GRAVITACIJSKE FUNKCIJE STRUKTURE

Eric Andreas Vivoda*
Fizički odsjek, Prirodoslovno - matematički fakultet†
Sveučilište u Zagrebu, Bijenička cesta 32, 10000 Zagreb, Hrvatska

Sažetak

U ovom ćemo se seminaru baviti gravitacijskim funkcijama strukture ili, kako ih struka češće zove, *gravitacijskim form faktorima.* Prvo ćemo motivirati funkcije strukture preko matričnog elementa struje $\langle p'|\mathrm{J}^{\mu}|p\rangle$ te ćemo odmah pokazati kako pomoću nekih simetrija možemo dobiti određena ograničenja na njih. Idući će nam korak biti izvesti matrični element tenzora energije i impulsa $\mathrm{T}^{\mu\nu}$. Funkcije u rastavu tog matričnog elementa po Lorentzovim strukturama su upravo gravitacijske funkcije strukture. Jednom kada izvedemo najopćenitiji matrični element za Diracovu česticu, bit ćemo u mogućnosti pokazati razna ograničenja na funkcije strukture te ćemo ih moći povezati s fizikalnim opservablama.

1 Uvod

MASA, spin, naboj..., sve su to fundamentalna svojstva čestica koja nastojimo otkriti. Klasični eksperiment koji nam daje uvid u njih je baziran na odgovoru sustava (čestice koju istražujemo) na neku vanjsku probu. Jedan od značajnijih takvih eksperimenata je *duboko neelastično raspršenje* (DIS) u kojem gledamo kako sustav reagira na vanjsku elektromagnetsku probu. Račun matričnih elemenata koji se pojavljuju u formulama za udarni presjek nije moguće direktno provesti. Međutim, te je matrične elemente moguće rastaviti po najopćenitijim Lorentzovim strukturama. Funkcije koje se pojavljuju u tom rastavu nazivaju se funkcije strukture te njih možemo povezati s fizikalnim opservablama. U DIS-u se pojavljuju dvije funkcije strukture koje se vrlo jednostavno mogu povezati s gustoćom naboja i gustoćom magnetskog dipolnog momenta ([1]). To znači da za informacije o naboju i magnetskom dipolnom momentu, sustav moramo podvrgnuti vanjskom elektromagnetskom polju.

Informaciju o masi i spinu ne možemo dobiti elektromagnetskom probom. Za uvid u ta fundamentalna svojstva nužno je na sustav djelovati gravitacijskom probom ([2]), to jest pogledati kako sustav reagira na promjenu prostornovremenske metrike. Iz Einsteinove jednadžbe:

$$\mathrm{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathrm{R}g_{\mu\nu} = 8\pi\mathrm{G}\mathrm{T}_{\mu\nu}, \tag{1}$$

(gdje su: $\mathrm{R}_{\mu\nu}$ **simetričan** Riccijev tenzor, R Riccijev skalar, a G je gravitacijska konstanta) očito je da se gravitacija veže za tenzor energije i impulsa (ubuduće: TEM) materije[1]. Iz tog je razloga nužno promatrati matrični element TEM-a te form faktore koji se pojavljuju u njegovoj dekompoziciji na Lorentzove strukture.

U idućem ćemo odjeljku motivirati funkcije strukture pomoću matričnog elementa 4-struje. Također, pokazat ćemo kako se pomoću raznih simetrija mogu izvesti određena ograničenja na njih. Treći će odjeljak biti posvećen detaljnom izvodu matričnog elementa TEM-a za hadron spina $\frac{1}{2}$. Pokazat ćemo da se u dekompoziciji nalaze tri form faktora. Jednom kada zgotovimo taj izvod, u četvrtom ćemo odjeljku tražiti ograničenja na form faktore. Te ćemo izvode raditi uzimajući u obzir distribucijska svojstva kvantiziranih polja. Naći ćemo ograničenje na dva form faktora, a jedan će nam form faktor ostati nepoznat. Tema petog odjeljka biti će povezivanje form faktora matričnog elementa TEM-a s fizikalnim opservablama. Dva form faktora vrlo će se jednostavno povezati s energijom i spinom, dok će treći form faktor imati vrlo zanimljivu fizikalnu pozadinu. Naime, treći, tzv. D form faktor, povezat ćemo s tlakom i silama smicanja unutar hadrona. Šesti odjeljak ćemo posvetiti D form faktoru te vidjeti kako ga možemo istraživati. Na kraju ćemo ukratko komentirati eksperiment kojim možemo pristupiti navedenim form faktorima.

---

* `evivoda.phy@pmf.hr`

† Seminar je napravljen u svrhu kolegija Samostalni seminar iz istraživanja u fizici

1 "Spacetime tells matter how to move and matter tells spacetime how to curve", John Archibald Wheeler

2 Elektromagnetske funkcije strukture

Funkcije strukture najlakše je motivirati pomoću matričnog elementa elektromagnetske struje koji definiramo na sljedeći način:

$$O^{\mu}(x) \equiv \left\langle p', \sigma' | \mathrm{J}^{\mu}(x) | p, \sigma \right\rangle, \tag{2}$$

gdje p i σ predstavljaju 4-impuls i projekciju spina upadne, a p' i σ' izlazne čestice. Također, u ovom su izrazu i ulazna i izlazna stanja na ljusci mase ($p'^2 = p^2 = M^2$, a M je masa čestice koju nastojimo ispitivati što će u našem slučaju biti hadron). Ideja nam je napisati najopćenitiji mogući takav matrični element samo na temelju simetrija koje znamo da teorija poštuje (npr. tu su najočitije P i T simetrija). Nadalje, zbog invarijantnosti na prostornovremenske translacije, matrični element možemo pisati u sljedećem obliku:

$$O^{\mu}(x) \equiv \left\langle p', \sigma' | \tau^{-1} \tau \mathrm{J}^{\mu}(x) \tau^{-1} \tau | p, \sigma \right\rangle = e^{i(p-p')x} O^{\mu}(0), \tag{3}$$

gdje je τ **hermitski** operator prostornovremenske translacije. Koristeći očuvanje 4-struje $\partial_{\mu}\mathrm{J}^{\mu} = 0$ i gornji izraz, jednostavno dobivamo jedno od najbitnijih ograničenja na matrični element:

