Twistori u gravitacijskim i baždarnim teorijama

Fran Ilčić[1]
Mentor: Ivica Smolić

Fizički odsjek, PMF, Zagreb.
[1]Email: ilcic.fran@gmail.com

23. siječnja, 2022.

Sažetak

Nakon motivacijskog uvoda, gradi se spinorni formalizam, njegova veza s vektorima prostorvremena te algebarski i analitički alati. Pruža se uvid u konformalne transformacije i izomorfizme određenih prostora te grupa transformacija. Kroz twistornu jednadžbu dolazi se do twistornog prostora, čija struktura i geometrija se izlažu i predstavljaju ključan dio seminara. Navode se primjene twistornog formalizma u fizici i matematici.

1 Uvod

Twistornu teoriju uvelike je začeo Roger Penrose kao prirodnu formulaciju prostorvremena za ujedinjavanje kvantne teorije (i kvantne toerije polja) s teorijom gravitacije. Prema njemu [2], kvantna teorija je ona koja će trebati biti modificirana kako bi se ujedinila s gravitacijom. Jedan od razloga za ovo mišljenje je problem definiranja ideja i objekata, kao što su pozitivna frekvencija, kauzalnost i standardni kvantni operatori, na općenitom zakrivljenom prostoru. Drugi razlozi za ujedninjavanje kvantne teorije s gravitacijom su beskonačnosti kvantne teorije polja i nepotpunosti teorije, kao npr. interpretacija *problema mjerenja*.

Nadalje, problemi kao što je *EPR paradoks* upućuju na potrebu za dopuštanjem *ne-lokalnosti*. Twistorna teorija je između ostalog pokušaj stvaranja prikladnog ne-lokalnog formalizma.

Drugi aspekt motivacije za twistore je prirodnost prelaska na kompleksne prostore. Njihova analitička i algebarska potpunost, osim što dopušta matematički rigorozne i jasno definirane strukture, daje mnoge veze naizgled različitih objekata ili principa. Ova prednost, kao što ćemo vidjeti u sljedećim odjeljcima, dolazi u obliku izomorfizama matematičkih struktura, konkretno mnogostrukosti, vektorskih prostora i Liejevih grupa. Posljedično, računi i izrazi su olakšani i pojednostavljeni te dobivamo veću moć interpretacije rezultata.

Od kako je pokrenuta, twistorna teorija stvorila je cijelo područje istraživanja u fizici i u matematici. Više desetljeća postojao je i časopis *Twistor Nesletter* u kojemu su objavljivani novi napredci u teoriji. Njena primjena na jednadžbe polja bezmasenih čestica zahtjeva istraživanje kohomologije snopova (*sheaf cohomology*), što je izazvalo napredak uvida i alata u teorijskoj matematici.

Cilj seminara ponajprije je objasniti twistorni prostor, njegovu geometriju i vezu s ravnim prostorom Minkowskog, za što prvo treba razviti spinorni formalizam. Za kraj se daje pregled primjena twistora na gravitacijke i baždarne teorije te njihov utjecaj na teorijsku matematiku.

2 Spinori

2.1 Motivacija

Najjednostavniji spinski objekti su vektori stanja čestice spina $\frac{1}{2}$. Oni su elementi $\mathbb{C}^2$ prostora, odnosno 2D kompleksni vektori, te prikazuju projekciju spina na zadanu os z. Spinski operatori triju prostornih osi x, y, z dani su Paulijevim 2×2 Hermitskim matricama σ_j te je ukupni spinski operator zadan trima realnim komponentama u^j kao

$$u^j \sigma_j = \begin{pmatrix} u^3 & u^1 - iu^2 \\ u^1 + iu^2 & -u^3 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Ako ovim matricama dodamo jediničnu kao σ_0, dobivamo način za "spremiti" 4D Lorentzov vektor u^a (ovdje je a apstraktan index, odnosno samo označava da je objekt vektor, a ne njegovu a-tu komponentu) u 2×2 Hermitsku kompleksnu matricu:

$$\Psi(u^a) = u^a \sigma_a = \begin{pmatrix} u^0 + u^3 & u^1 - iu^2 \\ u^1 + iu^2 & u^0 - u^3 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Lorentzov struktura ravnog prostora Minkowskog dana je transformacijama koje čuvaju produkt η_{ab} signature $(+,-,-,-)$, npr. normu $u^a u_a = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2$, uz zadano ishodište koordinatnog sustava. Uočavamo da se ova norma može dobiti iz $\Psi(u^a)$ kao determinanta:

$$\det \Psi(u^a) = (u^0 + u^3)(u^0 - u^3) - (u^1 - iu^2)(u^1 + iu^2) = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2. \tag{2.3}$$

Skup transformacija prostorvremena koje čuvaju Lorentzovu normu čine Lorentzovu grupu, a skup transformacija Q koje čuvaju determinantu 2×2 Hermitske matrice σ,

$$\sigma' = Q\sigma Q^{\dagger}, \tag{2.4}$$

čine specijalnu linearnu grupu nad 2D kompleksnim prostorom SL(2,$\mathbb{C}$). Budući da je SL(2,$\mathbb{C}$) jednostavno povezana i sadrži identitetu, dok Lorentzova groupa sadrži četiri dijela ovisno o očuvanju prostorne i vremenske orjentacije, odgovarajući podskup Lorentzovih transformacija je *prava ortokrona* Lorentzova grupa SO$^+$(1,3). Ove grupe su dakle lokalno izomorfne, a izomorfizam sa SL(2,$\mathbb{C}$) na SO$^+$(1,3) je 2-1 (dva elementa SL(2,$\mathbb{C}$) na jedan iz SO$^+$(1,3)) s obzirom da $-I$ u SL(2,$\mathbb{C}$) prema (2.4) daje transformaciju ekvivalentnu I u SO$^+$(1,3).

Kao prostor djelovanja grupe SL(2,$\mathbb{C}$) dobivamo 2-dimenzionalni kompleksni prostor $\mathbb{C}^2$, no s očuvanom dodatnom strukturom. Ovo će biti dokazano u sljedećem pododjeljku.

