Fizikalni pogled na simetrije u ekonomskim modelima

Dina Durmić
Fizički odsjek, PMF, Bijenička c. 32, 10 000 Zagreb

Cilj seminara je dati pregled ekonomskih modela iz fizikalne perspektive i promotriti pripradajuće simetrije. Počinje s predstavljanjem osnova Arrow-Debreu modela ekonomske teorije opće ravnoteže i zaključuje da je potrebno oformiti neravnotežnu dinamičku teoriju ekonomskih tržišta kako bi produbili naše razumijevanje stanja ravnoteže u kontekstu neoklasične ekonomije. Nakon toga se daje osvrt na Modele temeljene na agentima (eng.Agent based models) i ulogu baždarne teorije u ekonomiji. Na kraju je demonstrirano nekoliko simulacija procjenjivanja cijena financijskih derivata stohastičkim pristupom koji je poznat u obje discipline.

1. UVOD

Neoklasična ekonomska teorija opće ravnoteže je slična fizici po tome što se zasniva na nekoliko jednostavnih principa iz kojih proizlazi kompleksna matematička formulacija. Da bi fizikalni pogled na ekonomske modele bio moguć, prvo će se ukratko predstaviti Arrow-Debreu model opće ravnoteže [2]. Diskutirat će se lom simetrije i postojanje više od jednog stanja ravnoteže. Nakon toga će se evaluirati prednosti i slabosti neoklasične ekonomije. Slabosti su nedostatak dinamike u navedenom modelu i tretman nepredvidljivosti koja karakterizira velika ekonomska tržišta. Nakon toga se diskutira klasa tzv. Modela temeljenim na agentima [3] koji omogućuju promotriti problem fundamentalnog značenja cijene i diskutirati koje veličine bi trebale biti opservable neravnotežne dinamičke teorije ekonomskih tržišta. Da bi se odgovorilo na ova pitanja, Malaney i Weinstein [4] predlažu formulaciju ekonomije u jeziku baždarne teorije. Ovdje će se pokazati analogija s fizikom. Kao što postoji makro i mikro ekonomija, postoji makro i mikro fizika. Mikro bi bila atomska fizika, a makro termodinamika koja opisuje materiju u različitim fazma. Most među njima je statistička fizika koja proučava velik broj atoma izvan i u ravnoteži. U ekonomiji, taj most bi bi bio Model temeljen na agentima što će se detaljno obrazložiti u poglavlju 2.2. Konačno, iskoristit će se stohastički procesi u kontekstu kvantitativnih financija kako bi se simuliralo procjenjivanje cijena na tržištu i naglasile sličnosti metoda koje se koriste u obje znanstvene discipline.

2. FIZIKALNI POGLED NA EKONOMSKE MODELE

2.1. NEOKLASIČNA EKONOMSKA TEORIJA OPĆE RAVNOTEŽE

Neoklasična ekonomija proučava kako društva koriste oskudne resurse da bi proizvela dobra i usluge kako bi što bolje zadovoljili svoje potrebe. Prema tome, promatra se što se proizvodi, tko i kako to proizvodi te tko dobije ono što se u konačnici proizvede. Osnovna ideja je da većinu ovih odluka donose pojedinačne tvrtke i kućanstva koji neovisno pokušavaju maksimizirati mjeru svoje sreće (eng. happiness). Za tvrtke, mjera sreće je profit, a za kućanstva iskorištenost kapaciteta. Problem se onda zasniva na tome je li moguće za različite tvrtke i kućanstva istovremeno maksimizirati sreću unatoč tome što su tvrtke ograničene resursima i dostupnim tehnologijama, a kućanstva novčanim sredstvima. Raspodjela roba i resursa koja zadovoljava ovaj uvjet je *efikasna*. Tržište je u *ravnoteži* kada je svaka proizvedena roba prodana i kada su sve ponuđene usluge iskorištene.
Neoklasična ekonomija rješava problem efikasnosti i ravnoteže tako da pretpostavi da postoji valuta kojom se može sve prodati i kupiti. Svaka roba i usluga u tome slučaju ima cijenu koja nije fiksna nego varira ovisno o jednostavnom mehanizmu koji se zove zakon ponude i potražnje. Kada je potražnja veća od ponude, cijene rastu, a u obrnutom slučaju padaju. Slijede glavni rezultati ovakve pretpostavke.

- Uvijek postoje cijene takve da tržište bude u ravnoteži.
- Kada je tržište u stanju ravnoteže, ono je i efikasno u smislu da nitko neće postići veću mjeru sreće, bez da naruši sreću nekog drugog.

Navedeni principi se lako mogu ilustrirati na jednostavnom modelu dvoje ljudi koji trguju s dvije vrste roba. Ovaj model se naziva Edgeworth-ova kutija [5]. Ilustracija je na Slici 1. Ukupan broj obje vrste roba je konačan, pitanje je kako ih raspodijeliti, a da obe osobe istovremeno maksimiziraju svoju sreću. Svakome je pridružena funkcija koja određuje mjeru njihove pojedinačne sreće u ovisnosti o tome koliko od svake dvije robe imaju. Svaka raspodjela koja zadovoljava navedena ograničenja je točka u kutiji.

Netrivijalna posljedica ovog jednostavnog principa jest da slične rezultate daju tržišta s velikim brojem sudionika, dobara i nelinarnih ograničenja. Ova generalizacija je najveći uspjeh neoklasične ekonomije. Prije formalnog matematičkog predstavljanja ove teorije, bitno je spomenuti da ljudska psihologija diktira pravila ponašanja tržišta. To znači da postoje fenomeni kao što su mjehuri (eng. bubbles) što je nagli porast cijena nekoga dobra ili skupine dobara, gdje početni porast cijena stvara očekivanja o njihovu daljnjem rastu te privlači nove kupce, uglavnom špekulante zainteresirane za

Slika 1: Dvije osi predstavljaju dvije vrste roba raspodijeljenih između dvije osobe. Krivulje konveksne ishodištu pripadaju jednoj osobi, a krivulje konveksne nasuprotnom ishodištu drugoj osobi i odgovaraju raspodjeli dobara druge osobe predstavljenom gornjom i desnom osi. Točka gdje se dodiruju je točka ravnoteže gdje je nemoguće povećati 'sreću' jedne osobe bez da se naruši 'sreća' druge. Konveksnost je potrebna za postojanje ravnoteže, a proizlazi iz zakona opadajućih prinosa [5].

ostvarivanje profita od trgovine tim dobrom, a ne za njegovu uporabu u svrhu krajnje potrošnje ili eksploatacije. Osim mjehura, postoje i fenomen kao što je panika, a to je iznenadan i raširen strah od pada burzovnih vrijednosti ili sloma financijskog tržišta. Često prethodi financijskim krizama, a potaknut je vijestima o potencijalnim negativnim kretanjima. Posljedica panike je masovno povlačenje bankovnih depozita, prodaja dionica ili valuta, što pridonosi padu pogođenog sektora. Ovakvi fenomeni se teško mogu opisati matematičkim formulacijama. Unatoč tome, argument neoklasične ekonomije je da čak i ako je stanje ravnoteže poremećeno panikama, ovi fenomeni su tranzijentni, a ono što dugoročno ima efektivni utjecaj jest težnja svake osobe da maksimizira svoju sreću koliko okolnosti dopuštaju.