$$\mathit{\Delta}_{\mu} O^{\mu}(x) = 0, \tag{4}$$

gdje je $\mathit{\Delta} = p' - p$. U eksperimentima (npr. DIS) je to preneseni impuls, odnosno impuls virtualnog fotona. Izraz (4) će nam biti ključan u izvodu matričnog elementa tenzora energije i impulsa u idućem odjeljku. Sada ćemo, koristeći ograničenja Lorentz invarijantnosti, matrični element napisati u najopćenitijem obliku. Također, radi jednostavnosti, zasada ćemo se baviti samo skalarnim česticama te ćemo kasnije kada budemo promatrali tenzor energije i impulsa dopustiti spin $\frac{1}{2}$. Najopćenitiji matrični element struje za skalarne čestice može se napisati u sljedećem obliku:

$$O^{\mu}(0) = \frac{q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2p'^0}\sqrt{2p^0}} j^{\mu}(p', p), \tag{5}$$

gdje je q naboj promatrane čestice. Energije u nazivnicima prisutne su zbog Lorentz invarijantne norme te su one definirane na ljusci mase. Fizikalni dio matričnog elementa sadržan je u 4-vektoru j^{μ} te on ovisi o ulaznom i izlaznom impulsu (ovisnost o naboju je već sadržana u matričnom elementu). Najopćenitji takav 4-vektor može se zapisati kao linearna kombinacija p^{μ} i p'^{μ}. Međutim, puno je lakše raditi s druge dvije nezavisne varijable:

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta}^{\mu} &= (p' - p)^{\mu} \\ \mathrm{P}^{\mu} &= \frac{1}{2}(p' + p)^{\mu} \end{aligned} \tag{6}$$

Koeficijenti u toj linearnoj kombinaciji očito će biti neki skalari koji ovise o p i p'. Kako su i ulazno i izlazno stanje na ljusci mase jedina skalarna kombinacija koja sadrži ovisnost o impulsima je $p \cdot p'$. Iz izraza (6) lagano se može pokazati da vrijedi:

$$p \cdot p' = \frac{1}{2}(2M^2 - \mathit{\Delta}^2), \tag{7}$$

stoga koeficijenti razvoja ovise o impulsima jedino putem $\mathit{\Delta}^2$. Sve nam to sugerira da 4-vektor j^{μ} možemo napisati u obliku:

$$j^{\mu}(p, p') = 2F_1(\mathit{\Delta}^2)\mathrm{P}^{\mu} + F_2(\mathit{\Delta}^2)\mathit{\Delta}^{\mu}. \tag{8}$$

Ukoliko znamo neka dodatna svojstva o objektu čiji matrični element računamo, dodatna ograničenja možemo nametnuti na koeficijente rastava. Na primjer, struja je hermitski operator te stoga vrijedi: $j^\mu(p',p)^* = j^\mu(p,p')$. Iz ovog uvjeta odmah vidimo da je koeficijent F_1 čisto realan, a koeficijent F_2 čisto imaginaran. Kako je $\mathrm{P}^\mu \Delta_\mu = 0$, iz sačuvanja struje odmah slijedi:

$$F_2(\Delta^2) = 0. \tag{9}$$

Preostali koeficijent $F_1(\Delta^2)$ naziva se elektromagnetska funkcija strukture čestice. Lagano se pokaže (analogan izvod ćemo raditi u trećem odjeljku, a postoji i u [3]) da vrijedi:

$$F_1(0) = 1. \tag{10}$$

Ovime smo motivirali funkcije strukture te ćemo se sada posvetiti izvodu matričnog elementa tenzora energije i impulsa (TEM).

3 Matrični element tenzora energije i impulsa

U ovom ćemo poglavlju detaljno izvesti matrični element TEM-a:

$$O^{\mu\nu}(x) \equiv \langle p', \sigma' | \mathrm{T}^{\mu\nu}(x) | p, \sigma \rangle . \tag{11}$$

Postoji više načina kako se ovaj izraz može rastaviti na form faktore (npr. definicije u [4] i [5] se razlikuju). Cilj nam je doći do izraza koji je dan u [4] jer ćemo njega koristiti u daljnjim razmatranjima. Taj ćemo izvod, zbog jednostavnosti, provoditi u više koraka. Prvo ćemo izvesti dijagonalni matrični element ukupnog TEM-a za česticu spina 0 te ćemo tenzor rastaviti na dva doprinosa: kvarkovski i gluonski. Zatim ćemo, nakon ponešto raspisivanja, izvesti nedijagonalni matrični element na koji ćemo još morati nadodati spinski form faktor kako bismo imali cjelokupnu dekompoziciju za čestice spina $\frac{1}{2}$.

3.1 Dijagonalni matrični element TEM-a čestice spina 0

Kako i ovdje vrijedi translacijska invarijantnost, ništa nam ne brani da promatramo $O^{\mu\nu}(0)$ te na kraju dodamo eksponencijalni faktor. Jedini način na koji možemo zapisati dijagonalni matrični element čestice spina 0, a da su ispunjeni svi zahtjevi Lorentzovih simetrija, je ([6]):

$$\langle p | \mathrm{T}^{\mu\nu}(0) | p \rangle = 2p^\mu p^\nu, \tag{12}$$

gdje je faktor 2 ovdje dan zbog normalizacije. Ukupni TEM uvijek možemo rastaviti na doprinose svih sastavnica hadrona:

$$\mathrm{T}^{\mu\nu} = \sum_a \mathrm{T}_a^{\mu\nu}, \tag{13}$$

gdje suma ide po kvarkovima i gluonima. Iako je ukupan tenzor očuvan ($\partial_\mu \mathrm{T}^{\mu\nu} = 0$), to ne možemo tvrditi za sumande u relaciji (13) što je i za očekivati budući da kvarkovi i gluoni međusobno izmjenjuju energiju i impuls. Stoga, matrični element kvarkovskog ili gluonskog dijela tenzora mora u svojoj dekompoziciji sadržavati dodatnu strukturu:

$$\langle p | \mathrm{T}_a^{\mu\nu}(0) | p \rangle = 2A_a p^\mu p^\nu + 2c_a g^{\mu\nu}. \tag{14}$$

Uzimajući u obzir sva tri zadnja izraza lagano dobivamo dva ograničenja na form faktore:

$$\sum_a A_a = 1 \qquad\qquad \sum_a c_a = 0. \tag{15}$$

U četvrtom ćemo odjeljku pokazati da prvi uvjet nije generalno zadovoljen za nedijagonalni matrični element. Međutim, čak i kad dodamo spinski form faktor, u limesu $p' \to p$ taj će uvjet biti zadovoljen. Drugi je uvjet posljedica očuvanja ukupnog TEM-a te je on uvijek zadovoljen. Sada ćemo razmotriti nedijagonalni matrični element za hadron spina 0.

