Gravitacija kao kvadrat baždarne teorije

David Orešković*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

Mentor: dr. sc. Larisa Jonke
(Dated: 26. siječnja 2020.)

Najbolji opis jake, slabe i elektromagnetske sile danas je dan s takozvanim baždarnim teorijama. One uključuju efekte kvantne fizike i specijalne teorije relativnosti objedinjene u konzistentnoj teoriji poznatoj kao kvantna teorija polja. S druge strane, opis gravitacije je dan s Einsteinovom općom teorijom relativnosti (OTR), koja nam govori kako zakrivljenost prostor-vremena reagira na prisustvo energije i impulsa. Glavni kandidat za kvantnu teoriju koja bi u prikladnom limesu uključivala OTR je teorija struna. U ovoj teoriji, fundamentalni objekti nisu točkaste čestice poput elektrona ili fotona, već jednodimenzionalni objekti znani kao strune koje mogu biti otvorene ili formirati zatvorene petlje. U ovom seminaru, polazeći od KLT (Kawai-Lewellen-Tye relacija) relacija, pokazat ćemo da postoji određena perturbativna dualnost (dvostruka kopija) između baždarnih i gravitacijskih teorija. Konkretnije, amplitude raspršenja u gravitaciji se mogu dobiti direktno iz Yang-Mills teorije. Nadalje, analizirat ćemo rješenja Einsteinove jednadžbe u Kerr-Schildovim koordinatama i povezati razultate s prikladnim baždarnim teorijama.

I. UVOD

Unatoč brojnim eksperimentalnim potvrdama standardnog modela (SM) i opće teorije relativnosti, postoji mnogo misterija koji su naizgled neobjašnjivi u okviru ovih teorija. Primjerice, ne možemo sa sigurnošću objasniti dominaciju materije nad antimaterijom. Osim toga, moderna astrofizička opažanja predviđaju postojanje tamne materije i tamne energije koji nisu prisutni u standardnom modelu. S druge strane, OTR se lomi u ekstremnim točkama poput centra crne rupe ili u trenutku velikog praska. Vjeruje se stoga da su OTR i SM dio nekog većeg teoretskog okvira, koji bi uključivao i kvantne efekte gravitacijske sile. Problem kvantizacije opće teorije relativnosti se očituje u problemu renormalizacije. U standardnom modelu, ultraljubičate divergencije se mogu ukloniti putem redefinicije polja i parametara koji ulaze u teoriju. Ista procedura ne vrijedi za OTR, stoga kažemo da teorija nije renormalizabilna. Ovo ne znači da kvantna mehanika nije kompatibilna s gravitacijom, već samo da bi se kvantna gravitacija trebala tretirati kao efektivna teorija polja daleko ispod Planckove skale od 10^{19}Gev. Računi u kvantnoj gravitaciji su iznimno zahtjevni, i Feynmanova pravila mogu sadržavati broj članova do reda veličine $\sim 10^2$. Logično je onda zapitati se mogu li se ekvivalentni rezultati dobiti putem lakših računa u bližim teorijama. Jedna takva tehnika je razvijena 2010. godine: "teorija dvostruke kopije". Prema njoj, gravitacijske amplitude raspršenja se mogu dobiti iz baždarnih uz uvjet da knetički i bojni faktori zadovoljavaju određenu dualnost karakteriziranu s tzv. BCJ (Bern-Carrasco-Johansson) relacijama. Osim toga, KLT relacije vrijede samo za tree-level amplitude, dok se vjeruje da je dvostruka kopija primjenjiva u svim redovima računa smetnje.

* doreskov@dominis.phy.hr

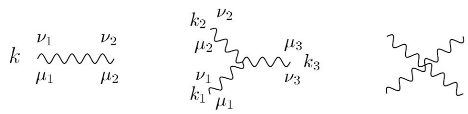
II. FEYNMANOVA PRAVILA ZA GRAVITACIJU

U teorijama kvantne gravitacije, hipotetska čestica koja prenosi gravitacijsku silu zove se graviton. Iz činjenice da je sila dugodosežna, zaključuje se da graviton mora biti bezmasen. Pored toga, graviton mora biti bozon spina dva jer je izvor gravitacije tenzor energije-impulsa $T^{\mu\nu}$ (tenzor ranka dva). Za usporedbu, u elektromagnetizmu imamo foton spina jedan koji se veže na četverostruju (tenzor ranka jedan). Konkretno, graviton možemo opisati sa simetričnim tenzorskim poljem ranka dva čiji trag isčezava. Bitno je napomenuti i da u četiri dimenzije graviton ima dva nezavisna stupnja slobode. Simetričan tenzor ranka dva ima deset stupnjeva slobode. Četiri oduzimamo zbog Bianchijevih identiteta, te uklanjamo još četiri zbog invarijantnosti pod prostor-vremenskim difeomorfizmima, što vodi na dva stupnja slobode.

Raspršenja gravitona u ravnom prostoru su opisana Feynmanovim diagramima. Feynmanova pravila se konstruiraju iz Einstein-Hilbertovog Lagranžijana koristeći procedure kvantne teorije polja. Kao što je vidljivo na slici 1, svakoj nozi moramo pridodati dva prostor-vremenska indeksa (μ_i, ν_i), gdje je s k_i označen četveroimpuls gravitona. Kako smo spomenuli u uvodnim razmatranjima, dijagrami u gravitaciji su znatno kompliciraniji od onih u baždarnim teorijama, i vrhovi mogu sadržavati relativno velik broj članova. Primjerice, u tzv. De Donderovom baždarenju, tro-gravitonski vrh je dan s:

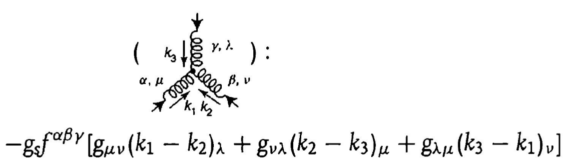
$$G_{DeDonder}^{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3}(k_1.k_2,k_3) \sim k_1 \cdot k_2 \eta^{\mu_1\nu_1}\eta^{\mu_2\nu_2}\eta^{\mu_3\nu_3} + k_1^{\mu_3}k_2^{\nu_3}\eta^{\mu_1\mu_2}\eta^{\nu_1\nu_2} + \textit{mnogo ostalih clanova}. \tag{1}$$

Kako bismo uveli ideju gravitacije kao "kvadrata"



Slika 1. Feynmanov propagator i vrhovi asocirani sa tri i četiri gravitona.

baždarne teorije, osvrnimo se na Feynmanovo pravilo za tro-gluonski vrh u Yang-Mills teoriji prikazan na slici 2.



Slika 2. Tro-gluonski vrh.

Usporedbom izraza (1) sa Feynmanovim pravilom za vrh interakcije tri gluona, vidimo da možemo pokušati faktorizirati gravitacijske amplitude preko produkta baždarnih. U najmanju ruku, takva procedura daje šest prostor-vremenskih indeksa asociranih sa svakim članom u tro-gravitonskom vrhu. Osim toga, očigledno je potrebno eliminirati bojne faktore (izražene preko strukturnih konstanti), te redefinirati konstante vezanja. Pretpostavimo stoga da možemo pisati:

$$G^{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3}_{faktorizirano}(k_1,k_2,k_3) \sim V^{\mu_1\mu_2\mu_3}_{YM}(k_1,k_2,k_3)\cdot V^{\nu_1\nu_2\nu_3}_{YM}(k_1,k_2,k_3). \tag{2}$$

Dva indeksa svakog gravitona su pritom označena sa $\mu_i\nu_i$ (gdje $i = 1,2,3$), tako da polje gravitona pišemo kao $h_{\mu_i\nu_i}$. Nažalost, ovakve relacije ne vrijede u standardnim formulacijama gravitacije. U De Donderovom baždarenju, tro-čestični vrh sadrži tragove gravitona, odnosno kontrakcije indeksa istog gravitona. Kao što smo rekli, fizikalnim gravitonima trag isčezava, no u Feynmanovim dijagramima općenito je potrebno zadržati i članove takvog tipa. S druge strane, nužan uvjet za faktorizaciju gravitacijske amplitude preko Yang-Mills vrhova (2), jest da se "lijevi" indeksi μ_i nikad ne kontrahiraju sa "desnim" ν_i indeksima. Više o tome kako urediti Einstein-Hilbertov Lagranžijan tako da bude kompatibilan sa teorijom struna (koja uklanja spomenute probleme), proučit ćemo u poglavlju IV.