2.1.1. Osnove Arrow-Debreu modela neoklasične ekonomije opće ravnoteže

Slijedi matematička formulacija neoklasične ekonomske teorije opće ravnoteže [2, 3].

Prostor dobara

N dimenzionalni prostor $\mathcal{P}$ je prostor dobara R^N. Svaki element pripada određenom dobru što je zajednički naziv za proizvode i usluge koji imaju svojstvo da se mogu prodati i kupiti. Dakle, koordinate vektora $X^a \in \mathcal{P}$ odgovara količini dobra tipa a. Ovakav vektor se može smatrati inventarom jer daje listu dobara koja se mogu posjedovati.

Vrijeme

Ista roba u različitim vremenskim trenutcima se smatra različitom vrstom dobra. Na primjer, prodajemo li neku vrstu soka u datom trenutku po jednoj cijeni, a u budućnosti po drugoj cijeni, tada se sok po jednoj cijeni smatra jednom vrstom dobra, a sok po drugoj cijeni drugom vrstom dobra. Prostor dobara je onda $\mathcal{P}^T$ gdje je T broj različitih trenutaka. To znači da je svaki indeks zapravo uređeni par (a, t) gdje a označava određeno dobro, a t vrijeme.

Kovektor cijena

Pretpostavlja se postojanje jedne valute. Prema tome, postoji kovektor cijena $\vec{p} = p_a = \{p_1, p_2, ...\} \in \mathcal{P}^*$ koji odgovara cijenama N dobara. Npr. p_2 je cijena proizvoda dva. Za svaku cijenu se pretpostavlja da je pozitivna $p_a \geq 0$. Glavni predmet diskusije su uvjeti u kojima je skup cijena određen. S obzirom na inventar X^a i kovektor cijena p_a, vrijednost inventara je dana s: $V = p_a X^a$. Pokazat će se da je dinamika cijena ovog modela karakterizirana homogenošću prvog stupnja. To znači da ako se sve cijene povećaju za isti faktor, pripadajući inventar koštat će za taj isti faktor više. Fizikalno, postoji simetrija u kojoj su sve cijene jednako skalirane što odgovara neovisnosti dinamike cijena o mjernoj jedinici (valuti). Ovo je prva naznaka uloge baždarne invarijatnosti u ekonomiji [1]. Ova ideja je skrivena u Arrow-Debreu modelu jer je simetrija odmah eliminirana normalizacijom cijena tako da vrijedi:

$$\sum_a p_a = 1 \tag{1}$$

Ovo definira $S \subset \mathcal{P}$ koji je prostor cijena.

Tvrtke

Ekonomija pretpostavlja da postoji F tvrtki ili poduzeća. Doprinos svake tvrtke ekonomiji je opisan procesom proizvodnje što je vektor Y_A^a. $A = 1, ..., F$ označava različite tvrtke, dok a označava različita dobra. Elementi vektora mogu biti negativni što definira dobra koja se ulože u produkcijski proces (eng. input) i pozitivni ono što se u konačnici proizvede i spremno je za trgovanje (eng. output). Npr. $Y_1^{17} = -4$ znači da su 4 jednice dobra 17 uložene u proces proizvodnje tvrtke $A = 1$. Za svaku tvrtku postoji skup mogućih dostupnih procesa proizvodnje dan kompaktnim konveksnim skupom $\mathcal{Y}_A \in P$. Značenje zahtjeva konveksnosti je da ako $\lambda Y_A^a \in \mathcal{Y}_A$ za $0 < \lambda \leq 1$, tvrtka može odabrati proizvesti 3 auta iako ima kapacitet proizvesti 10.

Za svaki skup cijena p_a i procesa $y_A^a \in \mathcal{Y}_A$, profit procesa po tim cijenama je dan s $p(y)_A = p_a y_A^a$ što je funkcija od $\mathcal{Y}_A$. Ovo odgovara mapiranju iz prostora cijena S u P. Ovu funkciju ćemo zvati funkcija opskrbe $S_A^a(p)$ tvrtke A.

Kućanstvo ili potrošač

Postoji H kućanstava označenih s $\alpha = 1, ..., H$. Karakterizira ih plan potrošnje X_α^a što je za svako kućanstvo α vektor u pozitivnom definitnom kvadrantu P označen kao P_+. Njegove komponente koje su pozitivni brojevi predstavljaju plan konzumacije svakog dobra. Dakle ako je X_{13}^5=12, to znači da kućanstvo 13 namjerava konzumirati 12 jedinica dobra 5. Funkcija cijena koja nam kaže koliko to košta je onda $p_a X^a_\alpha$. Kućanstvo je karakterizirano još jednom funkcijom koja opisuje dobra i usluge koje kućanstvo može prodati što uključuje i rad njegovih članova $r^a_\beta \in P_+$. Pretpostavlja se da će kućanstvo prodati sve što može i zaraditi prihod:

$$i_\beta = p_a r^a_\beta. \tag{2}$$

Kućanstvo može posjedovati i udio u nekoj tvrtci što se označava s α^α_A. To znači da je ukupni prihod kućanstva povećan za:

$$i^\beta_{dionice} = \sum_A \alpha^\beta_A p_a y^a_A. \tag{3}$$

Prema tome, ukupni prihod kućanstva je:

$$I^\beta_{ukupno} = p_a r^a_\beta + \sum_A \alpha^\beta_A p_a y^a_A. \tag{4}$$

Svako kućanstvo ima funkciju korisnosti U_β na P_+ takvu da vrijedi $U_\beta(X^1_\beta) \geq U_\beta(X^2_\beta)$ ako $X^1_\beta \geq X^2_\beta$. Funkcije korisnosti su reskalirane tako da međusobno različite funkcije različitih kućanstava nisu usporedive. S obzirom na danu cijenu p_a, postoji domena planova potrošnje $\tilde{P}(p)^\beta_+$ koje si kućanstvo β može priuštiti:

$$p_a X^a_\beta \leq I^\beta_{ukupno}. \tag{5}$$

S obzirom da se pretpostavlja da svako kućanstvo maksimizira svoj plan potrošnje što maksimizira njihovu funkciju korisnosti, dobiva se još jednom mapiranje iz S u $\tilde{P}_+$ što se naziva funkcija potražnje $D(p)^a_\beta$ koja je jednaka planu potrošnje X^a_β koji maskmizira funkciju korisnosti po danim cijenama.