3.2 Nedijagonalni matrični element TEM-a čestice spina 0

U ovom ćemo izvodu prvo napisati najgeneralniji mogući oblik rastava matričnog elementa tako da u obzir uzimamo Lorentz invarijantnost i simetričnost TEM-a na zamjenu $\mu \leftrightarrow \nu$[2]. Simetričnost tenzora energije i impulsa koji se veže s gravitacijom je očita iz Einsteinove jednadžbe (1). Ako kao nezavisne varijable koristimo Δ i p, simetričnost tenzora nam garantira da u rastavu neće biti faktora oblika:

$$O^{\mu\nu} = \cdots + \overline{u}' G(\Delta^2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \Delta_\sigma u + \cdots \tag{16}$$

upravo iz razloga jer je Levi-Civita tenzor totalno antisimetričan. Stoga, matrični element možemo pisati kao sljedeću linearnu kombinaciju:

$$O^{\mu\nu} = a_1 g^{\mu\nu} + a_2 p^\mu p^\nu + a_3 p^\mu \Delta^\nu + a_4 \Delta^\mu p^\nu + a_5 \Delta^\mu \Delta^\nu. \tag{17}$$

Invarijantnost na prostorno vremenske translacije i sačuvanje tenzora zajedno impliciraju dva uvjeta:

$$\Delta_\mu O^{\mu\nu} = 0 \qquad\qquad \Delta_\nu O^{\mu\nu} = 0. \tag{18}$$

Raspisivanjem ovih uvjeta, sustav za tren svodimo na sljedeći oblik:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & p\cdot\Delta & 0 & \Delta^2 \\ 0 & p\cdot\Delta & 0 & \Delta^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & p\cdot\Delta & \Delta^2 \\ 0 & p\cdot\Delta & \Delta^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = 0. \tag{19}$$

Budući da je rang matrice sustava jednak 3, imat ćemo dva slobodna parametra iz čega odmah zaključujemo da će se na kraju pojaviti dvije funkcije strukture. Ukoliko kao parametre uzmemo koeficijente a_3 i a_5, matrični element koji zadovoljava očuvanje TEM-a možemo napisati u obliku:

$$O^{\mu\nu} = a_5(\Delta^\mu\Delta^\nu - \Delta^2 g^{\mu\nu}) + a_3\left(p^\mu\Delta^\nu + \Delta^\mu p^\nu - (p\cdot\Delta)g^{\mu\nu} - \frac{\Delta^2}{p\cdot\Delta}p^\mu p^\nu\right). \tag{20}$$

Opet je puno pogodnije ovaj izraz zapisati u terminima P i Δ definiranih u (6). Pomoću njih izraz (20) postaje:

$$O^{\mu\nu} = 2a_3 \mathrm{P}^\mu \mathrm{P}^\nu + \frac{1}{2}(2a_5 - a_3)(\Delta^\mu\Delta^\nu - g^{\mu\nu}\Delta^2). \tag{21}$$

Izraz koji se najčešće pojavljuje u literaturi ([4]) dobiva se ako form faktore definiramo na sljedeći način:

$$A(\Delta^2) \equiv a_3 \qquad \text{i} \qquad D(\Delta^2) \equiv 2a_5 - a_3. \tag{22}$$

Kvarkovski ili gluonski dio matričnog elementa dobivamo na analogan način kao i u slučaju dijagonalnog matričnog elementa:

$$\begin{aligned} \langle p'|T_a^{\mu\nu}(x)|p\rangle =& \Big[2\mathrm{P}^\mu\mathrm{P}^\nu A_a(\Delta^2) + \frac{1}{2}(\Delta^\mu\Delta^\nu - g^{\mu\nu}\Delta^2)D_a(\Delta^2) + \\ &+ 2M^2 c_a(\Delta^2)g^{\mu\nu}\Big]e^{i(p'-p)x}. \end{aligned} \tag{23}$$

Očito je da se u limesu $\Delta \to 0$ svodimo na izraz (14). Ovime smo uspješno izveli matrični element za čestice spina 0 te nam je sada zadatak dodati spin $\frac{1}{2}$ u priču.

[2] TEM koji se izvodi direktno iz QCD-a nije odmah simetričan. Međutim, postoje procedure koje ga prevode u simetričan tenzor, takozvani Belinfante-Rosenfeld TEM [4]. Taj tenzor mi koristimo u ovom radu, a njegov se eksplicitni oblik može naći u [4].

3.3 Matrični element TEM-a za čestice spina $\frac{1}{2}$

Dodavanje spinskog form faktora najlakše se provodi tako da prvo nabrojimo sve uvjete koje ukupan matrični element mora zadovoljavati.

1. $T_{\mu\nu}$ je simetričan tenzor pa isto vrijedi i za matrični element. Ako se u raspisu pojavi neka struktura koja nije simetrična u μ i ν, uvijek ju možemo simetrizirati na način $\{\mu\nu\} = \mu\nu + \nu\mu$. Uz to, ukupan je tenzor i dalje sačuvan te stoga vrijedi: $\Delta_\mu T^{\mu\nu} = \Delta_\nu T^{\mu\nu} = 0$.
2. Zbog kontrakcija, matrični element je oblika:
$$O^{\mu\nu}(x) = \overline{u}' \Gamma^{\mu\nu} u e^{i\Delta\cdot x}, \tag{24}$$
gdje su u i $\overline{u}'$ Diracovi spinori koji zadovoljavaju:
$$\not{p} u = M u \qquad \text{i} \qquad \overline{u}' \not{p}' = \overline{u}' M, \tag{25}$$
a $\Gamma^{\mu\nu}$ je linearna kombinacija potpunog skupa gamma matrica definiranog u [3]. Također, u [3] je pokazano da zbog izraza (25) taj objekt ne sadrži sve elemente tog linearno nezavisnog skupa, već je dovoljno promatrati samo rastav na strukture: $p^{\{\mu}p'^{\nu\}}$ i $p^{\{\mu}\gamma^{\nu\}}$. Detaljan raspis koji dokazuje navedenu tvrdnju je dan u [3] na 454. strani.
3. Kako vrijedi normalizacija spinora $\overline{u}u = 2M$, form faktore koji se pojavljuju za spin 0 moramo pomnožiti s određenim konstantama da bi se taj faktor od $2M$ kompenzirao. To će biti očito kada damo ukupan matrični element.