III. KLT (KAWAI-LEWELLEN-TYE) RELACIJE

KLT relacije povezuju tree-level amplitude otvorenih i zatvorenih struna. Konkretni izrazi su motivirani opservacijom da je operator vrha za emisiju zatvorene strune dan produktom operatora vrhova otvorenih struna:

$$V^{zatvoreno} = V^{otvoreno}_{lijevo} \times \overline{V}^{otvoreno}_{desno}. \tag{3}$$

Razmotrimo prvo na što se odnose identiteti "lijevo" i "desno" u izrazu (3). Točkaste čestice se gibaju po krivulji u prostor-vremenu koju možemo parametrizirati sa jednim parametrom kao $x^\mu(\lambda)$. Takvu krivulju zovemo "worldline". Strune, kao jednodimenzionalni objekti, u svom gibanju prebrišu 2D mnogostrukost poznatu kao "worldsheet". Prema tome, takav objekt parametriziramo s dva parametra (σ , τ). Rješenja jednadžbi gibanja u teoriji struna su općenito iskazana preko funkcija ovisnih o $\sigma \pm \tau$. Rješenja s pozitivnim predznakom se pritom odnose na "desno gibajuće", a ona s negativnim na "lijevo gibajuće" strune. Takva rješenja opisuju oscilatore koji se gibaju u suprotnim smjerovima u prostoru "worldsheet" parametara.

Općenito, za svako stanje zatvorene strune postoji Fockova dekompozicija:

$$|stanje\ zatvorene\ strune >= |stanje\ otvorene\ strune > \otimes\ |stanje\ otvorene\ strune > . \tag{4}$$

U teoriji struna, graviton je opisan kao bezmaseno stanje zatvorene strune. S druge strane, na nižim energijama se ne može razlučiti jednodimenzionalnost otvorenih struna, pa one izgledaju kao točkaste čestice, odnosno baždarni bozoni. Prema tome, izraz (4) implicira da u limesu teorije polja gravitacijsko polje zadovoljava sličnu faktorizaciju:

$$|gravitacijsko\ stanje >= |stanje\ bazdarne\ teorije > \otimes\ |stanje\ bazdarne\ teorije > . \tag{5}$$

Za tree-level amplitude raspršenja koje uključuju četiri i pet eksternih čestica, KLT relacije se u limesu teorije polja svode na:

$$M^{tree}_4 = -is_{12} A^{tree}_4(1,2,3,4)\tilde{A}^{tree}_4(1,2,4,3) \tag{6}$$

i

$$M_5^{tree} = -is_{12}s_{34}A_5^{tree}(1,2,3,4,5)\tilde{A}_5^{tree}(2,1,4,3,5)+ \\ is_{13}s_{24}A_5^{tree}(1,3,2,4,5)\tilde{A}_5^{tree}(3,1,4,2,5). \quad (7)$$

M_n^{tree} su tree-level gravitacijske amplitude za n čestica bez konstanti vezanja. Ukupna amplituda je tada dana s

$$\mathcal{M}_n^{tree} = \left(\frac{\kappa}{2}\right)^{n-2} M_n^{tree}, \quad (8)$$

gdje izraz $\kappa^2 = 32\pi G_N$ povezuje konstantu vezanja s Newtonovom gravitacijskom konstantom. $A_n^{tree}(i_1, i_2, ..., i_n)$ i $\tilde{A}_n^{tree}(j_1, j_2, ..., j_n)$ su bojno poredane parcijalne amplitude u (možda različitim) baždarnim teorijama, te $s_{ij} = (k_i + k_j)^2$. Član k_i je dakako četveroimpuls i-te čestice, dok su parcijalne amplitude objekti s kojima ćemo se detaljno baviti u u poglavlju V.

IV. EINSTEIN-HILBERTOV LAGRANŽIJAN I BAŽDARNE TEORIJE

Promotrimo Einstein-Hilbertov i Yang-Mills Lagranžijan:

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{-g}R, \quad \mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}. \quad (9)$$

Na prvi pogled, ova dva Lagranžijana ne otkrivaju očitu faktorizaciju koja bi objasnila KLT relacije. Mogli bismo čak i zaključiti kako KLT relacije ne mogu vrijediti u čistoj Einsteinovoj gravitaciji. Ipak, kao što ćemo vidjeti, Einstein-Hilbertov Lagranžijan se može urediti u formu konzistentnu s KLT jednadžbama.

Ako imamo polje gravitona $h_{\mu\nu}$, lijevi indeks μ dolazi od lijevo gibajuće strune, te desni indeks ν od desno gibajuće strune. U niskoenergetskoj formi KLT relacija, svaki pojedini indeks dolazi od jedne baždarne teorije. Radi jednostavnosti, jednu takvu baždarnu teoriju ćemo ćemo zvati "lijeva", i drugu "desna" baždarna teorija. Kako se indeksi jedne baždarne teorije ne mogu kontrahirati s indeksima iz druge, moramo urediti Lagranžijan tako da ne sadrži članove koji uključuju kontrakcije takvog tipa. U De Donderovom baždarenju, metriku možemo pisati u formi

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (10)$$

gdje je $\eta_{\mu\nu}$ metrika Minkowskog, dok $h_{\mu\nu}$ predstavlja polje gravitona. U ovom trenutku se nećemo zamarati činjenicom da graviton nužno proizlazi iz ovakve definicije metrike. Detaljnije razmatranje ćemo provesti u poglavlju VI, dok je za sada bitno napomenuti samo da se indeksi u gravitonskom polju dižu i spuštaju s metrikom Minkowskog.

Uz ovakvu formu metrike, kvadratični dio Einstein-hilbertovog Lagranžijana poprima idući oblik:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\partial^2 h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}h_\mu{}^\mu \partial^2 h_\nu{}^\nu. \quad (11)$$

Prvi član je prihvatljiv jer se lijevi i desni indeksi međusobno ne kontrahiraju. Problem proizlazi iz dijela s tragom budući da $h_\mu{}^\mu$ kontrahira lijevi indeks gravitona s desnim. Kako bismo uklonili neželjene članove, uvodimo pomoćno skalarno polje ϕ imena "dilaton". Promotrimo stoga Lagranžijan za gravitaciju s uključenim vezanjem na skalar:

$$\mathcal{L}_{EH} = \frac{2}{\kappa^2}\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi. \quad (12)$$

Kako je polje dilatona kvadratično u Lagranžijanu, ono se ne pojavljuje u tree-level dijagramima koji uključuju samo gravitone. Prema tome, ne mijenja S-matricu eksternih gravitona. U De Donderovom baždarenju, kvadratični dio Lagranžijana s dilatonom postaje:

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\partial^2 h^{\mu\nu} + \frac{1}{4}h_\mu{}^\mu \partial^2 h_\nu{}^\nu - \phi\partial^2\phi. \quad (13)$$

Član s tragom možemo ukloniti sa redefinicijama polja

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\sqrt{\frac{2}{D-2}}\phi \quad (14)$$

i

$$\phi \to \frac{1}{2}h_\mu{}^\mu + \sqrt{\frac{D-2}{2}}\phi, \quad (15)$$

gdje D predstavlja broj dimenzija. Mogli bismo biti zabrinuti da će ovakve redefinicije polja utjecati na amplitude raspršenja, no one zapravo ne mijenjaju dio gravitonskog polja bez traga. Polje $h_{\mu\nu}$ bez traga možemo pisati u formi

$$P_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{D}\eta_{\mu\nu}h, \quad (16)$$

pri čemu koristimo činjenicu da se indeksi na gravitonskom polju dižu i spuštaju s metrikom Minkowskog pa vrijedi: $h = h_\nu{}^\nu = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Kada uvrstimo nova polja u izraz za $P_{\mu\nu}$ (uz identitet $\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = D$), lako se je uvjeriti da se $P_{\mu\nu}$ ne mijenja. Prema tome, redefinirana polja ne mogu utjecati na amplitude fizikalnih gravitona kojima trag iščezava. S poljima uvedenim u izrazima (14) i (15), kinetički dio Lagranžijana poprima oblik bez problematičnih članova:

$$\mathcal{L}_2 \to -\frac{1}{2} h^{\mu}{}_{\nu} \partial^2 h_{\mu}{}^{\nu} + \phi \partial^2 \phi. \tag{17}$$

Naravno, preuređenje kvadratičnog člana predstavlja samo prvi korak. Kako bi Einstein-Hilbertov Lagranžijan bio kompatibilan s KLT relacijama, trebamo imati set polja u kojima se svi prostor-vremenski indeksi mogu separirati u "lijeve" i "desne klase". Kako bismo ovo postigli, moramo eliminirati sve članove oblika:

$$h_{\mu}{}^{\mu}, \quad h_{\mu}{}^{\nu} h_{\nu}{}^{\lambda} h_{\lambda}{}^{\nu}, \quad ... \tag{18}$$

