nove transformacije polja:

$$\begin{aligned}\delta_1 h_{\mu\nu} = &-\partial_\mu \epsilon_\nu - \partial_\nu \epsilon_\mu - \chi\epsilon^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} \\ &- \chi\partial_\mu \epsilon^\lambda h_{\nu\lambda} - \chi\partial_\nu\epsilon^\lambda h_{\mu\lambda},\end{aligned} \tag{78}$$

$$\delta_1\phi = -\chi\epsilon^\mu\partial_\mu\phi. \tag{79}$$

Transformacije (78) i (79) imaju algebru $[\delta_1^{\epsilon_1}, \delta_1^{\epsilon_2}] = \delta_1^{[\epsilon_1,\epsilon_2]}$, gdje je $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ Lieva zagrada dva vektorska polja. Izvodi se mogu naći u referencama [3] i [5]. Najopćeniti izraz za $\mathcal{L}_{\mathrm{corr}}$ je

$$\mathcal{L}_{\mathrm{corr}} = \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu}\left(\alpha\partial_\mu h_{\rho\lambda}\partial_\nu h^{\rho\lambda} + \beta\partial_\mu h_{\rho\lambda}\partial^\rho h^\lambda_{\ \nu} + ...\right). \tag{80}$$

On se sastoji od 20 članova sa 16 koeficijenata. Koeficijente određujemo iz baždarnog uvjeta vezanog uz invarijantnost na transformacije (78) i (79)

$$\partial_\mu t^{\mu\nu}(h) = {\gamma_{\rho\lambda}}^\nu D^{\rho\lambda}(h), \tag{81}$$
$$\gamma_{\rho\lambda\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\rho h_{\lambda\nu} + \partial_\lambda h_{\nu\rho} - \partial_\nu h_{\rho\lambda}\right), \tag{82}$$

koji je posljedica toga da je Noetherina struja vektorskog polja vezana uz Belinfante-Rosenfeldov tenzor, a ne uz kanonski tenzor energije i impulsa. Konačan izraz za $\mathcal{L}_{\mathrm{corr}}$ je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{corr}} = \frac{1}{2}\chi h^{\mu\nu}\Big(&-\frac{1}{2}\partial_\mu h_{\rho\lambda}\partial_\nu h^{\rho\lambda} - \partial^\rho h_\mu^{\ \lambda}\partial_\rho h_{\lambda\nu} \\ &+ \partial^\lambda h^\rho_{(\mu}\partial_\rho h_{\nu)\lambda} + 2\partial^\lambda h^\rho_{\ (\mu}\partial_{\nu)} h_{\rho\lambda} \\ &- \partial_{(\mu} h_{\nu)\lambda}\partial^\lambda h - \partial^\lambda h_{\mu\nu}\partial^\rho h_{\rho\lambda} \\ &- \partial^\lambda h_{\lambda(\mu}\partial_{\nu)} h + \partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial_\nu h + \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{FP}}\Big).\end{aligned} \tag{83}$$

Kada uvrstimo korekciju (83) u lagranžijan (73) i izračunamo jednadžbe gibanja, dobivamo:

$$D_{\mu\nu}(h) = \chi t_{\mu\nu}(\phi) + \chi t_{\mu\nu}(h), \tag{84}$$
$$\partial^2\phi = \chi\partial_\mu\left(h^{\mu\nu}\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}h\partial^\mu\phi\right). \tag{85}$$

Zakon očuvanja energije i impulsa (76) također vrijedi.
Dobili smo rezultat koji je konzistetan u prvom redu s obzirom na χ. Izračuni za zakret perihela Merkura se slažu s eksperimentalnim vrijednostima. Dakle, vezanjem na materiju ispravili smo prijašnje odstupanje. Međutim, računanje viših redova u χ je vrlo komplicirano. Stoga ćemo predložiti elegantnije rješenje.

V Deserov argument

Uvodimo lagranžijan s dva nezavisna polja $\varphi^{\mu\nu}$ i ${\Gamma_{\mu\nu}}^\rho$ koja su simetrična na zamjenu indekasa μ i ν:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = &\chi\varphi^{\mu\nu}\left(\partial_\rho {\Gamma_{\mu\nu}}^\rho - \partial_\mu {\Gamma_{\nu\rho}}^\rho\right) \\ &+ \eta^{\mu\nu}\left({\Gamma_{\lambda\mu}}^\rho {\Gamma_{\rho\nu}}^\lambda - {\Gamma_{\lambda\rho}}^\rho {\Gamma_{\mu\nu}}^\lambda\right).\end{aligned} \tag{86}$$