Zakon ponude i potražnje

Sada se može matematički formulirati zakon ponude i potražnje:

$$Z^a(p) = \sum_\beta D(p)^a_\beta - \sum_A S(p)^a_A - \sum_\beta r^a_\beta. \tag{6}$$

Ideja ravnoteže u ovom kontekstu je da postoje cijene pri kojima svaka tvrtka maksimizira svoj profit i svako kućanstvo svoju preferencu plana potrošnje, tako da ponuda balansira potražnju za svako dobro. To znači da funkcija viška potražnje $Z^a(p)$ iščezava. Kaže se da je p^*_a ravnotežni vektor cijena kada vrijedi:

$$Z^a(p^*) = 0 \tag{7}$$

Treba imati na umu da vrijedi pretpostavka savršene konkurencije. To znači da individualne odluke pojedinaca infinitezimalno utječu na cijene tj. beznačajne su. Preciznije, nema monopola ili unija koje bi mogle dati koaliciji sudionika moć da mijenjaju ili utječu na cijene. Kada $Z^a(p)$ ne iščezava, postoji slabije svojstvo koje vrijedi u tom slučaju, a zove se Walras-ov zakon:

$$p_a Z^a(p) = 0 \tag{8}$$

To znači da za dane cijene vrijedi da je ukupan višak potražnje jednak ukupnom broju dobara koja se nisu prodala [5].

Ekonomsko ravnotežno stanje

U ekonomskom ravnotežnom stanju Arrow-Debreu-Mackenzie teorem pokazuje da postoji barem jedan skup cijena za koje ravnotežno stanje postoji. Definiramo li mapiranje iz simplekse cijena u samu sebe, slijedi da za danu cijenu $p_a \in S$:

$$T(p)_a = \frac{pa + max[0, Z_a(p)]}{1 + \sum_a max[0, Z_a(p)]} \tag{9}$$

Kada je potražnja veća od potrošnje, cijene se povećavaju a u obrnutom slučaju smanjuju. Simpleks cijena je kompaktan i može se dokazati da je gladak. Prema Brown-ovom teoremu fiksne točke, mapiranje ima barem jednu točku p^*_a za koju vrijedni $T(p*) = p*$ što implicira da vrijedi $Z^a(p*) = 0$.

Ovako definirana ravnoteže se može pokazati optimalnom u sljedećem smislu. Plan potrošnje za svaku kućanstvo je Pareto učinkovit ako za dani fiksni skup cijena i odgovarajuću raspodjelu dobara koja maksimizira funkciju korisnosti po tim cijenama, svaka preraspodjela dobara bi snizila korisnost barem jednog kućanstva. Malo se zna o stabilnosti ovakve ravnoteže. Na primjer, pretpostavimo da točke ravnoteže nisu stabilne, tj. da odgovaraju točkama na granici režima reda i kaosa. U režimu reda, fluktuacije su male i gaussijanske, a u režimu kaosa dinamika je kaotična i nema fluktuacija oko stabilne točke. U kaotičnom stanju mjera volatilnosti je irelevantna. U tome slučaju, možda bi preferirali ekonomju takvu da je u stabilnoj točki što znači da bi žrtvovali dio učikovitosti za stabilnost. Ovo nije dokazano, nego su hipoteze koje je prvi primjetio Roumen Borissov. Ono za što postoji velik broj dokaza je da skup cijena za koji postoji stanje ravnoteže nije jedinstven. Sonnenschein-Mantel-Debreu teorem [6] kaže da za svaki konačan skup točaka od S, postoji ekonomija takva da postoji ravnotežni vektor cijena te ekonomije.

Postoje dvije invarijantnosti u Arrow-Debreu modelu. Ovo su baždarne invarijantnosti u smislu da različite matematičke reprezentacije odgovaraju istom ekonomskom modelu. Model je invarijantan na sljedeće matematičke operacije.

- Reskaliranje cijena:

  $$p_a \to \Lambda p_p, \tag{10}$$

  gdje je $\Lambda > 0$. Ovo je globalna baždarna invarijantnost gdje su cijene baždarno fiksirane s (1). Treba napomenuti da je dobro u različitim vremenskim trenutcima različito dobro, tako da ono što je fiksirano jednadžbom (1) je suma po svim cijenama u svim vremenima.

- Reskaliranje funkcije korisnosti:

  $$U_\alpha \to \lambda_\alpha U_\alpha, \tag{11}$$

za $\lambda_\alpha > 0$. Ovo se može smatrati lokalnom baždardnom invarijantnošću jer se svaka funkcija korisnosti svakog kućanstva može skalirati odvojeno. Tako odražava ideju da relativne količine koristi različitih kućanstava nisu usporedive.

Baždarna grupa Arrow-Debreu modela je R_{+}^{H+1}. U narednim razmatranjima se tvrdi da je ovo podgrupa veće grupe baždarnih invarijatnosti neravnotežnih modela.

2.1.2. Simetrije

Simetrija se može koristiti kao argument za to da ravnoteža nije jedinstvena. Može se ilustrirati jednostavnim primjerom [1]. Pretpostavi se da postoji n dobrih studenata likovne umjetnosti koji žele mjesto u nekoj od poznatih galerija i pretpostavimo da je otvoreno $p << n$ mjesta. Tržišni mehanizam raspodjele će odabrati p od n mladih umjetnika i smjestiti ih u neku od galerija nakon čega će imati uspješne karijere s velikom količinom prihoda. Međutim, većina studenata će imati karijere kao učitelji ili profesori i zarađivati znatno skromnije prihode. Radi jednostavnosti ćemo pretpostaviti da je svih n studenata dovoljno talentirano da ih galerija uzme koliko god je u njenom kapacitetu, ali ima samo p broj mjesta. Postoji inicijalna simetrija $\binom{n}{p}$. Simetrija će biti slomljena dinamikom funkcije raspodjele koja traži Pareto učinkovita stanja. Svako stanje u kojem je p od n umjetnika odabrano je Pareto učinkovito. U konačnici, galerije će maksimizirati svoj profit u svakom slučaju, a umjetnici će bilo da postanu zvijezde ili učitelji također maksimizirati svoje funkcije koristi s obzirom na ograničenja. Dakle, ako je bilo koje od mogućih stanja u ravnoteži, sva su stanja u ravnoteži.