Mi to nećemo ovdje raditi i razmatranja ćemo zaključiti sa tvrdnjom da postoji određeno ne-linearno baždarenje i daljnja redefinicija polja, takva da se off-shell tro-gravitonski vrh može prikazati preko tro-gluonskih vrhova u Yang-Mills teoriji. Konkretno vrijedi

$$\begin{aligned} iG^{\mu_1\nu_1,\mu_2\nu_2,\mu_3\nu_3}(k_1,k_2,k_3) = \\ -\frac{i}{2}\left(\frac{\kappa}{2}\right)(V_{GN}^{\mu_1\mu_2\mu_3}(k_1,k_2,k_3) \times V_{GN}^{\nu_1\nu_2\nu_3}(k_1,k_2,k_3) + \\ V_{GN}^{\mu_2\mu_1\mu_3}(k_2,k_1,k_3) \times V_{GN}^{\nu_2\nu_1\nu_3}(k_2,k_1,k_3)), \end{aligned} \tag{19}$$

gdje je

$$V_{GN}^{\mu\nu\rho}(k_1,k_2,k_3) = i\sqrt{2}(k_1^{\rho}\eta^{\mu\nu} + k_2^{\mu}\eta^{\nu\rho} + k_3^{\nu}\eta^{\rho\mu}) \tag{20}$$

bojno poredan Gervais-Neveu Yang-Mills tro-gluonski vrh lišen bojnih faktora.

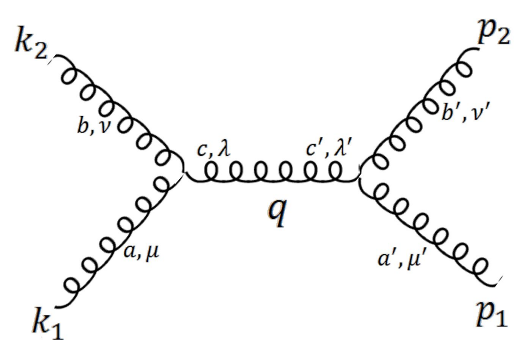
Prije nego krenemo s konstrukcijom dvostruke kopije, analizirat ćemo kako interpretirati gravitaciju kao produkt baždarnih teorija putem brojanja stupnjeva slobode. U D dimenzija, bezmaseni vektor ima $(D-2)$ stupnja slobode, dok ih bezmaseni tenzor ranka 2 ima $(D-2)^2$. Tenzorski stupnjevi slobode uključuju trag, simetričan dio bez traga i antisimetričan dio. Stanje u gravitacijskoj teoriji možemo predstaviti s polarizacijskim tenzorom $\varepsilon_{\mu\nu}$ preko produkta polarizacijskih vektora:

$$\varepsilon_{\mu\nu}(k) \sim \varepsilon_{\mu}(k)\tilde{\varepsilon_{\nu}}(k). \tag{21}$$

Za $D = 4$, dva stanja u baždarnim teorijama se kvadriraju u četiri (bezmaseni bozon ima dva stupnja slobode). Od ta četiri stupnja slobode, dva asociramo sa simetričnim tenzorskim poljem bez traga koje identificiramo kao graviton ($h_{\mu\nu} = h_{(\mu\nu)}$). Preostala dva stupnja slobode se odnose na antisimetrično polje $h_{[\mu\nu]}$ i dio s tragom (dilaton). Antisimetrizirano polje fizikalnog gravitona (kao i njegov trag) iščezava, pa se dodatna polja ne pojavljuju u dijagramima za račun gravitacijskih amplituda. Ipak, očuvanje broja stupnjeva slobode direktno implicira da ih moramo uključiti u Lagranžijan. Ovo jednostavno razmatranje nam daje još jedan uvid u razlog uvođenja skalarnog dilatona.

V. DVOSTRUKA KOPIJA

U ovom poglavlju ćemo pokazati kako konstruirati općenitu gravitacijsku amplitudu koristeći samo parametre iz Yang-Mills teorije. Započnimo stoga naše razmatranje s raspršenjem koje uključuje četiri eksterna gluona. Ukupnoj amplitudi takvog procesa doprinose s-,t- i u-kanali, te dijagram koji uključuje vezanje četiri čestice. Na slici 3 je prikazan Feynmanov dijagram za raspršenje u s-kanalu.



Slika 3. S-kanal.

Koristeći Feynmanova pravila u Yang-Mills teoriji (poput onog na slici 2), dobivamo izraz za amplitudu u s-kanalu

$$\mathcal{A}_s = g_s^2 \frac{c_s n_s'}{s}, \tag{22}$$

gdje

$$\begin{aligned} n_s' = -(\varepsilon_{\mu}(k_1)\varepsilon_{\nu}(k_2)\varepsilon^*_{\mu'}(k_4)\varepsilon^*_{\nu'}(k_3))g_{\lambda\lambda'} \cdot \\ (g^{\mu\nu}(k_1-k_2)^{\lambda} + g^{\nu\lambda}(k_2+q)^{\mu} + g^{\lambda\mu}(-q-k_1)^{\nu}) \cdot \\ (g^{\mu'\nu'}(-k_4+k_3)^{\lambda'} + g^{\nu'\lambda'}(-k_3-q)^{\mu'} + \\ g^{\lambda'\mu'}(q+k_4)^{\nu'}), \end{aligned} \tag{23}$$

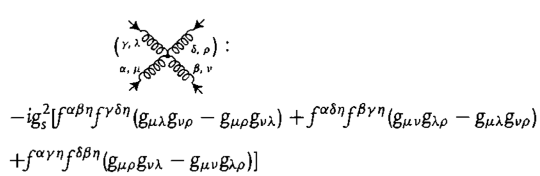
i

$$c_s = f^{abc} f^{a'b'c}. \tag{24}$$

Pritom vrijedi $s = q^2 = (k_1 + k_2)^2$, te smo napravili zamjene $p_2 \to k_3$ i $p_1 \to k_4$. Prva stvar koju je bitno uočiti jest da se u svim računima koji uključuju samo tro-gluonske vrhove bojni faktori uvjek mogu odvojiti od kinetičkih. Odnosno mogu se isključiti tako da množe ostatak izraza u jednadžbi za amplitudu pojedinog dijagrama. U našem primjeru, bojni faktor c_s je dan preko produkta strukturnih konstanti, dok kinetički član n'_s ovisi o polarizacijskim vektorima i četveroimpulsima eksternih čestica. Slični računi za t- i u-kanale vode na ukupnu amplitudu koja uključuje samo tro-čestične interakcije:

$$\mathcal{A}_s + \mathcal{A}_t + \mathcal{A}_u = g_s^2 \left(\frac{c_s n'_s}{s} + \frac{c_t n'_t}{t} + \frac{c_u n'_u}{u} \right). \tag{25}$$

Kako bismo dobili ukupnu amplitudu, moramo uključiti i četvrti dijagram koji je (zajedno sa pripadnim Feynmanovim pravilom) prikazan na slici 4.



Slika 4. Vrh interakcije četiri gluona.

Vrh sa četiri gluona sadrži tri člana proporcionalna produktu strukturnih konstanti. Koristeći svojstvo da su one antisimetrične za zamjenu bilo koja dva indeksa, lako se je uvjeriti da produkt strukturnih konstanti u svakom pojedinom članu odgovara bojnom faktoru u s-,t- ili u-kanalu. Četvrti dijagram se dakle može apsorbirati u prva tri tako da redefiniramo kinetičke članove. Primjerice, možemo napraviti zamjenu

$$n'_s \to n_s = n'_s + f_s s, \tag{26}$$

gdje je f_s funkcija koja reproducira pripadni član u vrhu sa četiri gluona. Primjetimo i da ju moramo pomnožiti sa prikladnom Mandelstamovom varijablom kako bi poništila prisustvo propagatora u izrazu (22). Uz ovako definirane kinetičke članove, ukupna amplituda raspršenja jest:

$$\mathcal{A} = g_s^2 \left(\frac{c_s n_s}{s} + \frac{c_t n_t}{t} + \frac{c_u n_u}{u} \right). \tag{27}$$

Ovaj račun nam sam po sebi nije od velike koristi za konstrukciju dvostruke kopije. Kao što ćemo vidjeti, glavni oslonac tehnike su KLT relacije. Riječ je o jednadžbama koje uključuju parcijalne amplitude, a s takvim objektima se još nismo sreli. Bez obzira na to, uveli smo neke ideje koje ćemo prenijeti u naredna razmatranja.