2.2 Spinorni prostor i algebra

Definicija (Stewart [3])

Simplektička linearna struktura *na parno-dimenzionalnom vektorskom prostoru S je nedegenerirana bilinearna antisimetrična 2-forma na S. Djelovanje ove forme na par vektora $\xi, \eta \in S$ također se naziva* ***anti-skalarni produkt*** *i označava se $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$. (Nedegeneriranost znači da je $[\xi, \eta] = 0$ za sve η samo kada je $\xi = 0$.) Prostor S s ovom strukturom naziva se simplektički vektorski prostor. Linearna transformacija $Q : S \to S$ naziva se simplektička ako čuva anti-skalarni produkt,*

$$[Q\xi, Q\eta] = [\xi, \eta], \;\; \forall \xi, \eta \in S. \tag{2.5}$$

Skup svih simplektičkih transformacija na kompleksnom n-dimenzionalnom S čini simplektičku grupu $Sp(n)$.

Prva zanimljivost koju možemo uočiti je da su u simplektičkom prostoru svi vektori ortogonalni sami sebi

$$[\xi, \xi] = -[\xi, \xi] = 0. \tag{2.6}$$

Ako se ograničimo na 2-dimenzionalni kompleksni simplektički prostor (u daljnjem tekstu S), kojeg razapinju dva kompleksna vektora (spinora), nedegeneriranost i linearnost simplektičkog produkta impliciraju da je skup vektora ortogonalnih nekom izabranom ξ upravo skup svih vektora proporcionalnih ξ.

Sljedeći korak je definiranje izomorfizma s dualnim prostorom S^*, odnosno prostorom svih linearnih preslikavanja $S \to \mathbb{C}$. Lorentzovom vektorima u^a prirodno je pridružiti dual

u_a preko metrike Minkowskog, $u_a = \eta_{ab}u^b$. Kako je ekvivalent metrike u simplektičkom prostoru anti-skalarni produkt, prirodno definiran izomorfizam $S \to S^*$ je upravo

$$\xi \mapsto [\xi, \ ] \in S^*, \tag{2.7}$$

gdje $[\xi, \ ]$ djeluje na η t.d. $\eta \mapsto [\xi, \eta]$.

Baza prostora S konstruira se uzimajući proizvoljni spinor $o \neq 0$ te skalirajući proizvoljni spinor ι za koji $[o, \iota] \neq 0$ tako da

$$[o, \iota] = 1. \tag{2.8}$$

Jednom kada imamo bazu, spinore možemo zapisivati preko komponenti u njoj:

$$\xi = \xi^0 o + \xi^1 \iota = \begin{pmatrix} \xi^0 \\ \xi^1 \end{pmatrix} = \xi^A. \tag{2.9}$$

Dual od $\xi^A \in S$ zapisujemo $\xi_A \in S^*$. Od ovih spinora sada gradimo algebru i spinore viših redova na način analogan izgradnji tenzora. Sam anti-skalarni simplektički produkt možemo identificirati s elementom $S^* \times S^*$, budući da on uzima dva spinora iz S i daje kompleksan broj. Ovaj element zapisujemo $\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}$ te vrijedi

$$\epsilon_{AB}\xi^A\eta^B = [\xi, \eta]. \tag{2.10}$$

Po definiciji vrijedi

$$\epsilon_{AB}o^Ao^B = \epsilon_{AB}\iota^A\iota^B = 0, \quad \epsilon_{AB}o^A\iota^B = 1 \tag{2.11}$$

pa imamo

$$\epsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Dualni spinor po definiciji odgovara

$$\xi_A = \epsilon_{AB}\xi^A = \xi^A\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA}\xi^A, \tag{2.13}$$

odakle vidimo dvije stvari. Kao prvo

$$[\xi, \eta] = \epsilon_{AB}\xi^A\eta^B = \xi_B\eta^B = -\xi^A\eta_A, \tag{2.14}$$

zamjena položaja kontrahiranih indeksa daje negativan predznak. Kao drugo, predznak je pozitivan kada u kontrakciji s ϵ_{AB} imamo susjedne kontrahirane indekse ako mu spinor stavimo zdesna, odnosno kada kontrakcija susjednih indeksa ide lijevo-gore desno-dolje. Ovaj zadnji dio je razlog definiranju anti-skalarnog produkta na S^* (koji je element $S \times S$)

s negativnim predznakom ispred inverza:

$$\epsilon^{AB} = -(\epsilon^{-1})^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

budući da tako dobivamo konzistentnost s pravilom susjednih indeksa lijevo-gore desno-dolje za pozitivan predznak:

$$\xi^A = \epsilon^{AB}\xi_B = -\xi_B\epsilon^{BA}, \quad \epsilon^{AB}\epsilon_{AC} = -\epsilon^{BA}\epsilon_{AC} = -\delta^B{}_C = \delta_C{}^B. \tag{2.16}$$

Korištenjem (2.11) lako dobivamo

$$\epsilon^{AB} = o^A\iota^B - o^B\iota^A. \tag{2.17}$$

Sada možemo definirati grupu transformacija spinske baze

$$\tilde{o}^A = \alpha o^A + \beta\iota^A, \quad \tilde{\iota}^A = \gamma o^A + \delta\iota^A \tag{2.18}$$

koje čuvaju anti-skalarni produkt, što odgovara uvjetu $\tilde{\epsilon}^{AB} = \epsilon^{AB}$, odnosno

$$\begin{gathered}\tilde{o}^A\tilde{\iota}^B - \tilde{\iota}^A\tilde{o}^B = o^A\iota^B - \iota^A o^B \\ \alpha\gamma(o^A o^B - o^A o^B) + \alpha\delta(o^A\iota^B - \iota^A o^B) + \beta\gamma(\iota^A o^B - o^A\iota^B) + \beta\delta(\iota^A\iota^B - \iota^A\iota^B n) = o^A\iota^B - \iota^A o^B \\ (\alpha\delta - \beta\gamma)(o^A\iota^B - \iota^A o^B) = o^A\iota^B - \iota^A o^B \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 1,\end{gathered} \tag{2.19}$$

što upravo daje uvjet da operator transformacije bude specijalna (det = 1) linearna 2×2 matrica, odnosno element $SL(2,\mathbb{C})$. Također, svaki element $SL(2,\mathbb{C})$ definira jednu ovakvu transformaciju, koja je zbog čuvanja anti-skalarnog produkta simplektomorfizam. Stoga imamo izomorfizam između $Sp(2)$ i $SL(2,\mathbb{C})$.