Sada kada znamo koje zahtjeve moramo poštivati, možemo pokušati napisati matrični element koji u sebi sadrži spinsku strukturu. Kako su izrazi tipa $p^{\{\mu}p'^{\nu\}}$ već dani u dekompoziciji matričnog elementa za spin 0, dovoljno je samo dodati član oblika:

$$O^{\mu\nu} = \cdots + \overline{u}' F(\Delta^2) \mathrm{P}^{\{\mu}\gamma^{\nu\}} u. \tag{26}$$

U ovom izrazu (po uzoru na [5]) "$\cdots$" predstavlja dekompoziciju za spin 0, a P je definiran u (6). Koristeći Diracovu jednadžbu (25), lagano možemo pokazati da je ovaj izraz očuvan (tj. očuvanje je u ovom slučaju izravna posljedica Diracove jednadžbe).

Budući da ćemo izvode raditi po uzoru na [4], bilo bi nam korisno pokazati da su matrični element koji se tamo koristi i izraz (26) ekvivalentni, odnosno da nam daju istu informaciju. U tu svrhu promotriti ćemo spinsku strukturu koja se pojavljuje u [4]:

$$S^{\mu\nu} = \overline{u}' J(\Delta^2) \frac{i\mathrm{P}^{\{\mu}\sigma^{\nu\}\rho}\Delta_\rho}{2M} u. \tag{27}$$

Spinska struktura koja se pojavljuje u zadnjem izrazu ekvivalentna je onoj iz izraza (26). U to se vrlo lako možemo uvjeriti ukoliko bismo koristeći Diracovu jednadžbu i Gordonov identitet raspisali izraz (27). Taj je raspis relativno dugačak i podosta jednostavan te ga stoga preskačemo. Na kraju se pokaže da je struktura iz (27) kombinacija strukture iz (26) i struktura koje se pojavljuju uz form faktore A i D. Budući da te strukture već imamo u svojoj dekompoziciji, svejedno je hoćemo li koristiti spinsku strukturu iz (26) ili (27). Sada smo u mogućnosti napisati ukupni matrični element TEM-a za česticu spina $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \langle p'\sigma' | \mathrm{T}^{\mu\nu}(x) | p, \sigma \rangle = & \overline{u}' \Big[A(\Delta^2) \frac{\mathrm{P}^\mu \mathrm{P}^\nu}{M} + J(\Delta^2) \frac{i\mathrm{P}^{\{\mu}\sigma^{\nu\}\rho}\Delta_\rho}{2M} + \\ & + D(\Delta^2) \frac{\Delta^\mu \Delta^\nu - g^{\mu\nu}\Delta^2}{4M} \Big] u e^{i(p'-p)x}. \end{aligned} \tag{28}$$

Doći do ovog matričnog elementa bio nam je glavni zadatak u ovom poglavlju. Bitno je napomenuti da su Lorentzove strukture uz form faktore A i D očuvane po definiciji, dok je očuvanje strukture uz form faktor J posljedica Diracove jednadžbe. Ukoliko bismo imali česticu spina 1, ne bismo mogli uvoditi ovakvu strukturu jer za takve čestice ne vrijedi Diracova jednadžba. Također, u tom bismo slučaju morali uzeti i dodatne strukture proporcionalne polarizacijskom vektoru što bi cijelu stvar dodatno zakompliciralo. Napomenimo još samo da korištenjem Gordonovog identiteta izraz (28) možemo napisati u još jednom obliku (ovdje ćemo dati kvarkovski odnosno gluonski doprinos ukupnom matričnom elementu):

$$\begin{aligned}\langle p'\sigma'|\mathrm{T}_a^{\mu\nu}(x)|p,\sigma\rangle =&\overline{u}'\Big[A_a(\Delta^2)\frac{\gamma^{\{\mu}\gamma^{\nu\}}}{2}+B_a(\Delta^2)\frac{i\mathrm{P}^{\{\mu}\sigma^{\nu\}\rho}\Delta_\rho}{4M}+\\ &+D_a(\Delta^2)\frac{\Delta^\mu\Delta^\nu-g^{\mu\nu}\Delta^2}{4M}+Mc_a(\Delta^2)g^{\mu\nu}\Big]ue^{i(p'-p)x},\end{aligned} \tag{29}$$

gdje su form faktori A, B i J povezani relacijom $2J=A+B$.

Idući ćemo odjeljak posvetiti izvodu određenih ograničenja na dane form faktore. U tu ćemo svrhu koristiti distribucijska svojstva kvantiziranih polja.

4 Ograničenja na form faktore

U ovom ćemo se odjeljku baviti izvodom ograničenja na form faktore. Konkretno, pokazati ćemo da vrijede sljedeće jednakosti: $A(0)=1$ i $B(0)=0$, što automatizmom povlači $J(0)=\frac{1}{2}$. Ovo zadnje ograničenje nam govori da je promatrani hadron Diracova čestica. Izvodi su u ovom poglavlju rađeni po uzoru na [7], odnosno uzeta su u obzir distribucijska svojstva polja: "*Kvantizirano polje je operatorska distribucija, a ne funkcija* [7]". Operatorska distribucija ϕ je linearni funkcional koji test funkciju $f\in\mathscr{F}$ preslikava u $\phi[f]$, operator koji djeluje na Hilbertovom prostoru $\mathscr{H}$. U QFT za prostor $\mathscr{F}$ uzimamo prostor Schwartzovih funkcija $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{1,3})$ koji je definiran na prostorvremenu Minkowskog. Integralna reprezentacija operatora $\phi[f]$ je dana s:

$$\phi[f]=\int \mathrm{d}^4x\phi(x)f(x), \tag{30}$$

te se pomoću nje parcijalnom integracijom može pokazati da je derivacija distribucije dana s: $\phi'[f]\equiv-\phi[f']$. Kako derivacija distribucije uvijek postoji, distribucije možemo smatrati poopćenim funkcijama. Sada ćemo pokazati kako pomoću ove formulacije možemo konstruirati stanja zadanog impulsa $|p\rangle$ te vidjeti kako nam to mijenja matrični element (28) i (29).