Za tree-level dijagrame, ukupna amplituda za m eksternih gluona se može dobiti preko dekompozicije boje

$$\mathcal{A}_m^{tree} = g_s^{m-2} \sum_{P(2,\dots m)} [Tr\,(T^{a_1}T^{a_1} \dots T^{a_m}) \cdot A_m^{tree}(1,2,\dots,m)], \tag{28}$$

gdje su $A_m^{tree}(1,2,...,m)$ tree-level bojno poredane parcijalne amplitude. T^{a_i}-ovi su generatori baždarne transformacije koji definiraju strukturne konstante preko relacija:

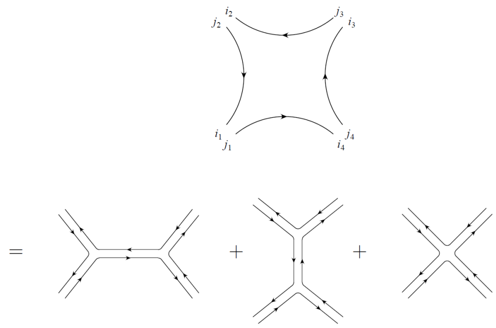
$$\tilde{f}^{abc} = i\sqrt{2} f^{abc} = Tr\left([T^a, T^b]T^c)\right). \tag{29}$$

Suma u (28) ide po svim permutacijama osim onih cikličkih, što je ekvivalentno držanju prve noge fiksnom. Napomenimo još da u parcijalnoj amplitudi $A_m^{tree}(1,2,...,i,...,m)$, i-toj vanjskoj nozi pridjeljujemo četveroimpuls k_i i boju a_i.

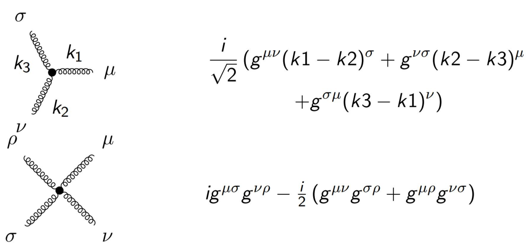
Okrenimo se sada opet poznatom primjeru gdje $m = 4$. Uz zamjene u tragu $T^{a_i} \to i$, dekompozicija boje svodi izraz za amplitudu na:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{tree} = g_s^2[&Tr(1\,2\,3\,4)A_4^{tree}(1,2,3,4) + \\ &Tr(4\,3\,2\,1)A_4^{tree}(4,3,2,1) + Tr(1\,3\,2\,4)A_4^{tree}(1,3,2,4) + \\ &Tr(4\,2\,3\,1)A_4^{tree}(4,2,3,1) + Tr(1\,2\,4\,3)A_4^{tree}(1,2,4,3) + \\ &Tr(3\,4\,2\,1)A_4^{tree}(3,4,2,1)]. \end{aligned} \tag{30}$$

Da bismo izračunali parcijalne amplitude, gluone poredamo u smjeru kazaljke na satu i povučemo bojne linije tako da spojimo sve susjedne čestice. U idućem koraku, linije deformiramo tako da konstruiramo sve Feynmanove dijagrame koji doprinose toj parcijalnoj amplitudi. Procedura je prikazana na slici 5. Primjerice, ukoliko želimo izračunati $A_4^{tree}(1,3,2,4)$, donjoj lijevoj nozi pridjelimo četveroimpuls k_1, gornjoj lijevoj k_3, itd. Uvjek pratimo smjer kazaljke na satu. Jednom kad konstruiramo dijagrame parcijalnih amplituda, koristimo Feynmanova pravila koja se razlikuju od onih "standardnih". Na slici 6 je dan pregled takvih pravila za tro- i četvero-gluonske vrhove. Bitno je uočiti da nova Feynmanova pravila ne sadrže bojne faktore, oni su već uključeni u izraz za ukupnu amplitudu kroz tragove generatora. Spomenimo i da izraz za gluonski propagator ostaje isti kao u standardnim dijagrama do na Kroneckerov simbol koji osigurava očuvanje boje.



Slika 5. Feynmanovi dijagrami koji odgovaraju parcijalnoj amplitudi za četiri gluona.



Slika 6. Feynmanova pravila za parcijalne amplitude.

Parcijalne amplitude zadovoljavaju određena pravila od kojih ćemo navesti samo ona koja će nam biti od koristi. Najjednostavnija od ovih su cikličko pravilo i pravilo refleksije:

$$A_m^{tree}(1,2...,m) = A_m^{tree}(2,...,m,1),$$
$$A_m^{tree}(1,2...,m) = (-1)^m A_m^{tree}(m,...,2,1). \tag{31}$$

Osim toga, postoji i pravilo "odvezivanja fotona"

$$\sum_{\sigma\in cyclic} A_m^{tree}(1,\sigma(2,3,...,m)) = 0, \tag{32}$$

gdje suma ide po svim cikličkim permutacijama nogu 2,3,...,m. Ovo pravilo slijedi iz zamjene $T^{a_1}\to 1$ u izrazu za ukupnu amplitudu, što odgovara zamjeni jedne noge sa "fotonom". Amplituda tada mora iščezavati jer se foton ne može direktno vezati na gluon. Koristeći pravilo refleksije, možemo pojednostaviti izraz (30) koji tada poprima oblik

$$\mathcal{A}_4^{tree} = g_s^2[\overline{Tr}(1\,2\,3\,4)A_4^{tree}(1,2,3,4)+$$
$$\overline{Tr}(1\,3\,2\,4)A_4^{tree}(1,3,2,4)+\overline{Tr}(1\,2\,4\,3)A_4^{tree}(1,2,4,3)], \tag{33}$$

gdje smo definirali $\overline{Tr}(i_1\; i_2\; i_3\; i_4) = Tr(i_1\; i_2\; i_3\; i_4) + Tr(i_4\; i_3\; i_2\; i_1)$.

Za izračun parcijalnih amplituda koristimo konvenciju u kojoj su svi impulsi eksternih nogu izlazni. Prikladne Mandelstamove varijable su tada $s=(k_1+k_2)^2$, $t=(k_2+k_3)^2$ i $u=(k_1+k_3)^2$, te vrijedi poznata relacija $s+t+u=0$. Koristeći Feynmanove dijagrame sa slike 5 i pripadna Feynmanova pravila, $A_4^{tree}(1,2,3,4)$ možemo zapisati u idućem obliku:

$$A_4^{tree}(1,2,3,4) = \frac{n'_s}{s} + \frac{n'_t}{t} + n_4. \tag{34}$$

Dakako, n'_s i n'_t su kinetički faktori asocirani sa s- i t-kanalom koji ovise o četveroimpulsima i polarizacijskim vektorima. Član n_4 dolazi od četvero-gluonskog vrha i ovisi samo o polarizacijskim vektorima. Slično kao u prijašnjem razmatranju, n_4 možemo apsorbirati u ostale kinetičke članove uz zamjene $n_s = n'_s + sn_4$ i $n_t = n'_t + tn_4$. Tada imamo:

$$A_4^{tree}(1,2,3,4) = \frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t}. \tag{35}$$

Primjetimo da ovi kinetički članovi u principu nisu isti kao oni u izrazu (27) jer potječu od drugačijih Feynmanovih pravila, ali njihova razlika se mora očitovati samo u množenju s nekom bezdimenzionalnom konstantom. Ukoliko vrijedi izraz za dekompoziciju boje (28), u konačnici moramo dobiti rezultat ekvivalentan onom u jednadžbi (27). Kako je poredak gluona ove parcijalne amplitude jednak fizikalnom poretku kao na slici 3, a tragovi generatora doprinose samo s bojnim faktorima, doneseni zaključak slijedi odmah.