2.1.3. Kritika Arrow-Debreu modela ekonomije [1]

Prednost Arrow-Debre modela ekonomije je njegova općenitost. U malenom modelu dva dobra i dvije osobe, lako se može pokazati postojanje Pareto učinkovitih izbora i odgovarajućih cijena. Ono što je netrivijalno pokazati je da Pareto učinkoviti izbori postoje za velike i kompleksne ekonomije. Također, nije trivijalno pokazati da za nekoliko općenitih pretpostavki postoji skup cijena koji dopušta svima da maksimiziraju svoju sreću. Jedna od prednosti je također kanoničnost modela u smislu da se poput klasične ili kvantne mehanike ne može lako modificirati. Pokušaji da se modificira se vrate na jednaku formulaciju. Dakle, nije jedan u nizu sličnih modela s malo drugačijim pretpostavkama. Konačno, posljednja prednost je da je pokazano da ne može biti osnova ideoloških pogleda na ekonomiju kao što su kolike trebaju biti razlike između bogatstva i prihoda pojedinih članova ili uloga vlade u pružanju usluga kao što je obrazovanje ili zdravstvo jer se može pokazati da za bilo koju distribuciju resursa, postoji ravnoteža koja je Pareto učinkovita. Postoji nekoliko očitih slabosti modela.

- Pokazano je da ravnoteža postoji i da je Pareto učinkovita, međutim nije jedinstvena. To znači da tržište samo po sebi ne može prirodno doći u jedinstveno stanje maksimalne učinkovitosti, nego ih ima mnogo. Društvo onda mora odrediti dodatne kriterije o tome koje je stanje najpoželjnije.
- Ne postoji mehanizam koji nam govori o tome što vodi stanje u ravnotežu.
- Postoje pitanja na koje ne daje odgovore kao što su kako brzina konvergencije u stanje ravnoteže ovisi o generičnim pretpostavkama modela kao što su broj dobara, tvrtki ili kućanstava. Može se reći da pretpostavke modela vrijedne samo za kratka vremena prije nego što interveniraju nepredvidljivi događaji ili promjene u tehnologiji.
- Nedostaje neravnotežna teorija s dinamikom koja objašnjava koliko brzo se ravnoteža postiže.
- Nema općenitih rezultata o stabilnosti ravnoteže s obzirom da nisu jedinstvene, onda po definiciji nisu nužno ni stabilne.
- Ne može se dobro testirati na stvarnim podacima.

Osim toga, snažne kritike dolaze i s obzirom na primjenjivost ovog modela. Ideja da postoji fiksiran skup dobara poznat svim sudionicima i fiksiran u svim vremenima je pogrešna. U modernoj ekonomiji, često su predstavljena dobra koja brzo dominiraju tržištem, a za koje se prije nije znalo. Ideja da su neodređenosti poznate unaprijed je nerealistična. Malo koje kućanstvo planira svoj budžet više od par godina unaprijed. Preference potrošnje se mijenjaju ovisno o okolnostima. Kao i kućanstva, malen broj tvrtki planira više od par godina unaprijed i fokusira se najčešće na malen dio tržišta. Postoji kombinatorička eksplozija broja različitih dobara s obzirom da se dobro u različitim vremenima ili mjestima tretira kao različito dobro.

2.2. MODEL TEMELJEN NA AGENTIMA I USPOREDBA S FIZIKOM [1]

Unatoč prednostima Arrow-DebreU modela, jasno je da postoji potreba za neravnotežnom teorijom tržišta. Ovdje se uvodi analogija s fizikom. Kao što postoji makro i mikro ekonomija, postoji makro i mikro fizika. Mikro bi bila atomska fizika, a makro termodinamika koja opisuje materiju u različitim fazama. 'Makrofizika' se uglavnom bavi s materijom u ravnoteži. Most među njima je statistička fizika koja proučava velik broj atoma izvan i u ravnoteži. Iako se ravnoteža u ekonomiji ne može usporediti sa značenjem ravnoteže u fizici, jasno je da postoji potreba za nečim što bi se zvalo 'statistička' ekonomija. Bila bi osnovana na mikroskopskom modelu agenata i operacija od kojih se ekonomija sastoji i proučavala bi kako oni međusobno interagiraju. Nekoliko zahtjeva takve formulacije je navedeno.

- Odrediti stacionarno stanje za tržišta i aproksimativno pokazati da odgovara ideji ravnotežnog stanja u neoklasičnoj ekonomiji.

- Proučiti faznu strukturu ekonomskih modela i odrediti bitne makroskopske opservable.

- Proučiti prijelaz iz neravnotežnog u ravnotežno stanje i odrediti kako relaksacijsko vrijeme ovisi o makroskopskim parametrima.

- Pručiti fluktuacije oko ravnoteže i njihovu narav.

Poput fizikalnog sustava, čak i ako je sustav koji proučavamo u ravnoteži većinu vremena, postoji potreba za neravnotežnom teorijom kako bi produbili naše razumijevanje o stanju u ravnoteži. Nekoliko početnih principa se nameće prilikom formulacije takve teorije.

- Vrijeme se mora definirati tako da prepoznaje ireverzibilnost većine provedenih djelovanja kao i asimetriju prošlosti, sadašnjosti i budućnosti. Ekonomija se mora bazirati na odlukama individualnih agenata u danom vremenu s obzirom na informacije koje imaju o prošlosti.

- Budućnost je neodređena. Koliko god matematički alati bili precizni, ne mogu dati jedinstvene predikcije za evoluciju kompleksnih ekonomskih sustava. Prvi razlog je što postoji kombinatorička eksplozija u broju mogućnosti tako da je korisna reprezentacija nemoguća. Drugi razlog je što se ne mogu predvidjeti svi mogući događaji.

- Ekonomske opservable su vezane za računovodsvto i ostale povijesne podatke. Restrikcija su predmeti mjerenja od strana tvrtki, individualaca i vlade. Također uklanja uzimanje u obzir fikcionalnih elemenata koji nemaju veze s time kako realno tržište funkcionira kao što su određen prostor dobara, produkcijskih planova, funkcije korisnosti i slično.

- Agenti u ekonomiju donose odluke u svakom trenutku na temelju informacija koje imaju u svojim povijesnim podatcima te javno dostupnih informacija.