Zanimljivo svojstvo korisno za račune i spinorne teorije slijedi iz Jacobijevog identiteta

$$\epsilon_{A[B}\epsilon_{CD]} = 0, \tag{2.20}$$

gdje uglate zagrade označavaju antisimetrizaciju indeksa. Raspis daje

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{6}(\epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} - \epsilon_{AB}\epsilon_{DC} - \epsilon_{AD}\epsilon_{CB} - \epsilon_{AC}\epsilon_{BD}) \\ 0 &= \epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} + \epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} \\ 0 &= \epsilon_{AB}\epsilon_{CD} + \epsilon_{AC}\epsilon_{DB} + \epsilon_{AD}\epsilon_{BC}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Kao prvi korak, tražimo antisimetričan dio proizvoljnog spinora višeg reda $\tau_{...AB...}$, kojeg uvijek možemo rastaviti na simetrični i antisimetrični dio u proizvoljnom paru indeksa

$$\tau_{...AB...} = \tau_{...(AB)...} + \tau_{...[AB]...}. \tag{2.22}$$

Množenjem $\tau_{...}{}^{CD}{}_{...}$ s konačnim oblikom izraza (2.21) dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon_{AB}\tau_{...D}{}^{D}{}_{...} - \tau_{...AB...} + \tau_{...BA...} \\ \tau_{...[AB]...} &= \frac{1}{2}(\tau_{...AB...} - \tau_{...BA...}) = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}\tau_{...D}{}^{D}{}_{...} \end{aligned} \tag{2.23}$$

Posljedica ovoga je teorem dokaziv matematičkom indukcijom [1] koji kaže da je svaki spinor $\tau_{A...C}$ suma totalno simetričnog spinora $\tau_{(A...C)}$ i (vanjskih) produkata ϵ-a i totalno simetričnih spinora nižih redova. Drugim riječima, samo su simetrični spinori relevantni. Nadalje, simetrični spinori uvijek se mogu zapisati kao simetrizirani produkt spinora prvog reda

$$\tau_{(A...C)} = \xi_{(A}...\eta_{C)}. \tag{2.24}$$

Ključan dio spinornog formalizma je i definiranje **kompleksno konjugiranog prostora** $\overline{S}$. Naime, prostori S i $\overline{S}$ nisu isti prostor, budući da pokušaj identificiranja međusobno konjugiranih elemenata ne bi bio izomorfizam. Npr. za $\xi, \eta \in S$, $\alpha \in \mathbb{C}$, linearna kombinacija $\xi + \alpha\eta$ morala bi biti preslikana u $\overline{\xi} + \overline{\alpha\eta}$, a ne u $\overline{\xi} + \alpha\overline{\eta}$. U suprotnom bismo mogli faktorizirati spinor η s proizvoljnim kompleksnim brojem α koji bi ostao ne konjugiran te identifikacija ne bi bila dobro definirana. No ovakvo preslikavanje ne čuva linearne kombinacije. Konkretno, to bi bio anti-izomorfizam. U skladu s ovim problemom, dobili bismo i mogućnost razlikovanja realnih i imaginarnih spinora, što ne bi bilo konzistentno s proizvoljnošću odabira baze putem simplektomorfizama. Stoga se definira anti-izomorfizam u novi prostor $\overline{S}$ različit od S. Standardni zapis koristi crtane indekse

$$\xi^{A} \mapsto \overline{\xi^{A}} = \overline{\xi}^{A'}. \tag{2.25}$$

Dualni prostor od $\overline{S}$ je $\overline{S}^{*}$ s donjim crtanim indeksima. Potpuna tenzorska algebra spinora izgrađena je od četiri prostora S, S^{*}, $\overline{S}$ i $\overline{S}^{*}$. Kako su S i $\overline{S}$ prostori povezani kompleksnom konjugacijom, a ne simplektičkom strukturom, crtani indeksi spinora potpuno su nezavisni od običnih te u praksi nije bitan relativan položaj jednih u odnosu na druge, dok je relativan položaj samih crtanih indeksa bitan, kao i kod običnih.

2.3 Spinori i prostorvrijeme

Budući da kompleksna konjugacija mijenja obične indekse u crtane i obratno, za spinor jednakog broja običnih i crtanih indeksa τ moguće je $\overline{\tau} = \tau$ i tada je τ **Hermitski**. Najjednostavniji takvi spinori su oni s po jednim indeksom svake vrste, $\tau^{AA'}$. Oni su elementi $S \times \overline{S}$ pa se mogu prikazati u bazi $(o, \iota) \times (\overline{o}, \overline{\iota})$:

$$\tau^{AA'} = \alpha o^A \overline{o}^{A'} + \beta \iota^A \overline{\iota}^{A'} + \gamma o^A \overline{\iota}^{A'} + \delta \iota^A \overline{o}^{A'}. \tag{2.26}$$

Ovaj spinor je Hermitski akko su α i β realni brojevi, a γ i δ kompleksni konjugati jedan drugome. Ovo nam daje 4-realnodimenzionalan vektorski prostor, što omogućava upravo motivacijsku identifikaciju

$$u^a = u^{AA'} = \begin{pmatrix} u^0 + u^3 & u^1 - iu^2 \\ u^1 + iu^2 & u^0 - u^3 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Dobiveni bazni vektori

$$l^a = o^A \overline{o}^{A'}, \quad n^a = \iota^A \overline{\iota}^{A'}, \quad m^a = o^A \overline{\iota}^{A'}, \quad \overline{m}^a = \iota^A \overline{o}^{A'} \tag{2.28}$$