Parcijalnoj amplitudi $A_4^{tree}(1,3,2,4)$ doprinose isti dijagrami, ali u nefizikalnom poretku. Možemo stoga pisati

$$A_4^{tree}(1,3,2,4) = \frac{n_s(1,3,2,4)}{s(1,3,2,4)} + \frac{n_t(1,3,2,4)}{t(1,3,2,4)}, \tag{36}$$

gdje je vrh sa četiri gluona već apsorbiran. Cilj nam je iskazati sve članove preko onih fizikalnih, pa primjećujemo da vrijedi $s(1,3,2,4)=(k_1+k_3)^2=u$ i $t(1,3,2,4)=(k_3+k_2)^2=t$. Osim toga, odmah se vidi da je dijagram s-kanala u poretku (1,3,2,4) ekvivalentan dijagramu u-kanala u fizikalnom poretku. Mora dakle vrijediti $n_s(1,3,2,4)=n_u(1,2,3,4)=n_u$. Dijagram t-kanala u (1,3,2,4) redoslijedu je isti kao dijagram t-kanala u fizikalnoj reprezentaciji do na zamjenu dvije noge na tro-gluonskom vrhu. Parcijalne amplitude posjeduju svojstvo da su antisimetrične na takve zamjene. Lako se je uvjeriti da zamjene $\mu\to\nu$, $\nu\to\mu$, $k_1\to k_2$ i $k_2\to k_1$ u jednadžbi (23) induciraju minus predznak koji množi čitav izraz. Prema tome vrijedi $n_t(1,3,2,4) = -n_t(1,2,3,4) = -n_t$ i

$$A_4^{tree}(1,3,2,4) = \frac{n_u}{u} - \frac{n_t}{t}. \tag{37}$$

Sličan postupak daje rezultat i za posljednju parcijalnu amplitudu:

$$A_4^{tree}(1,2,4,3) = -\frac{n_s}{s} - \frac{n_u}{u}. \tag{38}$$

Izraz (33) sada možemo urediti u ovakvu formu:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4^{tree} = g_s^2 \Big(&(\overline{Tr}(1\,2\,3\,4) - \overline{Tr}(1\,2\,4\,3))\frac{n_s}{s} + \\ &(\overline{Tr}(1\,2\,3\,4) - \overline{Tr}(1\,3\,2\,4))\frac{n_t}{t} + \\ &(\overline{Tr}(1\,3\,2\,4) - \overline{Tr}(1\,2\,4\,3))\frac{n_u}{u}\Big).\end{aligned} \tag{39}$$

Konačno, kombinacije tragova možemo pretvoriti u strukturne konstante preko

$$\overline{Tr}(1\,2\,3\,4) - \overline{Tr}(1\,2\,4\,3) = \tilde{f}^{a_1a_2e}\tilde{f}^{ea_3a_4}, \tag{40}$$

iz čega slijedi izraz za ukupnu amplitudu koju sada možemo pisati u formi ekvivalentnoj onoj u izrazu (27):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4^{tree} = g_s^2 \Bigg(&\frac{\tilde{f}^{a_1a_2e}\tilde{f}^{ea_3a_4}n_s}{s} + \frac{\tilde{f}^{a_2a_3e}\tilde{f}^{ea_4a_1}n_t}{t} + \\ &\frac{\tilde{f}^{a_1a_3e}\tilde{f}^{ea_2a_4}n_u}{u}\Bigg) = g_s^2 \sum_{g\in\Gamma_4} \frac{c_g n_g}{p_g^2}.\end{aligned} \tag{41}$$

U izrazu sa sumom, Γ_4 predstavlja set svih kubičnih dijagrama (s-,t- i u-kanali), c_g i n_g su bojni i kinetički faktori g-tog dijagrama, dok $1/p_g^2$ predstavlja pripadni propagator. Izraz možemo poopćiti na općenitu tree-level amplitudu s m eksternih gluona

$$\mathcal{A}_m^{tree} = g_s^{m-2} \sum_{g\in\Gamma_m} \frac{c_g n_g}{\prod_{l\in P_g} p_l^2}, \tag{42}$$

gdje suma ide po setu svih kubičnih dijagrama Γ_m (njih $(2m-5)!!$), u koje su četvero-gluonski vrhovi već apsorbirani. Produkt u nazivniku ide po setu P_g svih propagatora sa četveroimpulsima p_l^2 koji se pojavljuju u g-tom dijagramu.

Preostaje nam još pokazati da kinetički članovi zadovoljavaju određeno svojstvo koje će biti od esencijalne važnosti za izračun gravitacijskih amplituda. Koristeći pravila (31), vidimo da parcijalne amplitude za m=4 zadovoljavaju iduće relacije:

$$\begin{aligned}A_4^{tree}(1,2,4,3) &= A_4^{tree}(1,3,4,2) \quad i \\ A_4^{tree}(1,3,2,4) &= A_4^{tree}(1,4,2,3).\end{aligned} \tag{43}$$

Tada iz izraza (32) slijedi:

$$\begin{aligned}A_4^{tree}(1,2,3,4) + A_4^{tree}(1,4,2,3) + \\ A_4^{tree}(1,3,4,2) = 0.\end{aligned} \tag{44}$$

Osim već navedenih svojstva parcijalnih amplituda, postoji i dodatni set linearnih relacija poznatih kao BCJ relacije. Identitet odvezivanja fotona (32) se općenito ne oslanja na identitete spinova i polarizacijskih vektora. Prema tome, jedini netrivijalan način da suma (44) iščezne je tako da bude ekvivalentna sumi Mandelstamovih varijabli:

$$\begin{aligned}A_4^{tree}(1,2,3,4) + A_4^{tree}(1,4,2,3) + \\ A_4^{tree}(1,3,4,2) = (s+t+u)\chi = 0,\end{aligned} \tag{45}$$

pri čemu je χ neki zajednički faktor koji ovisi o polarizacijama i impulsima. Kako $A_4^{tree}(1,2,3,4)$ ima polove u varijablama s i t, očekujemo da će biti proporcionalan sa $u = -(s+t)$. Možemo onda napraviti identifikaciju:

$$A_4^{tree}(1,2,3,4) = u\chi. \tag{46}$$

Slična razmatranja vode na:

$$A_4^{tree}(1,3,4,2) = t\chi \quad i \quad A_4^{tree}(1,4,2,3) = s\chi. \tag{47}$$

Nakon eliminacije faktora χ, dobivamo idući set relacija među parcijalnim amplitudama:

$$\begin{aligned}tA_4^{tree}(1,2,3,4) &= uA_4^{tree}(1,3,4,2), \\ sA_4^{tree}(1,2,3,4) &= uA_4^{tree}(1,4,2,3) \quad i \\ tA_4^{tree}(1,4,2,3) &= sA_4^{tree}(1,3,4,2).\end{aligned} \tag{48}$$

Usporedbbom jednadžbi (48) sa izrazima (35), (37) i (38), dobivamo identitet

$$n_s = n_t + n_u, \tag{49}$$

koji je ekvivalentan Jakobijevoj relaciji:

$$\tilde{f}^{a_1a_2e}\tilde{f}^{ea_3a_4} = \tilde{f}^{a_2a_3e}\tilde{f}^{ea_4a_1} + \tilde{f}^{a_1a_3e}\tilde{f}^{ea_2a_4}. \tag{50}$$

Kada kinetički i bojni faktori zadovoljavaju isti Jakobijev identitet, kažemo da među njima postoji BCJ dualnost. Kao što ćemo uskoro vidjeti, za konstrukciju dvostruke kopije je krucijalno da ova dualnost vrijedi. Uvrstimo sada izraze za parcijalne amplitude u KLT relaciju (6). U prvom koraku dobivamo:

$$M_4^{tree} = -is\left(\frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t}\right)\left(-\frac{\tilde{n}_s}{s} - \frac{\tilde{n}_u}{u}\right). \quad (51)$$

Kada izmnožimo sve članove i uvedemo zamjene $n_s = n_t + n_u$ i $\tilde{n}_s = \tilde{n}_t + \tilde{n}_u$, dobivamo:

$$M_4^{tree} = i\left(\frac{n_s\tilde{n}_s}{s} + \frac{n_t\tilde{n}_t}{t} + \frac{n_u\tilde{n}_u}{u} + \frac{(s+t+u)n_t\tilde{n}_u}{tu}\right). \quad (52)$$

Konačno, koristeći činjenicu da suma Mandelstamovih varijabli isčezava, prema izrazu (8) gravitacijska amplituda se može zapisati u obliku:

$$\mathcal{M}_4^{tree} = i\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2 \sum_{g\in\Gamma_4} \frac{n_g\tilde{n}_g}{p_g^2}. \quad (53)$$

Prema tome, da bismo iz Yang-Mills amplitude (41) dobili gravitacijsku, dovoljno je napraviti zamjene $g_s \to \left(\frac{\kappa}{2}\right)$, $c_g \to \tilde{n}_g$, te cijeli izraz pomnožiti s imaginarnom jedinicom. Time smo proveli dvostruku kopiju. Znak tilda na kinetičkom članu dolazi iz činjenice da dvije baždarne teorije u KLT relacijama ne moraju nužno biti iste. U našem postupku, kopirali smo Yang-Mills teoriju sa samom sobom, što vodi na čistu Einsteinovu gravitaciju vezanu na dilaton i antisimetrično tenzorsko polje ranka 2. U principu, set bojnih faktora u jednoj baždarnoj teoriji možemo zamjeniti sa setom kinetičkih članova druge teorije čija grupa simetrija nije komutativna (pri čemu mora vrijediti BCJ dualnost), što rezultira sa drugačijom gravitacijskom teorijom. Ime "dvostruka kopija" upućuje na prisustvo kinetičkih faktora dviju baždarnih teorija u brojniku gravitacijske formule. Nekada se onda kaže i da je gravitacija "kvadrat" baždarne teorije, iako ne mislimo doslovno da kvadriranje baždarne teorije daje gravitacijski rezultat; svaki član se kopira zasebno, dok propagator ostaje netaknut.