- Termodinamička ravnoteža nije analogna ekonomskoj ravnoteži jer ekonomski sustav nije izoliran. Ekonomija je otvoren sustav koji dobiva 'inpute' u obliku ljudskog rada, energije, sirovina i otkrivanja novih tehnologija i proizvoda. Ekonomska ravnoteža može biti analogna neravnotežnom stacionarnom stanju koje se pojavlje kod otvorenih sustava u fizici. U ovom slučaju relevatne opservable bi bile brzina protoka kritičnih materijala kroz sustav.

- Ekonomija ima pristup velikom broju mogućih kvazi-stabilnih stanja.

- Tržišta s velikim brojem agenata imaju velike aproksimativne simetrije koje se naziru u činjenici da mnogi individualci imaju slično obrazovanje i interese, a mnoge tvrtke se natječu u ponudi sličnih proizvoda ili usluga. U stacionarnom stanju su ovakve simetrije obično slomljene.

- Postoje baždarne simetrije povezane s reskaliranjem jedinica kojima se vrednuju pojedinačna dobra. Dinamika tržišta bi trebala biti invarijantna na ove baždarne transformacije.

2.2.1. Osnovne ideje Modela agenata(eng. Agent centric model of economic markets)

S obzirom na napredak tehnologije, moguće je napraviti modele u kojima veliki broj agenata interagira i proučavati ih. Ključna ideja ovih modela je reprezentacija tvrtki s podatcima strukturiranim po principima računovodstva. Agenti trguju bilateralno i sve informacije koje posjeduju su one od trgovanja u prošlosti. Prema tome, ne postoji globalna cijena, nego agent prikuplja podatke o uspješnim i neuspješnim ponudama i potražnjama. Nadalje, nema nužno jedne valute, dva agenta mogu trgovati bilo kojim elementima koji su u njihovom inventaru. Slijedi generalizacija ovakvih modela.

- **Dobra** su materijalna dobra ili usluge koje se mogu posjedovati, transformirati i kojima se može trgovati.

- **Agent** je osoba, tvrtka ili korporacija koja ima mogućnost: posjedovati stvari koje pripadaju njegovom inventaru, transformirati ih, trgovati stvarima, raditi ugovore koji se provode u budućnosti. Nadalje, imaju potrebe i ciljeve koje moraju zadovoljiti da bi opstali. Donose odluke i drže bilješke o provedenim odlukama. U tome kontekstu ih vode strogo određena pravila i zakoni.

- **Ekonomska operacija** je promjena stanja jednog ili više agenata na sljedeće načine: proces ili transformacija jednog agenta je promjena koja se očituje u njegovom inventaru, proces trgovanja dobrima između dva agenta, proces u kojem se agenti rode ili umru, proces u kojem su uvedeni novi proizvodi u sustav ili neaktivni proizvodi uklonjeni.

Tvrdi se da je sva dinamika ekonomije sačinjena od navedenih procesa. Ekonomske opservable su onda zapisi inventara agenata u ovim procesima. Ekonomski model je specificiran listom N agenata ili algoritama kojima se oni proizvode uključujući i mogućnost njihove smrti ili rođenja, P vrsta dobara koji se mogu posjedovati, transformirati ili se njima može trgovati, strategijama koje donose različiti agenti, vanjskim uvjetima koji utječu na sustav kao što su input energije, materijala, inovacija i slično, i outputima otpada. S obzirom na navedeno, **statistička se ekonomija definira kao proučavanje**

kolektivnog ponašanje velikog broja ekonomskih agenata.

2.2.2. Baždarna invarijantnost u ekonomiji

Baždarnu invarijatnost kao esecijalni koncept u razvoju ekonomske teorije su uveli Malaney i Weinstein [4]. Potreba za baždarnom invarijatnošću dolazi iz fundamentalne činjenice da su cijene proizvoljne do neke mjere. U stanju ravnoteže Arrow-Debreu modela, baždarna simetrija korespondira skaliranju svih cijena (10). Međutim, kada je sustav izvan ravnoteže, cijene nisu fiksirane. Svaki agent je slobodan da vrednuje dobra u kojim god jedinicama želi, a to ne bi trebalo promijeniti dinamiku tržišta. Posljedica je mogućnost ostvarivanja dobitka ili gubitka u ciklusu trgovanja dobrima, valutama ili instrumentima bez da se išta proizvede. Ovo se naziva arbitraža. U ravnoteži, arbitraže nema. Pitanje koje tržišne sile dovode sustav u stanje ravnoteže je slično onome u primjeni baždarne teorije u fizici elementarnih čestica i gravitaciji. Prema tome, zanimljivo je koje veličine su opservable kada uzmemo u obzir slobodu svakog agenta da reskalira i redefinira jedinicu mjere koja se uzima u obzir. Da bi definirali značajne opservable u ekonomiji, moraju se uspoređivati omjeri cijena nekoliko dobara jednog agenta. Ovo može biti ciklus trgovanja koji počne u jednoj valuti, promjeni nekoliko valuta ili dobara i završi u početnoj valuti. S obzirom da su početna i završna valuta jednake, njihov omjer je invarijantan pri reskaliranju vrijednosti valute. Ovo je istina bilo da jedan ili više agenata sudjeluju u ciklusu trgovanja. Kaže se da su ovakve veličine baždarno invarijantne. Veličine koje su definirane ciklusima trgovanja tako se na kraju definiraju kao omjer dvije cijene koje drži isti agent u istoj valuti se zovu kurvature. Zanimljivo je da veličine koje su invarijantne na baždarne transformacije uključuju arbitraže koje bi trebale nestati u ravnoteži. Ovo su veličine na koje zakon ponude i potražnje djeluje kako bi ih smanjio. Postoji analogija u fizici. U baždarnoj teoriji u fizici opservable su definirane tako da nose neki objekt po zatvorenoj krivulji i uspoređuju se s kopijom svoje vlastite konfiguracije u početnoj točki. Ove opservable se zovu kurvature. Rezultat nošenja nečeg po segmentu krivulje se zove konekcija i ovisi o lokalnim jedinicama mjere. No kada se krivulja zatvori, uspoređuje se s početnom točkom kako bi se dobila opservabla. U općoj teoriji relativnosti kurvatura odgovara nekonzistentnostima u mjerenju, npr. ako netko nosi ravnalo po zatvorenom putu i vrati se u početnu točku, ali ravnalo pokazuje drugi smjer od onoga koji je imao u početku. Dinamika je opisana Einsteinovim jednadžbama. Osnovno stanje je donekle analogno ravnoteži u ekonomskom modelu gdje kurvature iščezavaju. Iako kurvature iščezavaju u osnovnom stanju, fizika je najbolje otkrivena u tim terminima. Slično, stabilnost ekonomske ravnoteže se može proučavati modelirajući dinamiku u malim odmacima od ravnoteže. Ako ekonomski model slijedi primjer fizike, nakon što se utvrde varijable, sljedeći je korak proučiti njegovu dinamiku.
Formalnijim jezikom, zamislimo ekonomsku povijest kao krivulju $\alpha(t)$ u $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^*$ što daje sekvencu inventara i cijena. Radi jednostavnosti pretpostavimo da vrijeme teče od $t = 0$ do $t = 1$. Pretpostavimo da ukupna vrijednost dobra $p_a q^a$ ne iščezava. Neka je $\mathcal{C}$ potprostor od $\mathcal{P} \times \mathcal{P}^*$ takav da vrijedi $p_a q^a = 0$ i neka je krivulja $\alpha(t)$ u $R = \mathcal{P} \times \mathcal{P}^* - \mathcal{C}$. Tada je $\alpha(t) = (q^a(t), p_b(t))$ vremenski promjenjiva košara dobara $q^a(t)$ i promjenjivih cijena $p_b(t)$. Da bi se izračunala realna promjena u troškovima života, konstruira se Abelova konekcija na R [4]:

$$A = \frac{q^a dp_a}{q^c p_c}. \tag{12}$$

Kada globalno reskaliramo cijene (10), vremenski ovisno, $p_a \to \Lambda p_a$:

$$A \to A + dln(\Lambda), \tag{13}$$

gdje je A Malaney-Weinstein konekcija za globalnu baždarnu simetriju cijena. Tada su troškovi života dani s:

$$P = e^{\int_\alpha A} \tag{14}$$

po krivulji $\alpha(t)$. Ako je tangenta krivulje $\alpha(t)$ u smjeru koji zadaje trgovac, tj. nema promjene u vrijednosti p_a i q^a, tada P iščezava. Pokazano je da vrijedi [4]:

$$P \to \frac{\Lambda(1)}{\Lambda(0)} P. \tag{15}$$

Ako želimo kompletno baždarno invarijatnu veličinu, mora se uzeti ekonomska povijest u obzir koja je zatvorena krivulja, tj. počinje i završava s istim inventarom i istim skupom cijena. Promotrimo li ekonomsku povijest koja je mala krivulja koja je zatvorena oko (q^a, p_a) specificirana malim promjenama (dq_0^a, dp_b^0), tada je:

$$P \approx e^F \tag{16}$$

gjde je F kurvatura dana s:

$$F = \frac{1}{q^c p_c}\left[\delta_b^a - \frac{q^a p_b}{q^d p_d}\right] dq_0^b \Lambda dp_a^0. \tag{17}$$

2.2.3. Baždarna invarijantnost u modelima agenata

Matematička struktura koja karakterizira jednog agenta se sastoji od sljedećih koncepta.
Vrijeme
Sve veličine su funkcije koje evoluiraju u diskretnim vremenima n.
Inventar
Postoji P agenata označenih s $i, j = 1, , , P$ i N dobara označenih s $a, b, c... = 1, ..., N$. Stanje inventara je dano vektorom V_i^a opisanim količinom dobra a agenta i.
Baždarenje

Ništa u dinamici ekonomije ne smije ovisiti o jedinicama u kojima se vrednuju različiti inventari. Različiti agenti mogu koristiti različite valute ili mjerne jedinice kako bi vrednovali svoje inventare. Dakle, ekonomske opservable trebaju biti invarijantne na sljedeće transformacije:

$$V_i^a \to V_i^{a'} = \phi_i^a V_i^a, \tag{18}$$

gdje je $\phi_i^a \in R^+$ pozitivan realan broj. Dakle baždarna grupa je Abelova i $(R^+)^{NP}$

Adjungirani element

$$V_i^a \to (V_i^a)^* = \frac{1}{V_i^a}, \tag{19}$$

Invarijantna norma

$$|V|^2 \equiv \sum_{i,a} (V_i^a)^* V_i^a = n = NP, \tag{20}$$

koja je baždarno invarijantna(18).

Za svakog agenta matrica W_{ia}^b je vrijednost koju i-ti agent ima u razmjeni a i b tj. $W_{ia}^b = a/b$. Na primjer $W_{ia}^b = 3$ znači da je agent i spreman razmijeniti 3 a za 1 b. W_{ia}^b su formalno konekcije koje pri reskaliranju jedinica se transformiraju kao:

$$W_{ia}^b \to W_{ia}^{b'} = (\phi_i^a)^{-1} W_{ia}^b \phi_i^b \tag{21}$$

Sada se može konstruirati vrijednost inventara kao vektor:

$$\mathcal{I}^b = W_{ia}^b V^a. \tag{22}$$

Svojstva W_{ia}^b matrica:

Ako agent i ne zna omjer vrijednosti dobra a i b, onda se piše $W_{ia}^b =?$.

Matrica W_{ia}^b je potpuna ako nema zapisa ?, tako da agent ima informaciju o svim mogućim razmjenama dobara.

Matrica W_{ia}^b je konzistentna ako $W_{ia}^b = 1/W_{ib}^a$ i $W_{ia}^b = W_{ia}^c W_{ic}^b$ za sve a, b, c.

Ako je matrica konzistentna i potpuna, onda je proporcionalna operatoru projekcije. Ova svojstva impliciraju da postoji jedna valuta takva da sva dobra imaju konzistentne cijene u toj valuti:

$$P_i^a = W_{i0}^b \tag{23}$$

$$W_{ia}^b = \frac{P_i^b}{P_i^a} = (P_i^a)^* P_i^b \tag{24}$$

$$W_{ia}^b W_{ib}^c = \frac{P_i^b}{P_i^a} \frac{P_i^c}{P_i^b} = N \frac{P_i^c}{P_i^a} = N W_{ia}^c \tag{25}$$

Ekonomske operacije

Osnovna ideja modela je da sistem evoluira kroz seriju razmjene dobara što možemo zvati ekonomska operacija. Ovo uključuje par agenata. U osnovi ekonomska operacija n_j^b u jedinicama dobra b, vrednovana u jedinicama agenta j je razmijenjena agentu j od strane agenta i, nasuprot tome n_i^a je jedinica dobra a, vrednovana u jedinicama agenta i je razmijenjena s agentom i od strane agenta j. Nas zanima njihov omjer definiran kao:

$$O_{ia}^{jb} = \frac{n_j^b}{n_i^a} \tag{26}$$

Ovo se transformira kao:

$$O_{ia}^{jb} \to (O_{ia}^{jb})' = (\phi_i^a)^{-1} O_{ia}^{jb} \phi_j^b. \tag{27}$$