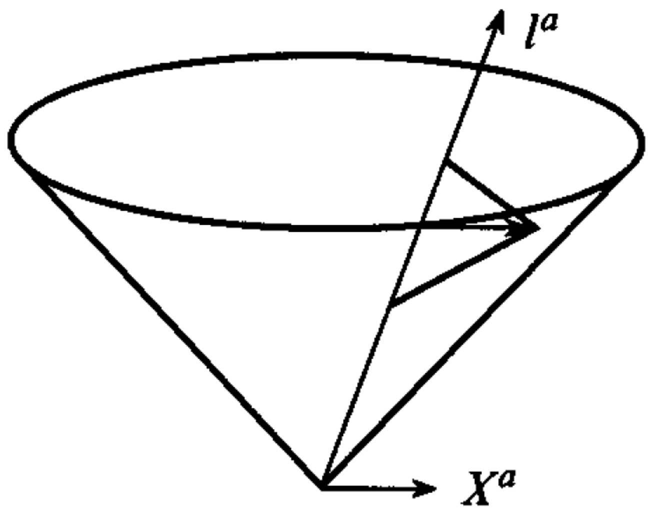
čine tzv. *Newman-Penrose nul-tetradu.* Za metriku g_{ab} dobivamo

$$g_{AA'BB'} = g_{ABA'B'} = \epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}, \quad g^{ABA'B'} = \epsilon^{AB}\epsilon^{A'B'}. \tag{2.29}$$

Identifikacija Lorentzovog indeksa s parom spinorskih općenita je procedura prijelaza s prostora Minkowskog na spinorni. Ovaj prijelaz je obostran, no za neke spinore dobit ćemo kompleksne 4-vektore. Specifično, u slučaju realnih nul vektora imamo $0 = u_a u^a = u_{AA'} u^{AA'} = \det u^{AA'}$, što za posljedicu ima da se svaki nul vektor može zapisati kao umnožak spinora i njegovog kompleksnog konjugata, $u^{AA'} = \pm \alpha^A \overline{\alpha}^{A'}$. Ovaj raspis nije jedinstven, već u odabiru α^A imamo slobodu u izboru faze koja se skrati. U suprotnom smjeru, svaki spinor α^A definira jedinstveni realni nul vektor $\alpha^A \overline{\alpha}^{A'}$. Stoga spinor možemo vizualizirati kao nul-zastavicu u realnom prostorvremenu: njen jarbol predstavlja nul 4-vektor $\alpha^A \overline{\alpha}^{A'}$, a orjentacija ravnine zastavice kompleksnu fazu.

Za simetrične spinore $\tau_{(A \ldots C)}$, faktorizirane prema (2.24), svaki od spinornih faktora daje jedan nul-smjer te njihov skup zovemo *principalnim nul-smjerovima* spinora $\tau_{(A \ldots C)}$. Ovi smjerovi daju uvid u prirodu cijelog spinora, što je korisno u analizi konkretnih tenzora, npr. Weylovog tenzora C_{abcd} iz opće relativnosti

$$C_{abcd} = C_{ABCDA'B'C'D'} = \Psi_{ABCD}\epsilon_{A'B'}\epsilon_{C'D'} + \overline{\Psi}_{A'B'C'D'}\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}. \tag{2.30}$$



Slika 1: Izvor: Huggett, Tod [1]. Prikaz spinora kao zastavice. Nul vektor l^a dobiven je spinorom α^A kao $\alpha^A\overline{\alpha}^{A'}$, dok je X^a realan dio od $m^a = \alpha^A\overline{\beta}^{A'}$ za β^A takav da $[\alpha, \beta] = 1$. β^A je definiran do na član proporcionalan α^A budući da $[\alpha, \alpha] = 0$ pa je bitna samo ravnina u kojoj leži X^a, ravnina zastavice. Ako na α^A dodamo fazu $e^{i\theta}$, β^A dobiva fazu $e^{-i\theta}$. l^a ostaje nepromijenjen, a X^a ravnina se rotira za 2θ. Suprotni spinori su dakle iste zastavice, s obzirom da se ravnina vrti dvostruko brže od faze.

Ψ_{ABCD} je totalno simetričan te međusobno podudaranje njegovih principalnih nul-smjerova pruža klasifikaciju zakrivljenosti prostorvremena (*Petrovljeva klasifikacija*).

Spinorna analiza ekvivalentna je tenzorskoj jednom kada imamo kovarijantnu derivaciju $\nabla_a = \nabla_{AA'}$ na spinornom svežnju na mnogostrukosti prostorvremena $\mathbf{M}$. Nju se uvodi aksiomatski, analogno onoj iz diferencijalne geometrije, uz ključan aksiom očuvanja simplektičke strukture

$$\nabla_{AA'}\epsilon_{BC} = 0 = \nabla_{AA'}\epsilon_{B'C'}. \tag{2.31}$$

Sada se mogu dobiti jednadžbe konkretnih polja, npr. jednadžbe slobodnog polja bez mase mirovanja glase

$$\nabla_{A'}{}^{A}\varphi_{AB\ldots C} = 0, \tag{2.32}$$

gdje totalno simetrični spinor $\varphi_{AB\ldots C}$ s $2s$ indeksa predstavlja polje čestice spina (heliciteta) s. Diracova jednadžba veže dva spinorna polja

$$\nabla_{A'}{}^{A}\varphi_A = m\chi_{A'}, \quad \nabla_A{}^{A'}\chi_{A'} = m\varphi_A. \tag{2.33}$$