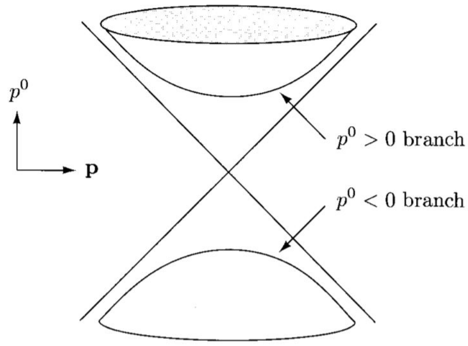
4.1 Konstrukcija stanja impulsa $|p\rangle$

Budući da stanje zadanog impulsa nije normalizabilno, ono ne može biti element Hilbertovog prostora na kojem radimo. Također, kako je kvantizirano polje distribucija, to isto mora vrijediti i za njegovo pobuđenje, stanje određenog impulsa. Da bismo dobili normalizabilno stanje na $\mathscr{H}$, sve što moramo napraviti (po uzoru na izraz (30)) je razmazati stanje $|p\rangle$ s nekom test funkcijom. Kako želimo da "razmazano" stanje bude fizikalno (na ljusci mase), test funkcija mora imati nosač na skupu: $\Gamma_M^+=\{p^2=M^2,p^0>0\}$. Taj je skup prikazan na slici 1. Uzimajući sve to u obzir normalizabilno stanje možemo napisati u obliku:

$$|\Psi_M^g\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\delta_M^{(+)}(p)g(p)\,|p\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3 2p^0}g(p)|_{\Gamma_M^+}\,|p\rangle\,, \tag{31}$$

gdje je g test funkcija, a $\delta_M^{(+)}(p)\equiv 2\pi\theta(p^0)\delta(p^2-M^2)$. Jednostavnosti radi, ([7] i [8]) mi ćemo za naša hadronska stanja uzimati: $|p,\sigma,M\rangle\equiv\delta_M^{(+)}(p)\,|p,\sigma\rangle$, što osigurava da su ona na gornjem hiperboloidu. S ovakvom definicijom stanja, matrični element iz (29) poprima oblik:

$$\begin{aligned}\langle p',\sigma',M|\mathrm{T}^{\mu\nu}(0)|p,\sigma,M\rangle =&\overline{u}'\Big[\frac{1}{2}\gamma^{\{\mu}\mathrm{P}^{\nu\}}A(\Delta^2)+\frac{i}{4M}\mathrm{P}^{\{\mu}\sigma^{\nu\}\rho}\Delta_\rho B(\Delta^2)+\\ &+\frac{1}{4M}(\Delta^\mu\Delta^\nu-\Delta^2g^{\mu\nu})D(\Delta^2)\Big]u\delta_M^{(+)}(p)\delta_M^{(+)}(p'),\end{aligned} \tag{32}$$



Slika 1: Skup $\mathit{\Gamma}_M^+$, gornji hiperboloid. Preuzeto iz [8].

koji ima nosač za: $(p, p') \in \mathit{\Gamma}_M^+ \times \mathit{\Gamma}_M^+$. Kako su stanja koja koristimo u (32) zapravo distribucije, isto možemo očekivati i za form faktore koji se pojavljuju. Idući će nam zadatak biti izračunati matrične elemente: $\langle p', \sigma', M | P^\mu | p, \sigma, M \rangle$ i $\left\langle p', \sigma', M | J^i | p, \sigma, M \right\rangle$ na dva načina: koristeći TEM i izravnim djelovanjem Poincaréovih generatora. Na taj ćemo način doći do ograničenja na form faktore u rastavu matričnog elementa TEM-a.

4.2 Matrični element impulsa

Standardna definicija Poincaréovog generatora P^μ (napomena: P^μ predstavlja generator, a P^μ predstavlja izraz definiran u (6)) preko TEM-a je dana s: $P^\mu = \int \mathrm{d}^3 x \mathrm{T}^{0\mu}(x)$. Međutim, ova definicija ne prati distribucijska svojstva TEM-a (budući da je on izveden iz QCD-a, on isto mora biti distribucija). Po uzoru na (30), Poincaréov generator P^μ definirat ćemo na način ([7]):

$$P^\mu \equiv \lim_{\substack{d \to 0 \\ R \to \infty}} \int \mathrm{d}^4 x f_{d,R}(x) \mathrm{T}^{0\mu}(x), \tag{33}$$

gdje je test funkcija $f_{d,R} \equiv \alpha_d(x_0) F_R(\mathbf{x}) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{1,3})$ odabrana tako da osigura konvergenciju integrala te da je u limesu izraz (33) neovisan o odabiru α_d i F_R. Uz ove definicije matrični element poprima oblik:

$$\left\langle p', \sigma', M | P^\mu | p, \sigma, M \right\rangle = \lim_{\substack{d \to 0 \\ R \to \infty}} \tilde{f}_{d,R}(\Delta) \left\langle p', \sigma', M | \mathrm{T}^{0\mu}(0) | p, \sigma, M \right\rangle, \tag{34}$$

gdje je $\tilde{f}$ Fourierov transformat test funkcije koji u limesu zadovoljava: $\lim\limits_{\substack{d \to 0 \\ R \to \infty}} \tilde{f}_{d,R}(\Delta) = (2\pi)^3 \delta^3\left(\vec{\Delta}\right)$.
Sada znamo kako izračunati matrični element P^μ pomoću izraza (32). Međutim, mi znamo da je naše stanje svojstveno stanje operatora impulsa te stoga vrijedi i:

$$\left\langle p', \sigma', M | P^\mu | p, \sigma, M \right\rangle = p^\mu (2\pi)^4 \delta^4(\Delta) \delta_M^{(+)}(p') \delta_{\sigma,\sigma'}. \tag{35}$$

Izjednačavanjem desnih strana izraza (34) i (35) možemo dobiti uvjete na form faktore. Impuls p^μ koji se pojavljuje na desnoj strani izraza (35) pametnije je napisati kao $\mathrm{P}^\mu + \frac{1}{2}\Delta^\mu$ jer su to veličine koje se pojavljuju na desnoj strani izraza (29). Izjednačavanjem koeficijenata uz linearno nezavisne članove možemo dobiti više uvjeta (za detaljan raspis pogledati [7]). Nama je najbitniji uvjet koji stoji uz član P^μ, a on nam govori sljedeće:

$$A(\Delta^2) \delta^4(\Delta) = \delta^4(\Delta). \tag{36}$$

Ovaj uvjet povlači sljedeću jednakost: $A(0) = 1$. Fizikalno, ova nam jednakost govori da je sva masa hadrona sadržana u njegovim sastavnicama. Iako smo ovo ograničenje izveli već u izrazu (15), ovaj pristup bio je puno rigorozniji i ispravniji. Ostali uvjeti koje dobivamo iz matričnog elementa impulsa ne daju nam nikakva nova ograničenja na form faktore te stoga moramo pogledati matrični element momenta impulsa.