Bitna veličina je:

$$O_{ia}^{jb} = \frac{n_i^b}{n_i^a} \tag{28}$$

Ovo je omjer količine dobra b razmijenjenog od i do j prema količini dobra a razmijenjenog natrag od j do i, ali u ovom slučaju oba je vrednovao agent i.

$$O_{ia}^{jb} \to (O_{ia}^{jb})' = (\phi_i^a)^{-1} O_{ia}^{jb} \phi_i^b. \tag{29}$$

Kurvature i opservable

Kurvature mjere dobitke i gubitke u ciklusima trgovanja. Na primjer, pretpostavima da imamo ciklus razmjena dobara koji uključuje tri agenta i, j i k. Slijedi:

$$R_{ijka}^d \equiv O_{ia}^{jb} O_{jb}^{kc} O_{kc}^{id}. \tag{30}$$

Ovo se transformira lokalno za agenta i:

$$R_{ijka}^d \to (R_{ijka}^d)' = (\phi_i^a)^{-1} R_{ijka}^d \phi_i^d. \tag{31}$$

Dijagonalni element R_{ijka}^a je baždarno invarijantna opservabla. To je omjer dobra a koji je vraćen agentu i od k i razmijenjen od agenta i agentu j. Dakle, određuje profit ili gubitak ukupnog ciklusa što se tiče dobra a. Drugačija kurvatura se može konstruirati iz O_{ia}^{jb} dana s:

$$S_{ijka}^d \equiv O_{ia}^{jb} O_{jb}^{kc} O_{kc}^{id}, \tag{32}$$

koja se transformira kao:

$$S_{ijka}^d \to (S_{ijka}^d)' = (\phi_i^a)^{-1} S_{ijka}^d \phi_i^d. \tag{33}$$

tako da su njeni dijagnoalni elementi baždarno invarnijantne opservable.

Efektivna dinamika

Dinamika je dana evolucijom po pravilima trgovanja agenata. Efektivna dinamika se odnosi na veličine koje su minimazirane ili maksimizirane u sustavu agenata kada dođu u neravnotežno stanje. Da opišemo stacionarno stanje, želimo konstruirati akciju S koja se treba onda minimazirati.

Bilateralna dinamika
U ovom slučaju efektivna dinamika je dana sumom parova agenata i mjeri ekonomske operacije između para. Jednostavna akcija je:

$$S^{razmjena} = \sum_{i \neq j} Tr(W_i O_i^j W_j O_j^i) \tag{34}$$

Dinamika trgovanja dominirana ciklusima
Ovakva dinamiku bi imala sljedeću formu [1]:

$$S^{ciklusi} = \sum_{ciklus:ijk...} \alpha_R Tr R_{ijk...} | \alpha_S Tr S_{ijk...} \tag{35}$$

2.3. Stohastički pristup[7]

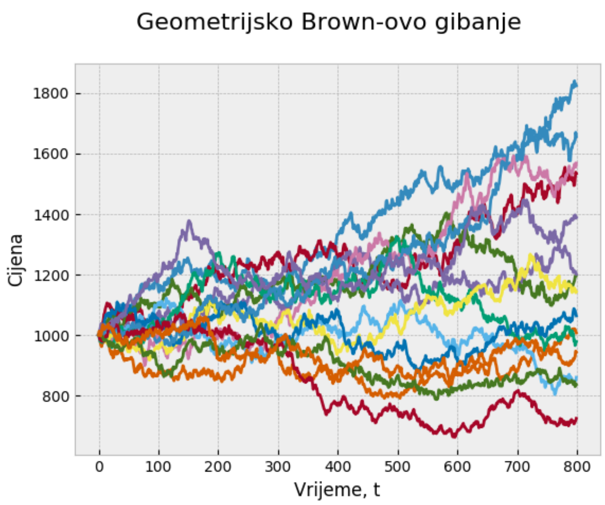
Ovo poglavlje se bavi konkretnim problemima kvantitativnih financija kao što su određivanje cijena financijskih derivata, procjene rizika i slično. Uzima se stohastički pristup koji je u kontekstu kvantitativnih financija kolekcija nasumičnih varijabli koja opisuje evoluciju sistema u vremenu. Ovo bi bio fenomenološki pristup problemu kada tržišta nisu u ravnoteži, promatraju se fluktuacije oko stanja ravnoteže. Simulira se procjenjivanja cijena u vremenu. Računi su provedni pomoću programskog jezika Python. Cilj ovog poglavlja je dodatno naglasiti vezu ekonomije i fizike tako da se primjene alati s kojima se obje discipline služe[7].

2.3.1. Geometrijsko Brown-ovo gibanje

Geometrijsko Brown-ovo gibanje je popularizirano jer se pomoću njega izračunala poznata Black Scholes jednadžba za određivanje cijena Opcija. Gemetrijsko Brown-ovo gibanje je zapravo Brown-ovo gibanje s dodatnom driftnom komponentom i komponentom volatilnosti. Stohastička jednadžba koja opisuje evoluciju ovakvog sistema je dana s:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma d S_t W_t, \tag{36}$$

gdje je dSt promjena u procijeni cijene S u vremenu t, μ je godišnji očekivan postotak drifta, dt je vrijeme, σ je dnevna volatilnost koja se očekuje pri procijeni cijena, a W_t je Wiener-ov proces ili Brown-ovo gibanje. Primjer je prikazan na Slici 2 gdje se može vidjeti da generirani putevi imaju drift prema gore s vremenom i veću varijancu krajnjih mogućih cijena.



Slika 2: Geometrijsko Brown-ovo gibanje je Brown-ovo gibanje s dodatnom komponentom drifta i volatilnosti.