3 Kompaktificirani Minkowski prostor i konformalne transformacije

Kako bi analiza spinora bila potpuna u usporedbi s tenzorskom, treba definirati još Liejevu derivaciju spinornih polja niz vektorska polja grupnih transformacija Minkowskog prostora $\mathbf{M}$. Glavni uvjet za postojanje takvih ponovo je očuvanje simplektičke strukture, odnosno anti-skalarnog produkta ϵ_{AB}. S obzirom da promatramo grupne endomorfizme $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$, a ne paralelni pomak kao kod kovarijantne derivacije, ne zahtjevamo konstantnost ϵ_{AB} duž vektorskog polja endomorfizma X^a, već samo očuvanje anti-simetričnosti, dok je reskaliranje dozvoljeno

$$\mathcal{L}_X \epsilon_{AB} = \lambda \epsilon_{AB}. \tag{3.1}$$

Koristeći izraz (2.29) za metriku g_{ab} imamo

$$\mathcal{L}_X g_{ab} = \mathcal{L}_X(\epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'}) = \mathcal{L}_X(\epsilon_{AB})\epsilon_{A'B'} + \epsilon_{AB}\mathcal{L}_X(\epsilon_{A'B'}) = (\lambda + \overline{\lambda})\epsilon_{AB}\epsilon_{A'B'} = k g_{ab}, \tag{3.2}$$

odnosno dozvoljena su samo vektorska polja X^a duž kojih se metrika mijenja samo reskaliranjem realnim brojem k, tzv. *konformalna Killingova polja.* Endomorfizmi mnogostrukosti $\mathbf{M}$ koji ovo zadovoljavaju lokalno čuvaju kutove (u kontekstu $(+,-,-,-)$ signature) među linijama. Skup takvih transformacija čini ***konformalnu grupu*** $C(1,3)$.

Jednadžba (3.2) svodi se na

$$\nabla_a x_b + \nabla_b X_a = k g_{ab}, \tag{3.3}$$

kojom se diferenciranjem pa integriranjem dolazi do općenitog oblika polja X^a:

$$X^a = P^a + M_b{}^a x^b + A x^a + (2B_b x^b x^a - B^a x^b x_b) \tag{3.4}$$

za konstantne P^a, $M_{ba} = -M_{ab}$, A i B_a, što daje 15 parametara. 4 komponente P^a, koje odgovaraju translacijama, i 6 komponenti antisimetričnog M_{ba}, koje odgovaraju Lorenztovim transformacijama, čine Poincaréovu grupu. A definira dilataciju odnosno reskaliranje. Preostala 4 parametra B_a odgovaraju *specijalnim konformalnim transformacijama.* Ove posljednje pružaju razlog za kompaktificiranje prostora Minkowskog. Naime, ako promotrimo njihove integralne linije

$$\frac{dx^a(s)}{ds} = 2B_b x^b x^a - B^a x^b x_b, \tag{3.5}$$

integracijom dobivamo

$$x^a(s) = \frac{x_0^a - sB^a x_0^b x_{0b}}{1 - 2sB_b x_0^b + s^2 B_b B^b x_{0c} x_0^c}. \tag{3.6}$$

Dobivena linija parametrizirana je na način da za konačne iznose parametra s dobivamo nazivnik nula, odnosno točke x^a u beskonačnosti. Ove točke možemo dodati mnogostrukosti $\mathbf{M}$, a geometriju rezultantne mnogostrukosti možemo prirodno shvatiti na 6-dimenzionalnoj realnoj mnogostrukosti M^6 s ravnom metrikom signature $(+,+,-,-,-,-)$ u koordinatam (T,V,W,X,Y,Z).

Jednadžba nul stošca, odnosno 5-dimenzionalne plohe N na kojoj su svi vektori duljine nula, glasi

$$T^2 + V^2 - W^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 = 0. \tag{3.7}$$

Mnogostrukost prostorvremena $\mathbf{M}$ možemo u cijelosti smjestiti u ovaj nul stožac N preslikavanjem $\mathbf{M} \to M^6$:

$$X^a \mapsto (X^0, \frac{1}{2}(1 - X^b X_b), \frac{1}{2}(-1 - X^b X_b), X^1, X^2, X^3), \tag{3.8}$$

budući da je duljina ovog vektora

$$\begin{aligned} & X^a X_a + [\frac{1}{2}(1 - X^b X_b)]^2 - [\frac{1}{2}(-1 - X^b X_b)]^2 = \\ & = X^a X_a + \frac{1}{4}(1 - 2X^b X_b + (X^b X_b)^2 - 1 - 2X^b X_b - (X^b X_b)^2) = \\ & = X^a X_a - X^b X_b \\ & = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Za točke dobivene hiperplohe, slike od $\mathbf{M}$, vrijedi

$$V - W = \frac{1}{2}(1 - X^b X_b) - \frac{1}{2}(-1 - X^b X_b) = 1, \tag{3.10}$$

odnosno slika od $\mathbf{M}$ je presjek nul stošca N s hiperplohom $V - W = 1$. Na svakom pravcu kroz ishodište u N za koji vrijedi $V - W \neq 0$ možemo naći točku s $V - W = 1$, dakle slika $\mathbf{M}$ je podskup projektivnog prostora PN, prostora čije točke su klase ekvivalencije po proporcionalnosti, odnosno pravci kroz ishodište u N. Ovaj prostor je po definiciji izomorfan presjeku 5-sfere S^5 u M^6 s N. S^5 radijusa 2 definirana je s

$$T^2 + V^2 + W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 0. \tag{3.11}$$

Kako bismo dobili presjek s N, rješavamo sustav jednadži (3.7), (3.11). Rješenje nužno zadovoljava

$$T^2 + V^2 = 1, \tag{3.12}$$

$$W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \tag{3.13}$$

Sada vidimo topologiju presjeka N i S^5, odnosno prostora PN: rješenje (3.12) je sfera S^1, a (3.13) 3-sfera S^3. PN je stoga podskup od $S^1 \times S^3$. Konkretno, $S^1 \times S^3$ dvostruko pokriva (*is a double cover of*) PN pa trebamo identificirati nasuprotne točke. No dobiveni prostor je opet $S^1 \times S^3$.