Lagranžijan $\mathcal{L}_0$ je invarijantan na sljedeće transformacije polja:

$$\delta\varphi_{\mu\nu} = -2\partial_{(\mu}\epsilon_{\nu)} + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\epsilon^\rho, \tag{87}$$
$$\delta{\Gamma_{\mu\nu}}^\rho = -\chi\partial_\mu\partial_\nu\epsilon^\rho. \tag{88}$$

Jednadžbe gibanja za polja $\varphi^{\mu\nu}$ i ${\Gamma_{\mu\nu}}^\rho$ su

$$\partial_\rho {\Gamma_{\mu\nu}}^\rho - \partial_{(\mu}{\Gamma_{\nu)\rho}}^\rho = 0, \tag{89}$$

$$\begin{aligned}\chi\partial_\rho\varphi^{\mu\nu} - \chi\partial_\lambda\varphi^{\lambda(\mu}\delta^{\nu)}_\rho - 2\Gamma_\rho^{\ (\mu\nu)} \\ + \Gamma_\lambda^{\ \lambda(\mu}\delta^{\nu)}_\rho + \eta^{\mu\nu}{\Gamma_{\rho\lambda}}^\lambda = 0.\end{aligned} \tag{90}$$

Djelujući redom s $\delta_\mu^{\ \rho}$ i $\eta_{\mu\nu}$ na jednadžbu (90), dobivamo izraze

$${\Gamma_{\rho\lambda}}^\lambda = -\frac{1}{2}\chi\partial_\rho\varphi, \quad \varphi = \varphi_\mu^{\ \mu}, \tag{91}$$
$$\Gamma_\rho^{\ \rho\nu} = \chi\partial_\sigma\varphi^{\sigma\nu}, \tag{92}$$

koji, kad se ponovo uvrste u jednadžbu (90), daju rezultat

$$\Gamma_\rho^{\ (\mu\nu)} = \chi\partial_\rho h^{\mu\nu}, \quad h^{\mu\nu} = \varphi^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\varphi. \tag{93}$$

Kombiniranjem jednadžbe (93) s permutacijama $\Gamma_\mu^{\ (\nu\rho)}$ i $\Gamma_\mu^{\ (\nu\rho)}$ dobivamo uvjet na $\Gamma_{\rho\mu\nu}$:

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\chi\left(\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\nu h_{\rho\mu}\right). \tag{94}$$

Vidimo da ${\Gamma_{\mu\nu}}^\rho$ i $h_{\mu\nu}$ zapravo nisu nezavisna polja. Stoga, jednadžbu gibanja (89), korištenjem jednakosti (94), možemo zapisati na sljedeći način:

$$-\frac{1}{2}\chi\left(D_{\mu\nu}(h) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}D_\rho^{\ \rho}(h)\right) = 0, \tag{95}$$

gdje je $D_{\mu\nu}(h)$ dan izrazom (37). Dakle, vidimo da je $\mathcal{L}_0$ ekvivalentan Fierz-Paulijevom lagranžijanu (36) jer daje istu jednadžbu gibanja.
Sada želimo naći korekciju na $\mathcal{L}_0$ koja dolazi zbog samointerakcije polja $h_{\mu\nu}$, odnosno želimo da nam jednadžba gibanja ima oblik

$$D_{\mu\nu}(h) = \chi t_{\mu\nu}. \tag{96}$$

Za pronalazak tenzora energije i impulsa $t_{\mu\nu}$ iz akcije $S_0 = \int d^4x \mathcal{L}_0$ koristimo Rosenfeldovu metodu. Ona se provodi tako da najprije smjestimo polja u zakrivljeni prostor tako što ćemo metriku Minkowskog $\eta_{\mu\nu}$ zamjeniti općenitom metrikom $\gamma_{\mu\nu}$, parcijalne derivacije ∂_μ kovarijantnim derivacijama ∇_μ vezanim uz Levi-Civita koneksiju $C_{\mu\nu}{}^{\rho}(\gamma)$ te volumni element ravnog prostora d^4x onim zakrivljenog prostora $\sqrt{|\gamma|}d^4x$. Zatim moramo odabrati jesu li polja tenzori ili gustoće tenzora. Ključ Deserovog argumenta je u pretpostavci da je $\varphi^{\mu\nu}$ tenzorska gustoća koja se transformira kao $\sqrt{|\gamma|}f^{\mu\nu}$, gdje je $f^{\mu\nu}$ običan tenzor. Primjenom navedenog dobivamo akciju