4.3 Matrični element momenta impulsa

Moment impulsa se u ovom formalizmu definira analogno impulsu:

$$J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \lim_{\substack{d\to 0 \\ R\to\infty}} \int \mathrm{d}^4x f_{d,R}(x)[x^j \mathrm{T}^{0k} - x^k \mathrm{T}^{0j}(x)], \tag{37}$$

zbog čega njegov matrični element poprima oblik:

$$\left\langle p', \sigma', M|J^i|p, \sigma, M\right\rangle = -i\epsilon^{ijk} \lim_{\substack{d\to 0 \\ R\to\infty}} \frac{\partial \tilde{f}_{d,R}(\Delta)}{\partial \Delta_j} \left\langle p', \sigma', M|\mathrm{T}^{0k}(0)|p, \sigma, M\right\rangle. \tag{38}$$

Ovo je izraz za matrični element preko TEM-a. Preostaje nam još izračunati matrični element izravnim djelovanjem operatora kao u izrazu (35). U tu ćemo svrhu pogledati unitarni operator Lorentzove transformacije: $U(\alpha) = e^{i(\eta^j K^j - \beta^j J^j)}$, gdje η predstavlja rapiditet, β kut rotacije, a sumacija po j se podrazumjeva. Sada je očito da matrični element momenta impulsa možemo pisati kao:

$$\left\langle p', \sigma', M|J^i|p, \sigma, M\right\rangle = i\frac{\partial}{\partial \beta_i} \left\langle p', \sigma', M|U(\alpha = \mathscr{R})|p, \sigma, M\right\rangle_{\beta=0}. \tag{39}$$

Uvjet $\alpha = \mathscr{R}$ znači da se radi o čistoj rotaciji bez potiskivanja sustava ($\eta = 0$). Djelovanjem operatora Lorentzove transformacije na stanje $|p, \sigma, M\rangle$ dolazi do miješanja spinskih komponenata što se može pokazati korištenjem *male grupe Lorentzovih transformacija* definirane u [9]. Konkretno, dobiva se izraz:

$$U(\alpha)\,|p, \sigma, M\rangle = \sum_{\sigma'} \mathscr{D}^s_{\sigma'\sigma}(\alpha) \left|\Lambda(\alpha)p, \sigma', M\right\rangle, \tag{40}$$

gdje je $\mathscr{D}$ Wignerova rotacijska matrica (u našem je slučaju $s = \frac{1}{2}$). Još je jedino preostalo izjednačiti desne strane izraza (38) i (39) te iz navedene jednakosti iščitati ograničenja na form faktore. To ovdje nećemo raditi jer je izvod kao i prije podosta dugačak (detaljan raspis je opet u [7]). Iako na kraju dobijemo podosta uvjeta, dva definitivno najvažnija su:

$$\begin{aligned} A(\Delta^2)\delta^4(\Delta) &= \delta^4(\Delta) \\ B(\Delta^2)\delta^4(\Delta) &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Prvi uvjet nam daje ograničenje: $A(0) = 1$. To je ograničenje već izvedeno promatrajući matrični element impulsa. Drugi uvjet je ekvivalentan ograničenju $B(0) = 0$. Taj rezultat ukazuje na to da *anomalni gravitomagnetski moment* iščezava. Zajedno, ova dva ograničenja daju i ograničenje na ukupan spin:

$$J(0) = \frac{1}{2}, \tag{42}$$

koje nam daje ukupan spin u hadronu.

Bitno je napomenuti da ni u jednom slučaju nismo dobili ograničenje na D form faktor te apsolutno ništa nismo uspjeli saznati o njegovom ponašanju. Upravo se iz tog razloga $\mathcal{D}$-član (koji je definiran u idućem odjeljku) naziva *zadnja globalna nepoznanica hadrona* [4]. Promatranje D form faktora je tema za iduće poglavlje. Također, u idućem ćemo poglavlju odstupiti od matematičke rigoroznosti koju smo predstavili u ovom poglavlju. Cilj ovog poglavlja nije bio samo izvesti ograničenja na form faktore, već i motivirati distribucijska svojstva kvantiziranih polja te vidjeti kakve reperkusije takav pristup donosi u računima.

5 Fizikalna interpretacija form faktora

Iako smo već izraz (42) protumačili na način da se doprinos spina svih sastavnica hadrona zbroji u $\frac{1}{2}$, nigdje nismo formalno dali vezu između tog form faktora i spina. U ovom ćemo odjeljku prvo pogledati koja je fizikalna pozadina form faktora A i J te ćemo na taj način opravdati zaključke donesene u prethodnom odjeljku. Nakon toga ćemo se posvetiti D form faktoru. Pogledat ćemo kako je taj form faktor povezan s raspodjelom tlaka i sila smicanja u hadronu te ćemo izvesti određena ograničenja. Izvode koji slijede najlakše je provoditi u tzv. *Breitovom* sustavu. U tom su sustavu hadronska stanja dana s $p = \mathrm{P} - \frac{1}{2}\Delta$ i $p' = \mathrm{P} + \frac{1}{2}\Delta$ i to tako da vrijedi $\mathrm{P} = (E, 0, 0, 0)$ i $\Delta = (0, \boldsymbol{\Delta})$. Također, u ovom je sustavu zadovoljeno i: $t = \Delta^2 = -\boldsymbol{\Delta}^2$. Komponente matričnog elementa možemo dobiti vrlo jednostavno ([4]):

$$\begin{aligned}
\left\langle p', \sigma' | \mathrm{T}_a^{00}(0) | p, \sigma \right\rangle &= 2ME\Big[A_a(t) - \frac{t}{4M^2}[A_a(t) - 2J_a(t) + D_a(t)] + c_a(t)\Big]\delta_{\sigma,\sigma'} \\
\left\langle p', \sigma' | \mathrm{T}_a^{ik}(0) | p, \sigma \right\rangle &= 2ME\Big[D_a(t)\frac{\Delta^i\Delta^k - \delta^{ik}\boldsymbol{\Delta}^2}{4M^2} - c_a(t)\delta^{ik}\Big]\delta_{\sigma,\sigma'} \\
\left\langle p', \sigma' | \mathrm{T}_a^{0k}(0) | p, \sigma \right\rangle &= 2ME\Big[J_a(t)\frac{(-i\boldsymbol{\Delta} \times \boldsymbol{\Sigma}_{\sigma',\sigma})^k}{2M}\Big].
\end{aligned} \tag{43}$$

Energija E je dana s: $E = \sqrt{M^2 + \frac{\boldsymbol{\Delta}^2}{4}}$, a normalizacija spinora je dana s $\overline{u}'u = 2E\delta_{\sigma,\sigma'}$. Nadalje, vektor $\boldsymbol{\Sigma}$ je definiran pomoću Paulijevih spinora i Paulijevih matrica:

$$\Sigma^j_{\sigma',\sigma} = \chi^\dagger_{\sigma'}\sigma^j\chi_\sigma. \tag{44}$$