Izveli smo gravitacijsku amplitudu za $m = 4$, ali rezultat se može poopćiti na proizvoljan broj eksternih čestica. Bez dokaza, recimo samo da se svi dijagrami Γ_m u izrazu (42) mogu urediti u skup setova od tri dijagrama, gdje za svaki set vrijedi BCJ dualnost: $c_i = c_j + c_k \to n_i = n_j + n_k$. U proizvoljnom baždarenju, kinetički faktori ne moraju nužno zadovoljavati Jakobijev identitet, no mogu se transformirat tako da identitet vrijedi. Općenito, faktori n_g se mogu redefinirati preko translacije $n_g \to n_g + \Delta_g$, gdje su Δ_g proizvoljne funkcije koje zadovoljavaju:

$$\sum_{g\in\Gamma_m} \frac{c_g\Delta_g}{\prod_{l\in P_g} p_l^2} = 0. \quad (54)$$

Ovo se zove generalizirana baždarna transformacija, i može se uvjek provesti tako da vrijedi BCJ dualnost. Dvostruka kopija tada nalaže da je općenita tree-level gravitacijska amplituda raspršenja za m eksternih čestica dana s:

$$\mathcal{M}_m^{tree} = i\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{m-2} \sum_{g\in\Gamma_m} \frac{\tilde{n}_g n_g}{\prod_{l\in P_g} p_l^2}. \quad (55)$$

KLT relacije vrijede samo za tree-level amplitude, no u uvodnom razmatranju smo rekli da se vjeruje kako dvostruka kopija vrijedi u svim redovima računa smetnje. Zanima nas dakle možemo li izraz (55) poopćiti na amplitude s petljama. Krenimo od tvrdnje da se općenita amplituda za m bezmasenih čestica i L petlji u d-dimenzionalnoj baždarnoj teoriji može pisati kao:

$$\mathcal{A}_m^L = i^L g_s^{m-2+2L} \sum_{g\in\Gamma_m^L} \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_g} \frac{c_g n_g}{\prod_{j\in P_g} p_j^2}. \quad (56)$$

Kao u izrazu (42), suma ide po svim kubičnim dijagramima (vrhovi sa četiri čestice su eliminirani). Potencija konstante vezanja jednaka je broju tro-čestičnih vrhova. Za svaki dijagram, integral ide po impulsima u petlji (njih L). U nazivniku se nalazi produkt impulsa svih virtualnih čestica asocoranih s g-tim dijagramom, dok član S_g predstavlja simetrijski faktor. Uz pretpostavku da dvostruka kopija vrijedi za dijagrame s petljama, izraz

$$\mathcal{M}_m^L = i^{L+1}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{m-2+2L} \sum_{g\in\Gamma_m^L} \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_g} \frac{\tilde{n}_g n_g}{\prod_{j\in P_g} p_j^2} \quad (57)$$

predstavlja m-čestičnu gravitacijsku amplitudu s L petlji. Dokaz valjanosti ovog izraza slijedi iz tzv. unitarne metode prema kojoj se dijagrami sa petljama mogu dekompozirati na tree-level dijagrame. Mi to nećemo raditi, spomenimo samo da se dekompozicija može napraviti tako da kinetički članovi zadovoljavaju BCJ dualnost, tada izraz za gravitacijsku amplitudu s petljama slijedi iz izraza (55).

Možemo i krenuti od jednadžbe (56), te zamjeniti kinetičke članove sa setom novih bojnih članova:

$$\Lambda_m^L = i^L y^{m-2+2L} \sum_{g\in\Gamma_m^L} \int \prod_{l=1}^{L} \frac{d^d p_l}{(2\pi)^d} \frac{1}{S_g} \frac{c_g\tilde{c}_g}{\prod_{j\in P_g} p_j^2}, \quad (58)$$

gdje je y prikladna konstanta vezanja. Teorija kojoj odgovara ovakva amplituda raspršenja naziva se "biadjungirana skalarna teorija". Lagranžijan koji definira teoriju glasi:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu \Phi^{aa'}\partial_\mu \Phi^{aa'} + \frac{y}{3} f^{abc} \tilde{f}^{a'b'c'} \Phi^{aa'}\Phi^{bb'}\Phi^{cc'}, \quad (59)$$

iz kojeg slijedi jednadžba gibanja

$$\partial^2 \Phi^{aa'} - y f^{abc} \tilde{f}^{a'b'c'} \Phi^{bb'}\Phi^{cc'} = 0. \quad (60)$$

Ovo je relativno nova teorija koja daje opis skalarne funkcije sa dvije vrste naboja. Iako ovakve teorije nemaju direktnu primjenu u prirodi, igraju važnu ulogu u objedinjenju gravitacije s baždarnim teorijama.

VI. KERR-SCHILDOVE KOORDINATE

U prethodnom poglavlju smo proučavali dvostruku kopiju samo u kontekstu amplituda raspršenja. Prirodno je zapitati se ide li ona puno dublje od toga, odnosno može li takva teorija predstavljati samu srž odnosa gravitacije i baždarnih teorija. Jedan od načina da ovo ispitamo je putem usporedbe egzaktnih rješenja u gravitacijskim i baždarnim teorijama. Razmatranje ćemo provesti u tzv. Kerr-Schildovom koordinatnom sustavu, gdje metrika ima formu:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (61)$$

U prethodnom izrazu, $\eta_{\mu\nu}$ predstavlja metriku Minkowskog u kanonskoj formi; $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, +1, +1, +1)$. Tenzor $h_{\mu\nu}$ pritom igra ulogu male perturbacije, dakle vrijedi $|h_{\mu\nu}| << 1$. Uz ovakvu pretpostavku, u računima možemo odbaciti sve članove osim onih prvog reda u ovoj veličini. Iz definicije inverzne metrike ($g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$) slijedi

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (62)$$

gdje vrijedi $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}$. Kako tenzoru $h^{\mu\nu}$ dižemo i spuštamo indekse sa metrikom Minkowskog, možemo ga smatrati simetričnim poljem koje propagira u ravnom prostor-vremenu. Odnosno može predstavljati graviton. Moramo pritom primjetiti da izraz (61) ne specificira u potpunosti koordinatni sustav u prostor-vremenu. Mogu postojati drugi koordinatni sustavi u kojima se metrika i dalje može pisati kao metrika Minkowskog plus mala perturbacija, ali uz drugačiju perturbaciju. Ovo otvara problem baždarne invarijantnost kojom se bavimo u dodatku A.

Cilj nam je naći jednadžbe gibanja za $h_{\mu\nu}$ koje proizlaze iz Einsteinove jednadžbe u vakuumu: $R_{\mu\nu} = 0$. Počinjemo sa Christoffelovim simbolima koji su dati sa:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (63)$$

Kada uvrstimo izraz za metriku, uočavamo dvije stvari. Prva se odnosi na činjenicu da parcijalne derivacije Metrike Minkowskog isčezavaju, i druga da članovi oblika $h^{\rho\lambda}\partial_\nu h_{\lambda\mu}$ doprinose u drugom redu pa ih možemo zanemariti. Christoffelovi simboli tada poprimaju idući oblik:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\lambda}(\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial_\lambda h_{\mu\nu}). \quad (64)$$

U idućem koraku računamo Riemannov tenzor definiran preko relacije:

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (65)$$

Kako članovi Γ^2 sadrže samo korekcije drugog reda, u prethodnoj jednadžbi preživljavaju samo parcijalne derivacije. Kontrakcijom prvog indeksa dobivamo:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\lambda} R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma} \approx \eta_{\mu\lambda} R^\lambda{}_{\nu\rho\sigma} = \\ \eta_{\mu\lambda}(\partial_\rho \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (66)$$

Pritom smo samo preimenovali indekse i iskoristili identitet $\Gamma^\lambda_{\nu\rho} = \Gamma^\lambda_{\rho\nu}$. Uvrštavanje Christoffelovih simbola vodi na:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h_{\mu\sigma} + \partial_\sigma\partial_\mu h_{\nu\rho} - \partial_\sigma\partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h_{\nu\sigma}). \quad (67)$$

Riccijev tenzor tada dolazi iz kontrakcije indeksa μ i ρ: $R_{\nu\sigma} = g^{\rho\mu} R_{\mu\nu\rho\sigma} \approx \eta^{\rho\mu} R_{\mu\nu\rho\sigma}$. Nakon kratkog računa i preimenovanja indeksa u posljednjem izrazu, dobivamo konačno