Na ovakvom 4-dimenzionalnom produktu hipersfera S^1 i S^3, grupa rotacija $O(2,4)$ 6-dimenzionalnog prostora M^6, koja čuva kvadratnu formu danu metrikom, je konformalna i preslikava PN u samog sebe. To možemo shvatiti kroz analogiju s rotacijama u 3 dimenzije $O(3)$. One čuvaju kuteve među svim linijama prostora, jednostavno ih rotirajući (i potencijalno zrcaleći). Takve rotacije također čuvaju i udaljenosti, zbog čega se 2-sfera, a time i projektivni prostor od $\mathbb{R}^3$, preslikava u samu sebe. Konformalna grupa na $P\mathbb{R}^2$, tj. grupa koja čuva kutove preslikavajući projektivnu sferu u samu sebe, stoga je izomorfna grupi $O(3)$, s jednim oprezom; nasuprotni elementi $O(3)$ daju centralno zrcaljene položaje 2-sfere, a u projektivnom prostoru one daju isti element, budući da su cijeli pravci kroz ishodište klase ekvivalencije, a ne samo polupravci (što bi dalo sferu). Izomorfizam s $O(3)$ na konformalne transformacije u $P\mathbb{R}^2$ je dakle dva na jedan (2-1). Mi ovdje imamo produkt kružnice S^1 i 3-sfere S^3, no na kružnicu djeluje ″vremenski″ dio rotacija (″2″ iz $O(2,4)$), a na 3-sferu ″prostorni″ (″4″). Nasuprotni elementi $O(2,4)$ također dovode hipersferu u centralno zrcaljene položaje pa je time izomorfizam $O(2,4)$ i konformalnih transformacija na PN, zvanih $C(1,3)$, isto 2-1.

Zaključujemo da je $\mathbf{M}$ s konformalnim transformacijama zaista izomorfan podskupu prostora PN. Točke u beskonačnosti koje moramo dodati $\mathbf{M}$ u svrhu konzistentnog definiranja specijalnih konformalnih transformacija upravo su točke u PN s $V - W = 0$. Dodavanjem istih dobivamo kompaktificirani Minkowski prostor $\mathbf{M^c}$ izomorfan PN-u. Strukturu dodatnih točaka, odnosno hiperplohe $V - W = 0$, možemo vidjeti koristeći ekvivalentnu hiperplohu koja jest sadržana u $\mathbf{M}$: $V + W = 0$. Ovaj skup odgovara skupu definiranom u (3.8) uz ograničenje na nul vektore $X^a X_a = 0$, odnosno nul stožac ishodišta, budući da tada imamo

$$V = \frac{1}{2}, \quad W = -\frac{1}{2} \quad \implies \quad V + W = 0. \tag{3.14}$$

Zaključujemo da točke $\mathbf{M^c}$ koje nisu u $\mathbf{M}$ čine nul stožac u beskonačnosti.

Daljnjim računom dobiva se finalna interpretacija specijalnih konformalnih transformacija: one invertiraju prostor, $x^a \mapsto \frac{x^a}{x^b x_b}$, zatim translatiraju za $-sB^a$ te opet invertiraju. Na taj način neke točke prostorvremena završavaju na nul stošcu u beskonačnosti, a neke s tog stošca dolaze u obično prostorvrijeme.

Za kraj, dobivamo traženu Liejevu derivaciju. Uvjet da je X^a konformalan Killingov vektor povlači

$$\nabla_a X_b = F_{ab} + \frac{k}{2} g_{ab}, \tag{3.15}$$

gdje je $k = \frac{1}{2}\nabla_b X^b$, a F_{ab} je antisimetričan tenzor. U zapisu sa simetričnim spinorom φ_{AB}

$$F_{ab} = \varphi_{AB}\epsilon_{A'B'} + \overline{\varphi}_{A'B'}\epsilon_{AB}. \tag{3.16}$$

Liejeva derivacija se tada može zapisati

$$\mathcal{L}_X \xi^A = X^b \nabla_b \xi^A - \varphi^A{}_B \xi^B - \frac{k}{4}\xi^A, \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_X \alpha_A = X^b \nabla_b \alpha_A + \varphi_A{}^B \alpha_B + \frac{k}{4}\alpha_A. \tag{3.18}$$

4 Twistorni

4.1 Twistorna jednadžba

Standardni način definiranja twistornog prostora je kao prostor rješenja twistorne jednadžbe

$$\nabla_{A'}{}^{(A}\Omega^{B)} = 0 \tag{4.1}$$

za spinorno polje $\Omega^A(x)$ na $\mathbf{M}$. Iz jednadžbe slijedi

$$\nabla_{A'}{}^{A}\Omega^{B} + \nabla_{A'}{}^{B}\Omega^{A} = 0, \tag{4.2}$$

odakle vidimo da $\nabla_{A'}{}^{A}\Omega^{B}$ mora biti proporcionalan ϵ^{AB} kako bi se antisimetrijom pokratio s drugim članom. Uzima se faktor $-i$ te vrijedi

$$\nabla_{A'}{}^{A}\Omega^{B} = -i\epsilon^{AB}\pi_{A'} \tag{4.3}$$

za neko spinorno polje $\pi_{A'}$. Kontrakcijom s ϵ_{AC} i preimenovanjem indeksa dobivamo (uz pomoć (2.16))

$$\nabla_{AA'}\Omega^{B} = -i\delta_A{}^B\pi_{A'}. \tag{4.4}$$

Budući da koristimo ravni prostor $\mathbf{M}$, imamo

$$\nabla_{A(A'}\nabla^{A}{}_{B')}\Omega_C = \nabla_{A'(A}\nabla^{A'}{}_{B)}\Omega_C = 0, \tag{4.5}$$

odnosno

$$\nabla_{AA'}\pi_{B'} = 0, \tag{4.6}$$

dakle $\pi_{a'}$ je kovarijantno konstantan. Integracijom dobivamo za rješenje

$$\Omega^A(x) = \omega^A - ix^{AA'}\pi_{A'}, \tag{4.7}$$

s konstantnom integracije ω^A. Budući da je rješenje spinorno polje definirano na cijelom $\mathbf{M}$, prostor mogućih rješenja, odnosno twistorni prostor $\mathbf{T}$, nema direktno veze s $\mathbf{M}$, već je razapet svim mogućim kombinacijama spinora ω^A i $\pi_{A'}$. On je dakle 4-kompleksnodimenzionlan vektorski prostor, s obzirom da je svaki od spinora 2-dimenzionalni kompleksni vektor. $\mathbf{T}$ se obično koordinatizira sa