Fourierovom transformacijom matričnog elementa TEM-a dobivamo tzv. statični tenzor energije i impulsa $t^{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{s})$. Polarizacijske vektore s^μ i s'^μ biramo tako da oba 4-vektora odgovaraju polarizacijskom vektoru $(0, \mathbf{s})$ u sustavu mirovanja nukleona ([10]). Statični TEM je stoga dan kao (faktor $2E$ u nazivniku je prisutan zbog Lorentz invarijantne normalizacije):

$$t_a^{\mu\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\Delta}}{(2\pi)^3 2E} e^{-i\mathbf{r}\boldsymbol{\Delta}} \left\langle p' | \mathrm{T}_a^{\mu\nu}(0) | p \right\rangle. \tag{45}$$

Ideja nam je sada pogledati različite komponenete statičnog TEM-a. Krenut ćemo od 00 komponente pomoću koje ćemo form faktor A povezati s masom unutar hadrona. Onda ćemo pogledati komponentu $0k$ te vidjeti da se ta komponenta izravno može povezati s gustoćom momenta impulsa unutar hadrona. Na kraju će nam komponenta ij poslužiti za uvodna razmatranja o D form faktoru.

5.1 t^{00} kao gustoća energije

Zbog prisutnosti form faktora c, t^{00} je dobro definiran samo za ukupni tenzor energije i impulsa. Naime, ako promatramo ukupni tenzor, taj se form faktor poništi jer znamo da vrijedi $\sum_a c_a = 0$. Stoga, korištenjem izraza (45) i prve formule u izrazu (43), dobivamo izraz za $t^{00}(r = |\mathbf{r}|)$ (iz tih je izraza također jasno da t^{00} neće ovisiti o polarizaciji):

$$t^{00}(r) = M \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\Delta}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{r}\boldsymbol{\Delta}} \Big[A(t) - \frac{t}{4M^2}[A(t) - 2J(t) + D(t)]\Big]. \tag{46}$$

Da bismo vidjeli da je ograničenje $A(0) = 1$ ekvivalentno činjenici da je sva masa hadrona sadržana u njegovim sastavnicama, sve što trebamo napraviti je prointegrirati jednadžbu (46) po cijelom prostoru. U tom slučaju dobivamo (uzimajući u obzir to ograničenje):

$$\int \mathrm{d}^3 r\, t^{00}(r) = M, \tag{47}$$

što je upravo dokaz navedene tvrdnje. Bitno je napomenuti da smo u ovom izvodu promatrali cijeli tenzor energije i impulsa te ne znamo koliki doprinos masi dolazi od kvarkovskog dijela, a koliko od gluonskog. Idući nam je zadatak povezati form faktor J s ukupnim spinom hadrona.

5.2 Veza spina i form faktora J

U ovom ćemo odjeljku povezati $0k$-komponentu TEM-a s prostornom distribucijom momenta impulsa. Za potrebe ovog računa nećemo morati promatrati ukupan TEM iz razloga što c form faktor koji dolazi zbog nesačuvanja TEM-a različitih sastavnica stoji uz strukturu $g^{\mu\nu}$ koja, budući da radimo na Minkowskom prostorvremenu, propada u ovom slučaju. Gustoća momenta impulsa kojeg nose kvarkovi, odnosno gluoni, je standardno dana pomoću statičnog TEM-a:

$$J_a^i(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \epsilon^{ijk} r^j \mathrm{T}_a^{0k}(\mathbf{r},\mathbf{s}). \tag{48}$$

Pomoću izraza (43) i (45) možemo raspisati desnu stranu da bismo dobili direktnu vezu s J_a form faktorom. Raspis je podosta dugačak te ćemo ga ovdje samo započeti (iz razloga da čitatelju bude odmah očito kako dolaze određeni članovi s derivacijama). Koristeći gore spomenute izraze, gustoću momenta impulsa možemo napisati u sljedećem obliku:

$$J_a^i(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \epsilon^{ijk}\epsilon^{mnk} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\Delta}}{2(2\pi)^3}(-ir^j)e^{-i\mathbf{r}\boldsymbol{\Delta}} J_a(t)\Delta^m s^n. \tag{49}$$

Relacijama za Levi-Civita tenzor, ovaj izraz lagano zapišemo u obliku:

$$J_a^i(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\Delta}}{2(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\Delta^j} e^{-i\mathbf{r}\boldsymbol{\Delta}} J_a(t)(\Delta^i s^j - \Delta^j s^i), \tag{50}$$

što možemo, koristeći Gaussov teorem i parcijalnu integraciju, prevesti u sljedeći izraz:

$$J_a^i(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\Delta}}{2(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{r}\boldsymbol{\Delta}} \frac{\partial}{\partial\Delta^j}[J_a(t)(\Delta^j s^i - \Delta^i s^j)]. \tag{51}$$

Uz još malo raspisivanja, dobivamo konačan izraz za gustoću momenta impulsa:

$$\begin{aligned} J_a^i(\mathbf{r},\mathbf{s}) = & s^j \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{\Delta}}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{r}\boldsymbol{\Delta}}\Big[\Big(J_a(t) + \frac{2}{3}t\frac{\mathrm{d}J_a(t)}{\mathrm{d}t}\Big)\delta^{ij} \\ & + \Big(\Delta^i\Delta^j - \frac{1}{3}\boldsymbol{\Delta}^2\delta^{ij}\Big)\frac{\mathrm{d}J_a(t)}{\mathrm{d}t}\Big]. \end{aligned} \tag{52}$$

Prvi od ova dva člana odgovara monopolnom doprinosu ([10]) dok je drugi kvadrupolni član ([4]). U [10] se pojavljuje samo prvi član jer se pretpostavlja usrednjavanje po smjeru vektora $\mathbf{s}$, a u tom slučaju kvadrupolni član propada. Integriranjem po cijelom prostoru te sumiranjem po svim sastavnicama hadrona trivijalno dobivamo relaciju:

$$\sum\!\!\!\!\!\!\int_a \mathrm{d}^3 r J_a^i(\mathbf{r},\mathbf{s}) = s^i J(0). \tag{53}$$

Iz ove je relacije veza form faktora J i momenta impulsa očita. U idućem ćemo odjeljku pogledati ij-komponentu TEM-a i vidjeti kakav utjecaj D form faktor ima u toj priči.