$$\begin{aligned} S_0 = \frac{1}{\chi^2}\int d^4x \Big[&\chi\varphi^{\mu\nu}\Big(2\partial_{[\rho}\Gamma_{\mu]\nu}{}^{\rho} + 2C_{\nu[\mu}{}^{\sigma}\Gamma_{\rho]\sigma}{}^{\rho} \\ &- 2C_{\sigma[\mu}{}^{\rho}\Gamma_{\rho]\nu}{}^{\sigma}\Big) + \sqrt{|\gamma|}\gamma^{\mu\nu}2\Gamma_{\lambda[\mu}{}^{\rho}\Gamma_{\rho]\nu}{}^{\lambda}\Big] \end{aligned} \tag{97}$$

iz koje nalazimo tenzor energije i impulsa $t_{\mu\nu}$ pomoću formule:

$$t_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|\gamma|}}\frac{\delta S_0}{\delta\gamma^{\mu\nu}}\bigg|_{\gamma_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}}. \tag{98}$$

Nakon računanja tenzora energije i impulsa $t_{\mu\nu}$, zbrajanjem lagranžijana $\mathcal{L}_0$ i člana koji daje jednadžbu gibanja (96), dobivamo ukupni lagranžijan

$$\mathcal{L}_1 = \chi\varphi^{\mu\nu}2\partial_{[\rho}\Gamma_{\mu]\nu}{}^{\rho} + (\eta^{\mu\nu} - \chi\varphi^{\mu\nu})\,2\Gamma_{\lambda[\mu}{}^{\rho}\Gamma_{\rho]\nu}{}^{\lambda}. \tag{99}$$

Korekcija nema član $\eta^{\mu\nu}$ koji bi se trebao zamjeniti za $\gamma^{\mu\nu}$, što znači da nema niti novog doprinosa tenzoru energije i impulsa $t_{\mu\nu}$, stoga nema potrebe za dodatnim korekcijama!
Jednadžbe gibanja sada postaju:

$$R_{\mu\nu}(\Gamma) = 0 \tag{100}$$

$$\begin{aligned} &-\chi\partial_\rho\varphi^{\mu\nu} + \chi\partial_\lambda\varphi^{\lambda(\mu}\delta^{\nu)}_{\rho} + 2\Gamma_{\rho}{}^{(\mu\nu)} \\ &- \Gamma_{\lambda}{}^{\lambda(\mu}\delta^{\nu)}_{\rho} - \eta^{\mu\nu}\Gamma_{\rho\lambda}{}^{\lambda} - 2\chi\varphi^{\delta(\mu}\Gamma_{\rho\delta}{}^{\nu)} \\ &+ \chi\varphi^{\mu\nu}\Gamma_{\rho\sigma}{}^{\sigma} + \chi\varphi^{\lambda\sigma}\Gamma_{\lambda\sigma}{}^{(\mu}\delta^{\nu)}_{\rho} = 0. \end{aligned} \tag{101}$$

gdje je $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor ovisan o koneksiji $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}$. Kako bismo pronašli koneksiju, definiramo:

$$\eta^{\mu\nu} - \chi\varphi^{\mu\nu} = g^{'\mu\nu} \tag{102}$$

$$g^{'}_{\mu\nu}g^{'\nu\rho} = \delta_\mu^\rho \tag{103}$$

$$g_{\mu\nu} = \sqrt{|g'|}g^{'}_{\mu\nu} \tag{104}$$

Vidimo da je $g_{\mu\nu}$ beskonačni red od $\varphi_{\mu\nu}$ te da se ponaša kao metrika. Sada iz jednadžbe (101), nakon kontrahiranja s $g^{'\rho}_{\mu}$ i $g^{'}_{\mu\nu}$, korištenja izraza (104) i sređivanja, nalazimo da za $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}$ vrijedi

$$\Gamma_{\rho\mu}{}^{\sigma}g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\rho\nu}{}^{\sigma}g_{\sigma\mu} = \partial_\rho g_{\mu\nu}. \tag{105}$$

Dodavanjem permutacije $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\sigma}g_{\sigma\rho}$ i oduzimanjem permutacije $\Gamma_{\nu\rho}{}^{\sigma}g_{\sigma\mu}$ slijedi da je $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ Levi-Civita koneksija:

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\nu g_{\rho\mu}\right) \tag{106}$$

te da je jednadžba (100) zapravo Einsteinova jednadžba $R_{\mu\nu}(\Gamma) = R_{\mu\nu}(g) = 0$.
Kako bismo pokazali svojstvo konzistentnosti korigiranog lagranžijanja $\mathcal{L}_1$, provodimo analogan postupak na jednadžbi (101), samo što je kontrahiramo metrikama Minkowskog δ_μ^ρ i $\eta_{\mu\nu}$ umjesto metrikama $g^{'\rho}_{\mu}$ i $g^{'}_{\mu\nu}$. Rezultat je

$$\begin{aligned} \Gamma_{\rho\mu\nu} &= \frac{1}{2}\chi\left(\partial_\rho h_{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\nu h_{\rho\mu}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{\rho\mu\nu} + f_{\mu\nu\rho} - f_{\nu\rho\mu}\right), \end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned} f_{\rho\mu\nu} &= 2\chi\varphi^{\delta}{}_{(\mu|}\Gamma_{\rho\delta|\nu)} - \chi\varphi_{\mu\nu}\Gamma_{\rho\delta}{}^{\delta} \\ &- \frac{1}{2}\chi\eta_{\mu\nu}\left(2\varphi^{\delta}{}_{\lambda}\Gamma_{\rho\delta}{}^{\lambda} - \varphi\Gamma_{\rho\delta}{}^{\delta}\right). \end{aligned} \tag{108}$$

Nakon uvrštavanja jednakosti (107) u jednadžbu (100), dobivamo izraz

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}(\Gamma) = &\frac{1}{2}\chi\left(D_{\mu\nu}(h) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}D_\rho{}^{\rho}(h)\right) \\ &+ 2\Gamma_{\lambda[\mu}{}^{\rho}\Gamma_{\rho]\nu}{}^{\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\tau\Big[f_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu} + f_{\nu\mu}{}^{\tau} - f^{\tau}{}_{\nu\mu} \\ &+ \chi\eta^{\tau}{}_{(\nu|}\left(2\varphi^{\delta}{}_{\lambda}\Gamma_{|\mu)\delta}^{\lambda} - \varphi\Gamma_{|\mu)\delta}^{\delta}\right)\Big] \end{aligned} \tag{109}$$

koji se slaže s prethodnim izrazima (96) i (98).
Konačno, za postizanje invarijanstnost lagranžijana $\mathcal{L}_1$ na generalne transformacije koordinata, trebamo dodati članove s potpunom derivacijom $\eta^{\mu\nu}\left[\partial_\mu\Gamma_{\nu\rho}{}^{\rho} - \partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}\right]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= (\chi\varphi^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu})\,2\partial_{[\rho}\Gamma_{\mu]\nu}{}^{\rho} \\ &\quad + (\eta^{\mu\nu} - \chi\varphi^{\mu\nu})\,2\Gamma_{\lambda[\mu}{}^{\rho}\Gamma_{\rho]\nu}{}^{\lambda} \\ &= g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\Gamma_{\nu\rho}{}^{\rho} - \partial_\rho\Gamma_{\mu\nu}{}^{\rho}\right) \\ &\quad + g^{\mu\nu}\left(\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\rho}\Gamma_{\nu\rho}{}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\rho}{}^{\rho}\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}\right) \\ &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}(g). \end{aligned} \tag{110}$$

Time smo dobili Einstein-Hilbertov lagranžijan.

VI Zaključak

Na temelju općih svojstava gravitacijske sile, zaključili smo da je graviton bezmaseno polje spina 2, odnosno da ga možemo opisati simetričnim Lorentzovim tenzorom s dva indeksa $h_{\mu\nu}$. Našli smo da je najopćenitiji lagranžijan takvog slobodnog polja dan Fierz-Paulijevim lagranžijanom. Pri pokušaju vezanja teorije na materiju, naišli smo na određene nekonzistentnosti koje smo najprije pokušali riješiti Noetherinom metodom. Noetherina je metoda, u prvom redu s obzirom na parametar χ, dala dobre rezultate, između ostalog i točan izraz za Newtonov potencijal. Međutim, zbog zahtjevnosti računa, nismo nastavili s procedurom u višim redovima. Umjesto toga smo predložili drugi pristup, tzv. Deserov argument, koji se pokazao kao elegantno i konzistentno rješenje. Koristeći Deserov argument, uspjeli smo reproducirati rezultate opće teorije relativnosti, odnosno Hilbert-Einsteinovu jednadžbu.

Zahvale

Htjela bih zahvaliti mentorici L. Jonke na trudu i vremenu koje je uložila vodeći me kroz ovaj rad.

Literatura

[1] RP Feynman. *Lectures on Gravitation, edited by FB Morınigo, WG Wagner, and B. Hatfield.* 1995.

[2] Markus Fierz i Wolfgang Ernst Pauli. „On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field". *Proc. R. Soc. Lond. A* 173.953 (1939), str. 211–232.

[3] VI Ogievetsky i IV Polubarinov. „Interacting field of spin 2 and the Einstein equations". *Annals of Physics* 35.2 (1965), str. 167–208.

[4] Tomás Ortín. *Gravity and strings.* Cambridge University Press, 2004.

[5] Robert M Wald. „Spin-two fields and general covariance". *Physical Review D* 33.12 (1986), str. 3613.