2.3.2. Geometrijsko Brown-ovo gibanje s difuzijskim skokom

$$dS_t = \mu S t dt + \sigma S_t dW_t + dJ_t, \tag{37}$$

$$dJ_t = S_t d(\sum_{i=0}^{N_t} (Y_i - 1)), \tag{38}$$

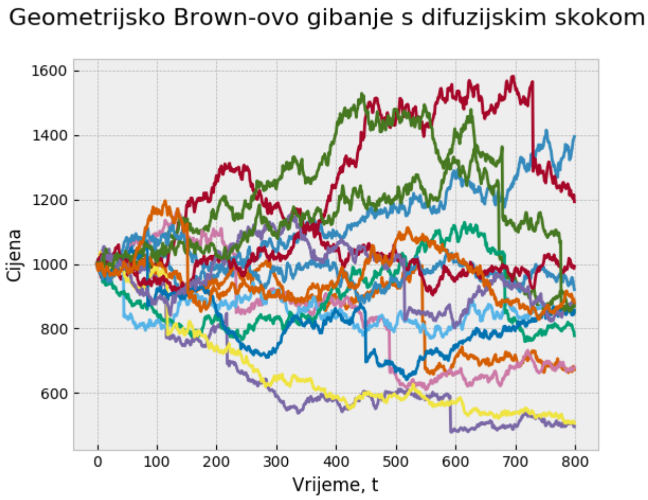
gdje je N_t Poissonov proces, a Y_i nasumična varijabla koja prati normalnu distribuciju. Na slici 3 se mogu primjetiti diskontinuiteti dodani difuzijskim skokom koji mogu predstavljati lom tržišta za što mogu biti odgovorni efekti mjehura i panike gore diskutirani. Skok može biti i pozitivan, što se isto može desiti na tržištu u kratkom periodu vremena. Ovakvi skokovi su poznati ako pogledamo npr. $S\&P500$.

2.3.3. Hestonov model

Geometrijsko Brownovo gibanje pretpostavlja da je volatilnost konstanta u vremenu. Steven Heston je proširio model tako da je uključio volatilnost koja stohastički varira u vremenu u skladu s Cox ingersoll Ross stohastičkim procesom. Cox Ingersoll Ross stohastički proces se koristi za opis evolucije kamatnih stopa tokom vremena. Često se koristi kod evaluacije kamatnih stopa financijskih derivata. U Hestonovom modelu se koristi za evoluciju volatilnosti u vremenu.

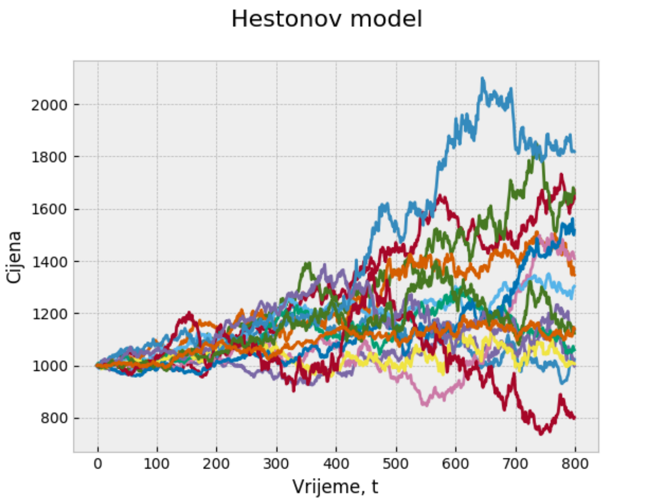
$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S, \tag{39}$$

$$dv_t = a(b - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_t^v, \tag{40}$$



Slika 3: Prikazuje se Geometrijsko Brown-ovo gibanje s difuzijskim skokom gdje se mogu primjetiti diskontinuiteti dodani difuzijskim skokom koji mogu predstavljati lom tržišta zbog fenomena kao što su panike ili mjehuri gore diskutirani.

gdje v_t Cox Ingersoll Ross proces, μ drift, W^S i W^v su dva korelirana Wienerova procesa čija je korelacija dana s ρ, a je stopa srednje vrijednosti reverzije Cox Ingersoll Ross procesa, b je srednja vrijednost volatilnosti u vremenu, a σ je volatilnost Cox Ingersoll Ross procesa. Izraz $a(b - v_t)$ se zove driftni faktor. Na Slici 4 se može vidjeti da cijena postaje volatilnija pri kraju vremena. Ovaj fenomen se vidi jer je prosječna volatilnost zadana u kodu tako da je puno veća od početne volatilnosti.



Slika 4: Hestonov model proširuje Geometrijsko Brown-ovo gibanje tako da pretpostavlja da volatilnost varira u vremenu.

3. ZAKLJUČAK

U seminaru se predstavlja Arrow-Debreu model ekonomske ravnoteže koji je precizno matematički formuliran zbog čega ga je lako razumijeti i dati kritički osvrt. Problemi koji se diskutiraju su formulacija vremena i neodređenosti što je navelo na zaključak da je potrebna neravnotežna dinamička teorija ekonomskih tržišta koja bi produbila razumijevanje stanja ravnoteže u Arrow-Debreu modelu. Sljedeći je diskutiran Model temeljen na agentima koji je početak formulacije takve neravnotežne teorije i bitna uloga baždarne teorije u ograničenjima koja bi se uvela u modelu. Cilj nije oformiti model koji bi realistično reproducirao detalje realnog tržišta, nego odrediti ključne parametre i opservable kako bi bolje razumijeli ponašanje tržišta kada nisu u stanju ravnoteže. Sličnosti ekonomije s fizikom su eksplicitno pokazane u formulaciji Modela temeljenog na agentima. Kao što postoji makro i mikro ekonomija, postoji makro i mikro fizika. Mikro bi bila atomska fizika, a makro termodinamika. Most među njima je statistička fizika koja proučava velik broj atoma izvan i u ravnoteži. Model temeljen na agentima je mikroskopski model na kojem bi se temeljila statistička ekonomija. Na kraju je napravljeno nekoliko simulacija procjenjivanja budućeg kretanja cijena stohastičkim pristupom koji je dobro poznat u kvantitativnim financijama kao fenomenološki pristup koji proučava tržište kada je izvan stanja ravnoteže. Iskoristila se metodologija poznata u fizici kako bi dodatno naglasili sličnosti dvije discipline.

Literatura

[1] Lee Smolin: Time and symmetry in models of economic markets, Perimeter Institute for Theoretical Physics, 31 Caroline Street North, Waterloo, Ontario N2J 2Y5, Canada
[2] K. J. Arrow, G. Debreu: Existence of equilibrium for a competitive economy, Econometrica 22 (1954) 265-290
[3] M.Brown, J. Herriot, S. Kaufmann, Z-V Palmrose, B. Sawhill, L. Smolin: Partecon models
[4] P. Malaney, E. Weinstein : The Index Number Problem: A Differential Geometric Approach, Harvard University Press, 2007
[5] R.M. Starr: General Equilibrium Theory, Cambridge University 1997
[6] Sonnenschein H. Market excess demand functions, Econometrica 40, McGraw Hill, 1985
[7] Simon Benninga: Financial Modeling, The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England, FOURTH EDITION