$$Z^\alpha = (Z^0, Z^1, Z^2, Z^3) = (\omega^A, \pi_{A'}). \tag{4.8}$$

Koristeći izraze za kovarijantne derivacije Ω^A i $\pi_{A'}$ u (3.17) i konjugiranoj (3.18) dobivamo njihove Liejeve derivacije te s dolazimo do Lie-očuvane veličine:

$$\mathcal{L}_X \Omega^A = -iX^{AB'}\pi_{B'} - \varphi^A{}_B \Omega^B - \frac{k}{4}\Omega^A, \tag{4.9}$$

$$\mathcal{L}_X \pi_{A'} = \overline{\varphi}_{A'}{}^{B'}\pi_{B'} + \frac{k}{4}\pi_{A'} \tag{4.10}$$

pa slijedi

$$\mathcal{L}_X(\Omega^A \overline{\pi}_A + \overline{\Omega}^{A'}\pi_{A'}) = 0. \tag{4.11}$$

Vidimo da konformalna grupa (definirana vektorima X za koje postoji Liejeva derivacija) djeluje na twistor $(\omega^A, \pi_{A'})$ linearno te čuva produkt

$$\Sigma(Z^\alpha) = \Omega^A \overline{\pi}_A + \overline{\omega}^{A'}\pi_{A'} = \omega^A \overline{\pi}_A + \overline{\Omega}^{A'}\pi_{A'}, \tag{4.12}$$

gdje smo skratili suprotne članove dobivene od drugog člana iz (4.7). Ovaj produkt možemo zapisati u koordinatama twistora

$$\Sigma(Z^\alpha) = Z^0\overline{Z^2} + Z^1\overline{Z^3} + \overline{Z^0}Z^2 + \overline{Z^1}Z^3. \tag{4.13}$$

Ovaj produkt je nedegeneriran, upravo kao i spinorni produkt $[\,,\,]$ ili ϵ_{AB}, pa ga možemo koristiti za prirodni izomorfizam twistornog prostora $\mathbf{T}$ i njegovog dualnog prostora $\mathbf{T}^*$. No po strukturi produkta vidimo da elemente duala možemo identificirati s elementima konjugiranog prostora $\overline{\mathbf{T}}$ ako uzmemo

$$\overline{Z^\alpha} = \overline{(\omega^A, \pi_{A'})} = (\overline{\pi}_A, \overline{\omega}^{A'}) = \overline{Z}_\alpha, \tag{4.14}$$

što za produkt daje $\Sigma(Z^\alpha) = Z^\alpha \overline{Z}_\alpha$. Ako još definiramo totalno antisimetrični twistor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ preko relacije

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} Z_1^\alpha Z_2^\beta Z_3^\gamma Z_4^\delta = \epsilon_{AB}\omega_1^A \omega_2^B \epsilon^{A'B'}\pi_{3A'}\pi_{4B'}, \tag{4.15}$$

grupa koja djeluje na twistorni prostor te čuva produkt Σ i twistor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ je $SU(2,2)$. Signatura je (2,2) jer konjugacija daje negativan predznak ispred imaginarnih članova kojih je 4 od 8, što je ekvivalentno dvijema od četiri kompleksne dimenzije. Grupa $SU(2,2)$ lokalno je izomorfna konformalnoj grupi Minkowskog prostora $C(1,3)$.

4.2 Geometrija twistora

Kao što je već navedeno, twistorni prostor ne sadrži točke prostorvremena Minkowskog, već predstavlja alternativni formalizam opisivanja svemira. Jedna njegova točka odgovara cijeloj kompleksnoj hiperplohi, a u realnom prostorvremenu može biti *incidentna* s pojedinim nul geodezikom. Slijedi objašnjenje ovih ekvivalencija objekata, odnosno geometrije twistornog prostora.

Za početak promatramo točke prostorvremena x^a u kojima je rješenje twistorne jednadžbe $\Omega^A(x)$ iščezava. Kako bismo konzistentno mogli riješiti odgovarajući uvjet

$$\omega^A = ix^{AA'}\pi_{A'}, \tag{4.16}$$

promatramo kompleksifikaciju Minkowskog prostora $\mathbb{C}\mathbf{M}$, odnosno $\mathbb{C}^4$ s metrikom Minkowskog, budući da na njemu rješenje očito uvijek postoji s obzirom na oblik uvjeta, dok na realnom $\mathbf{M}$ to nije slučaj. Za partikularno rješenje $x_0^{AA'}$, sva rješenja imaju oblik

$$x^{AA'} = x_0^{AA'} + \alpha^A\pi^{A'}, \tag{4.17}$$

gdje je α^A proizvoljan spinor. Ovo je općenito rješenje budući da će je $\pi^{A'}\pi_{A'} = 0$ te svaki spinor koji daje nulu u produktu s $\pi_{A'}$ možemo zapisati s faktorom $\pi^{A'}$ (ovo slijedi iz nedegeneriranosti simplektičke strukture iz drugog odjeljka). Kako α^A ima dvije kompleksne komponente, skup rješenja, odnosno skup točaka $\mathbb{C}\mathbf{M}$ za koje rješenje twistorne jednadžbe iščezava, je kompleksna 2-ravnina, odnosno 4-realnodimenzionalna ravnina. Svaki tangentni vektor ove ravnine ima oblik $\alpha^A\pi^{A'}$, što povlači da je duljine nula ($\pi_{A'}\pi^{A'} = \alpha_{A'}\alpha^{A'} = 0$). Ovakva nul ravnina naziva se $\alpha - ravnina$.

Jednadžbu koju točke ove ravnine rješavaju zadali smo nekim twistorom $Z^\alpha = (\omega^A, \pi_{A'})$, no množeći obje strane (4.16) istim kompleksnim faktorom ne mijenja skup rješenja. α-ravninu dakle definira klasa proporcionalnih twistora $[Z^\alpha]$, odnosno točka projektivnog twistornog prostora $P\mathbf{T}$. Budući da projekcija prostoru oduzima jednu kompleksnu dimenziju, on je 6-realnodimenzionalan podskup od $\mathbf{T}$. Svaka točka $P\mathbf{T}$ odgovara jednoj α-ravnini.