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma\partial_\nu h^\sigma{}_\mu + \partial_\sigma\partial_\mu h^\sigma{}_\nu - \partial_\mu\partial_\nu h - \Box h_{\mu\nu}) = 0, \quad (68)$$

čime smo dobili linearizirani Einsteinovu jednadžbu. Spomenimo i da smo napravili odentifikacije $\Box = \partial^2 = \partial_\sigma\partial^\sigma = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ i $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. Također, u prethodnim računima smo prešutno dizali i spuštali indekse parcijalnih derivacija sa metrikom Minkowskog. U zakrivljenom prostor-vremenu se parcijalne derivacije zamjenjuju s kovarijantnim derivacijama čijim indeksima možemo slobodno manipulirati s tenzorom metrike, što za parcijalne derivacije općenito ne vrijedi. No kako radimo u teoriji koja opisuje polja u ravnom prostorvremenu, koristimo identitet $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$. Izraz (68) možemo kontrahirati još jednom da bismo dobili i Riccijev skalar:

$$R = \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - \Box h. \tag{69}$$

Definirajmo sada polje $h_{\mu\nu}$ na idući način:

$$h_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu \phi, \tag{70}$$

gdje je ϕ skalarna funkcija, a vektor k_μ ima svojstvo da je svjetlosnog tipa s obzirom na ukupnu metriku i metriku Minkowskog ($g^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = \eta^{\mu\nu}k_\mu k_\nu = 0$). Tada je tenzor $h_{\mu\nu}$ manifestno simetričan i trag mu iščezava, kao što i treba vrijediti za graviton. Uz činjenicu da je član $\partial_\mu\partial_\nu h$ jednak nuli, Riccijev tenzor poprima oblik

$$R^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}(\partial^\mu \partial_\alpha(\phi k^\alpha k_\nu) + \partial_\nu \partial^\alpha(\phi k_\alpha k^\mu) - \partial^2(\phi k^\mu k_\nu)), \tag{71}$$

gdje smo indeks μ dignuli radi lakše usporedbe s narednim rezultatima. Nadalje, pretpostavit ćemo da je slučaj statičan, odnosno da sve vremenske derivacije iščezavaju ($\partial_0\phi = \partial_0 k^\mu = 0$). Bez smanjenja općenitosti, možemo napraviti definiciju $k^0 = 1$ tako da je sva dinamika vremenske komponente sadržana u funkciji ϕ. Riccijev tenzor se tada simplificira za svaku komponentu:

$$R^0{}_0 = \frac{1}{2}\bigtriangledown^2 \phi; \tag{72}$$

$$R^i{}_0 = -\frac{1}{2}\partial_j(\partial^i(\phi k^j) - \partial^j(\phi k^i)); \tag{73}$$

$$R^i{}_j = \frac{1}{2}\partial_l(\partial^i(\phi k^l k_j) + \partial_j(\phi k^l k^i) - \partial^l(\phi k^i k_j)); \tag{74}$$

$$R = \partial_i\partial_j(\phi k^i k^j). \tag{75}$$

Latinski indeksi pritom idu po svim prostornim komponentama.

Kako bismo interpretirali ove jednadžbe u kontekstu dvostruke kopije, definiramo vektorsko polje $A_\mu = \phi k_\mu$ asocirano sa Abelovim tenzorom jakosti polja $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Tada Einsteinove jednadžbe u vakuumu $R^0{}_0 = 0$ i $R^i{}_0 = 0$ impliciraju da ovo polje zadovoljava (Abelove) Maxwellove jednadžbe:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial^\mu(\phi k^\nu) - \partial^\nu(\phi k^\mu)) = 0. \tag{76}$$

U komponentama imamo:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \bigtriangledown^2\phi \tag{77}$$

i

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \partial_j\partial^j(\phi k^i) - \partial_j\partial^i(\phi k^j). \tag{78}$$

Usporedbom s izrazima (72) i (73), identitet (76) slijedi direktno. Činjenica da baždarno polje zadovoljava lineariziranu Yang-Mills jednadžbu proizlazi iz linearne strukture Einsteinove jednadžbe u Kerr-Schildovom koordinatnom sustavu. Baždarno polje A_μ smo dobili tako što smo maknuli jednu kopiju vektora k_μ iz polja gravitona. Ukoliko to napravimo još jednom, preživljava samo skalar ϕ koji zadovoljava lineariziranu jednadžbu gibanja (60) u biadjungiranoj skalarnoj teoriji:

$$\bigtriangledown^2\phi = 0 \tag{79}$$

Općenitije, vektor k_μ možemo zamjeniti sa konstantnim vektorom u apstraktnom bojnom prostoru. Rezultirajući vektor ima formu

$$A^a_\mu = \phi c^a k_\mu, \tag{80}$$

dok dvije takve zamjene tvore skalar

$$\Phi^{aa'} = c^a \tilde{c}^{a'} \phi. \tag{81}$$

Jednadžba gibanja u Yang-Mills teoriji dana je izrazom

$$\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{\mu b} F^c_{\mu\nu} = 0, \tag{82}$$

uz

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\mu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \tag{83}$$

Postavlja se tada pitanje zadovoljavaju li polja (80) i (81) jednadžbama (82) i (60). Odgovor je da, ali samo ako napravimo ansatz koji ih linearizira kako bismo reproducirali Einsteinove jednadžbe u vakuumu. Primjetimo da možemo napraviti skaliranja

$$k_\mu \to f k_\mu \qquad i \qquad \phi \to \frac{\phi}{f^2}, \tag{84}$$

gdje je f neka proizvoljna funkcija. Ovakve redefinicije ne mijenjaju polje gravitona (70), niti metriku $g_{\mu\nu}$. Osim toga, Riccijev tenzor (71) također ostaje isti pa funkcija f ne može utjecati na rezultate u gravitaciji. S druge strane, polja A^a_μ i $\Phi^{aa'}$ (kao i njihove jednadžbe gibanja) očito ovise o odabiru ove funkcije. Uvjet da je k_μ svjetlosnog tipa postavlja ograničenja na f, ali ju ne specificira u potpunosti. Prema tome, skaliranja (84) se mogu odabrati tako da vrijede izrazi (60) i (82), što daje velik broj rješenja koja povezuju baždarne i gravitacijske teorije.

Završimo našu diskusiju s usporedbom dobivenih rezultata i amplituda raspršenja iz prethodnog poglavlja. Polje ϕ je prisutno i nepromjenjeno u skalarnom (81), baždarnom (80) i gravitacijskom polju (70). Veličina koja ostaje ista prilikom zamjeni kinetičkih i bojnih faktora u amplitudama (58), (56) i (57) jest izraz za propagator. Polje ϕ u ovom konteksu možemo interpretirati pomoću jednadžbe (79). U općenitom slučaju, kada imamo prisutan i izvor, rješenje za ϕ je Greenova funkcija (skalarni propagator) integrirana po izvoru. Zamjena bojnog vektora $\tilde{c}^{a'}$ u (81) sa vektorom k_μ daje baždarno polje (80). Kako je amplituda skalarnog polja (81) dana izrazom (58), i amplituda baždarnog polja jednadžbom (46), vidimo da zamjene ovih vektora odgovaraju izmjeni kinetičkih i bojnih faktora u amplitudama. Bojne vektore stoga možemo smatrati ekvivalentima faktora c_g, dok su vektori k_μ ekvivalenti kinetičkih članova n_g. Konačno, zamjena $c^a \to k_\nu$ u polju A^a_μ daje polje gravitona s amplitudom (57) koja sadrži dva kinetička člana u brojniku.

VII. ZAKLJUČAK

U ovom seminaru smo ispitali kako su povezana rješenja gravitacijskih i baždarnih teorija u kontekstu amplituda raspršenja. Vidjeli smo da se ova povezanost očituje i u Kerr-Schildovim koordinatama preko direktne usporedbe rješenja Einsteinove i Yang-Mills jednadžbe. Činjenica da se Einstein-Hilbertov Lagranžijan može urediti u formu koja je u limesu teorije polja kompatibilna s teorijom struna, omogućila nam je da Feynmanove vrhove faktoriziramo preko vrhova u Yang-Mills teoriji. Daljnjim razmatranjima, otkrili smo da amplitude raspršenja gravitona slijede direktno iz amplituda u baždarnim teorijama uz prikladnu zamjenu bojnih i kinetičkih faktora. Nadalje, pokazali smo kako je procedura dvostruke kopije primjenjiva i u egzotičnim teorijama poput biadjungirane skalarne teorije.