U općenitom slučaju α-ravnina ne mora sadržavati realne točke iz $\mathbf{M}$, no ako sadrži barem jednu, recimo $x_0^{AA'}$, iz (4.16) vidimo da je

$$\omega^A\overline{\pi}_A = ix^{AA'}\overline{\pi}_A\pi_{A'} \tag{4.18}$$

čisto imaginaran broj, što daje $\Sigma(Z^\alpha) = 0$, odnosno nul twistor. Vrijedi i obratno, nul twistor daje barem jednu realnu točku u α-ravnini:

$$\omega^A \overline{\pi}_A = ia, \quad \text{definiramo } x_0^{AA'} = \frac{1}{a}\omega^A \overline{\omega}^{A'} \quad \Longrightarrow \quad ix^{AA'}\pi_{A'} = \omega^A. \tag{4.19}$$

Sadržavanje jedne realne točke povlači sadržavanje cijelog realnog nul geodezika

$$x^{AA'} = x_0^{AA'} + b\overline{\pi}^A \pi^{A'}, \quad b \in \mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Ako definiramo $\mathbf{N} \subset \mathbf{T}$ kao skup svih nul twistora (7-realnodimenzionalna regija), a $P\mathbf{N} \subset P\mathbf{T}$ kao njegov projektivni prostor (5-realnodimenzionalna mnogostrukost), svaka točka $P\mathbf{N}$ odgovara, osim jednoj α-ravnini, jednom realnom nul geodeziku i time su pokriveni svi realni nulgeodezici na $\mathbf{M}$.

Za dva nul twistora Z^α, Y^α lako se pokaže da se njihovi odgovarakuću nul geodezici na $\mathbf{M}$ sijeku ako vrijedi $Z^\alpha \overline{Y}_\alpha = 0$. Obratno, za dva nul twisora sa $Z^\alpha \overline{Y}_\alpha = 0$ odgovarajući nul geodezici se sijeku na $\mathbf{M^c}$ (moguće je da se sijeku na nul stošcu u beskonačnosti).

Linearne kombinacije ovih dvaju nul twistora

$$X^\alpha = cZ^\alpha + dY^\alpha, \quad c, d \in \mathbb{C}, \tag{4.21}$$

definiraju kompleksnu 2-ravninu (4-realnodimenzionalnu) u $\mathbf{T}$, a njihov projektivni prostor, tzv. projektivna linija L_p, koja je topološki Riemannova sfera izomorfna realnoj sferi S^2. Budući da je twistorni produkt Z^α i Y^α nula, međusobni produkti svih twistora X^α bit će također nula, odnosno sve točke L_p odgovaraju nul geodezicima na $\mathbf{M^c}$ koji se sijeku u nekoj točki p. Skup svih nul geodezika, odnosno svjetlosnih linija, kroz točku prostorvremena p čine *nebesku sferu* S^2. Zaključujemo da kompleksna 2-ravnina nul twistora odgovara svjetlosnom stošcu neke točke kompaktificiranog prostorvremena, a projektivna linija te ravnine mu je izomorfna.

5 Primjene twistornog formalizma

Twistorna teorija generalno je u stadiju razvijanja formalizma koji bi lako mogao biti ključan u daljnjem razvoju i ujedinjavanju fizike. No već postoje određene konkretne primjene u raznim područjima teoretske fizike i matematike.

Jedna od osnovnih primjena twistorne teorije nalazi se u rješavanju jednadžbi polja bezmasenih čestica. Ono do čega nas ova tema odmah dovede su konturni integrali i, posljedično tome, analitičko produljenje kompleksnih funkcija. Tražeći ga, često je potrebno više kopija kompleksnog prostora koje se zatvore jedne u druge kako bismo dobili holomorfnu funkciju bez skokova. Grana matematike dobivenih prostora naziva se kohomologija snopa (*sheaf cohomology*) te je detaljno proučavana u sklopu teorije twistora.

Funkcije twistorne varijable imaju aktivniju ulogu u teoriji uvrnutog fotona (*twisted photon*) i Yang-Mills polja i jednadžbi. Ovdje se dalje razvija matematika twistora i primjenjuje na Maxwellova polja.

Ostala područja vrijedna spomena su teorija nelinearnog gravitona, kvazi-lokalni impuls i kružni impuls te kvantizacija twistora, gravitizacija kvantne mehanike, integrabilni sustavi i same diferencijalne jednadžbe.

Zaključak

Potrebom za boljim okvirom za ujedinjavanje gravitacijske i kvantne teorije te prirodnošću kompleksifikacije motivirano je uvođenje formalizma koji fundamentalno drugačije gleda objekte u prostorvremnu i koristi kompleksnu analizu, Liejeve grupe i geometriju. Iznesene su osnove spinornog i twistornog formalizma. Dobiveno je mnoštvo analitičkih i geometrijskih alata, a izvan opsega ovog seminara ono se još daleko širi. Predstavljene su osnovne derivacije, jednadžbe, strukture prostora i grupe transformacija. Objašnjena je geometrija twistornog prostora i veze s prostorvremenom Minkowskog. Konkretno, nul twistor kao točka twistornog prostora identificiran je s nul geodezikom, tj. svjetlosnom linijom u prostorvremenu. Cijeli svjetlosni stožac neke točke, ili ekvivalentno, sama točka prostorvremena identificirana je s projektivnom linijom, odnosno Riemannovom sferom u twistornom prostoru. Prezentirane su i konformalne transformacije, koje igraju ulogu u povezivanju i identificiranju različitih prostora. Ukratko su također iznesena osnovna područja primjene teorije i utjecaji na matematiku.

Izvori

1. Huggett, S. A., Tod, K. P. *An Introduction to Twistor Theory.* 2nd ed., Cambridge UP, 1994.

2. R. Penrose, "The Central programme of twistor theory," Chaos Solitons Fractals **10** (1999), 581-611 doi:10.1016/S0960-0779(98)00333-6

3. Stewart, John. *Advanced General Relativity.* Cambridge UP, 1991.