Za kraj, napomenimo da je dvostruka kopija relativno novo otkriće, i još puno njenih aspekata ostaje neistraženo. Intenzivna istraživanja provode se u primjeni dvostruke kopije na računima s petljama. Osim toga, BCJ dualnost ukazuje na postojanje određenih simetrija u prostoru kinetičkih faktora. O kakvim simetrijama je riječ, preostaje saznati. U svakom slučaju, teorija ima ogroman potencijal i predstavlja korak naprijed u ujedninjenju gravitacije s ostalim fundamentalnim silama.

ZAHVALE

Htio bih se zahvaliti mentorici dr. sc. Larisi Jonke što me je upoznala s temom, i omogućila mi da pišem rad iz ovog izuzetno zanimljivog i obećavajućeg područja fizike.

DODADATK A: BAŽDARNE TRANSFORMACIJE U LINEARIZIRANOJ GRAVITACIJSKOJ TEORIJI

U poglavlju VI smo smo spomenuli da definicija metrike (61) ne specificira u potpunosti koordinatni sustav u prostor-vremenu. Cilj ovog dodatka je pojasniti kako se ova tvrdnja očituje u pitanju baždarne invarijantnosti. Iskaz da linearizirina Einsteinova teorija opisuje polja u ravnom prostor-vremenu se može formalizirati sa pozadinskim prostor-vremenom M_b, fizikalnim prostor-vremenom M_p i difeomorfizmom $\phi : M_b \to M_p$. Kako bi postojao difeomorfizam, preslikavanje mora imati inverz ϕ^{-1}, što je moguće samo ako su mnogostrukosti M_b i M_p iste. Iako su ove mnogostrukosti ekvivalentne, one sadrže različita tenzorska polja; M_b ima metriku Minkowskog $\eta_{\mu\nu}$, dok na M_p imamo metriku $g_{\alpha\beta}$ koja zadovoljava Einsteinovu jednadžbu (možemo zamisliti da M_b ima koordinate x^μ i M_p koordinate y^α). Difeomorfizmi nam omogućuju da guramo i povlačimo tenzore s jedne mnogostrukosti na drugu. Primjerice, povlačenje tenzora tipa $(0, l)$ sa M_p na M_b je definirano kao:

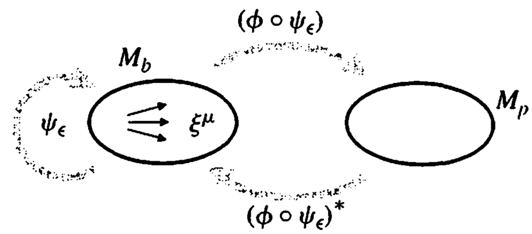
$$(\phi^* T)_{\mu_1 \dots \mu_l} = \frac{\partial y^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial y^{\alpha_l}}{\partial x^{\mu_l}} T_{\alpha_1 \dots \alpha_l}. \tag{85}$$

Kako mi želimo konstruirati lineariziranu teoriju na ravnom prostor-vremenu, zanima nas povlačenje $(\phi^* g)_{\mu\nu}$ fizikalne metrike. Možemo definirati našu perturbaciju kao razliku između povučene fizikalne metrike i metrike Minkowskog:

$$h_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \tag{86}$$

Iz ovakve definicije nemamo razloga pretpostaviti da je perturbacija mala, ali ako su gravitacijska polja na M_p slaba, uvjek postoje difeomorfizmi za koje vrijedi $|h_{\mu\nu}| << 1$. Mi ćemo se baviti samo difeomorfizmima za koje ovo vrijedi. U ovom jeziku, problem baždarne invarijantnosti se odnosi na činjenicu da postoji velik broj difeomorfizama između M_b i M_p za koje je perturbacija mala. Uvedimo sada vektorsko polje $\xi^\mu(x)$ koje definira integralne krivulje na pozadinskom prostor-vremenu. Riječ je o krivuljama $x^\mu(\epsilon)$ koje rješavaju jednadžbu $\frac{dx^\mu}{d\epsilon} = \xi^\mu$. Tada možemo uvesti preslikavanje Ψ_ϵ koje opisuje "tok" niz integralne krivulje. Drugim riječima, vektorsko polje $\xi^\mu(x)$ generira jedno-parametarsku familiju difeomorfizama $\Psi_\epsilon : M_b \to M_b$ koji nam omogućuju da tenzore guramo i povlačimo s jedne točke na drugu na M_b. Ako je ϕ difeomorfizam za koji je perturbacija mala, onda će za dovoljno mali ϵ to vrijediti i za kompoziciju $(\phi \circ \Psi_\epsilon)$, ali uz drugačiju vrijednost perturbacije. Možemo dakle definirati familiju perturbacija definiranih sa ϵ:

$$h^\epsilon_{\mu\nu} = [(\phi \circ \Psi_\epsilon)^* g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \tag{87}$$



Slika 7. Jedno-parametarska familija difeomorfizama Ψ_ϵ generirana s vektorskim poljem ξ^μ na M_b.

U idućem koraku prepoznajemo da je povlačenje pod kompozicijom jednako kompoziciji povlačenja u suprotnom redoslijedu:

$$h^\epsilon_{\mu\nu} = [\Psi^*_\epsilon(\phi^* g)]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \tag{88}$$

Nakon što uvrstimo relaciju (86) u prethodni izraz, vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned} h^\epsilon_{\mu\nu} &= \Psi^*_\epsilon(h + \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = \\ &\Psi^*_\epsilon(h_{\mu\nu}) + \Psi^*_\epsilon(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{89}$$

jer je povlačenje sume dva tenzora jednako sumi povlačenja. Ukoliko je ϵ mali, $\Psi^*_\epsilon(h_{\mu\nu})$ je jednak polju $h_{\mu\nu}$ u najnižem redu. Zapis izraza (89) u malo drugačijem obliku tada daje

$$\begin{aligned} h^\epsilon_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu} + \epsilon \frac{\Psi^*_\epsilon(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{\epsilon} = \\ &h_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{90}$$

gdje smo u drugom članu prepoznali definiciju Lieve derivacije. Nadalje, Lieva derivacija metrike duž vektorskog polja $\xi^\mu(x)$ jest $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2\nabla_{(\mu\xi_\nu)}$. U našem slučaju, pozadinska metrika je ravna pa kovarijantnu derivaciju možemo zamjeniti sa parcijalnom. Imamo dakle:

$$h^\epsilon_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_{(\mu\xi_\nu)}. \tag{91}$$

Ova formula predstavlja promjenu perturbacije metrike pod infinitezimalnim difeomorfizmom duž vektorskog polja $\epsilon\xi^\mu(x)$, što zovemo baždarnom transformacijom u lineariziranoj teoriji. Izraz (91) nam zapravo govori kakve perturbacije u metrici predstavljaju ekvivalentna prostor-vremena. Riječ je o perturbacijama povezanim preko $2\epsilon\partial_{(\mu\xi_\nu)}$. Izraz (91) je analogan tradicionalnom baždarenju u elektromagnetizmu $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda$ pri kojem tenzor jakosti polja $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ostaje nepromjenjen. Isto tako, transformacija (91) ne mijenja Riemannov tenzor (67), odnosno vrijedi $\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$.

LITERATURA

[1] Z. Bern (2002). Perturbative Quantum Gravity and its Relation to Gauge Theory. arXiv:gr-qc/0206071.

[2] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson (2008). New Relations for Gauge-Theory Amplitudes. arXiv:0805.3993 [hep-ph].

[3] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, H. Johansson (2010). Perturbative Quantum Gravity as a Double Copy of Gauge Theory. arXiv:1004.0476 [hep-th].

[4] J. Broedel, L. J. Dixon (2012). Color-kinematics duality and double-copy construction for amplitudes from higher-dimension operators. arXiv:1208.0876 [hep-th].

[5] M. Carrillo-Gonzalez, R. Penco, M. Trodden (2017). The classical double copy in maximally symmetric spacetimes. arXiv:1711.01296 [hep-th].

[6] S. M. Carrol (2004). Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. San Francisco: Addison Wesley.

[7] F. Maltoni, K. Paul, T. Stelzer, S. Willenbrock1 (2002). Color-flow decomposition of QCD amplitudes. hep-ph/0209271.

[8] R. Monteiro, D. O'Connell, C. D. White (2014). Black holes and the double copy. arXiv:1410.0239 [hep-th].

[9] R. Monteiro, D. O'Connell, C. D. White (2015). Gravity as a double copy of gauge theory: from amplitudes to black holes. International Journal of Modern Physics D. Vol. 24, No. 09, 1542008 (2015).

[10] C. D. White (2017). The double copy: gravity from gluons. arXiv:1708.07056 [hep-th].