5.3 Prostorne komponente i tenzor naprezanja

Tenzor naprezanja definiramo kao ij-komponente statičnog tenzora energije i impulsa. Ukupni tenzor naprezanja možemo rastaviti na dijagonalni i nedijagonalni dio u obliku:

$$t^{ij}(\mathbf{r}) = \Big(\frac{r^i r^j}{r^2} - \frac{1}{3}r^2\delta^{ij}\Big)s(r) + \delta^{ij}p(r). \tag{54}$$

Nedijagonalni dio povezan je sa silama smicanja s unutar hadrona dok nam dijagonalni dio daje informacije o tlaku p. Prije nego što krenemo razmatrati D form faktor, pogledajmo koje nam reperkusije očuvanje TEM-a daje na tlak i smicanje. Očuvanje TEM-a implicira da za statični TEM vrijedi: $\nabla_i t^{ij} = 0$. Ovaj uvjet svodi izraz (54) na sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{2}{3}s'(r) + \frac{2}{r}s(r) + p'(r) = 0, \tag{55}$$

koja pokazuje da tlak i smicanje nisu nezavisne funkcije. Uočimo da ukoliko ne bismo imali sile smicanja, tlak bi u hadronu bio konstantan, što ne bi rezultiralo stabilnošću. Stoga, sile smicanja su nužne za hadronsku stabilnost. Još jedna posljedica očuvanja TEM-a je von Laueov uvjet:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r r^2 p(r) = 0, \tag{56}$$

koji govori o tome kako se sile unutar hadrona međusobno balansiraju. Također, iz tog je uvjeta jasno da tlak u hadronu mora imati barem jednu nul-točku. Dosadašnje saznanje sugerira da je tlak pozitivan u unutrašnjosti te postaje negativan kako se približavamo rubu hadrona. Izraz (56) možemo vrlo jednostavno dokazati. Naime, zbog sačuvanja TEM-a, za proizvoljni diferencijabilni tenzor $\mathscr{T}^{jklm...}$ vrijedi:

$$\int_V \mathrm{d}^3 r t^{ij} (\nabla^i \mathscr{T}^{jklm...}) = \oint_{\partial V} \mathrm{d}a^i t^{ij} \mathscr{T}^{jklm...}, \tag{57}$$

gdje je V integracijski volumen koji ćemo uzeti da je beskonačan. Ukoliko za proizvoljni tenzor odaberemo $r^j f(r)$ (što ima smisla zbog sferne simetričnosti), gdje je $f(r)$ proizvoljna funkcija, dobivamo sljedeći funkcional:

$$I[f(r)] = \int \mathrm{d}^3 r t^{ij} [\nabla^i (x^j f(r))] \tag{58}$$

Raspisivanjem tenzora naprezanja te uzimanjem u obzir da površinski integral propada za beskonačan volumen, ova funkcionalna ovisnost poprima sljedeći oblik:

$$I[f(r)] = \int \mathrm{d}^3 r \Big(\frac{2}{3} r s(r) f'(r) + r p(r) f'(r) + 3p(r) f(r) \Big) = 0. \tag{59}$$

Iz ovog je izraza, različitim odabirima funkcije $f(r)$, moguće izvesti puno različitih ograničenja na p i s. Najjednostavniji je odabir $f(r) = 1$ koji povlači von Laueov uvjet. Napomenimo još samo da je von Laueov uvjet nužan, ali nedovoljan za stabilnost čestice.

Sada ćemo tlak i smicanje povezati sa zadnjim, D, form faktorom. Ono što je prvo bitno uočiti je to da sile smicanja možemo definirati za sastavnice hadrona ponaosob. Razlog tome je što form faktor c koji smo uveli zbog nesačuvanja TEM-a različitih sastavnica nema doprinos u nedijagonalnom dijelu tenzora naprezanja. To nam omogućava da definiramo parcijalna smicanja $s_a(r)$ gdje a ide po kvarkovima i gluonima. Koristeći drugi dio izraza (43) i izraz (45) možemo definirati kvarkovski i gluonski doprinos D form faktoru. U tom se izvodu koristi identičan raspis kao u prethodnom odjeljku kada smo povezivali spin i form faktor J. Kompletna poveznica između $D_a(t)$ form faktora[3] dana je u [10] (izraz 10). Mi ćemo ovdje pogledati taj izraz u limesu $t \to 0$ jer se u tom limesu definira $\mathcal{D}$-član:

$$\mathcal{D}_a = D_a(0). \tag{60}$$

Uzimajući u obzir da je $t = 0$, kvarkovski, odnosno gluonski doprinos D-članu definiramo na način ([4]):

$$\mathcal{D}_a = -\frac{2}{5} M \int \mathrm{d}^3 r t_a^{ij}(\mathbf{r}) \Big(r^i r^j - \frac{1}{3} r^2 \delta^{ij} \Big), \tag{61}$$

što koristeći von Laueov uvjet i dekompoziciju (54) možemo pisati i u obliku:

$$\mathcal{D}_a = -\frac{4}{15} M \int \mathrm{d}^3 r r^2 s_a(r). \tag{62}$$

[3]Cijela relacija sadrži i članove s derivacijama form faktora koje su pomnožene s t pa nam stoga ti članovi nisu bitni u limesu.

Nadalje, prosumiramo li po svim sastavnicama ($\sum_a$) i uzmemo li u obzir izraz (55), $\mathcal{D}$-član možemo izraziti i pomoću ukupnog tlaka (zbog nesačuvanja, tlak je definiran jedino za ukupni sustav):

$$\mathcal{D}_a = -\frac{4}{15}M\int \mathrm{d}^3 r r^2 s(r) = M\int \mathrm{d}^3 r r^2 p(r). \tag{63}$$

U ovom smo odjeljku detaljno povezali fizikalne veličine s form faktorima. Pokazali smo vezu gustoće energije s A form faktorom, gustoće spina s J form faktorom te smo na kraju pomoću tenzora naprezanja D form faktor povezali s tlakom i smicanjem unutar hadrona. Kao i u ostalim granama fizike, tenzor naprezanja $t^{ij}(r)$ predstavlja silu koju osjeća infinitezimalni dio hadrona koji je za r udaljen od središta. U idućem ćemo se odjeljku posvetiti samo D form faktoru te vidjeti koja nova saznanja možemo dobiti pomoću njega. Nakon toga ukratko ćemo opisati kako možemo pristupiti gravitacijskim funkcijama strukture pomoću eksperimenta te time završiti ovaj rad.

6 $\mathcal{D}$-član kao posljednja globalna nepoznanica hadrona

U ovom ćemo odjeljku prvo još jednom naglasiti što točno mislimo pod time da je $\mathcal{D}$-član posljednja nepoznanica hadrona. Nakon toga ćemo pogledati kako pomoću $\mathcal{D}$-člana možemo dobiti neke informacije o tlaku i silama smicanja (za to ćemo korisiti i saznanja iz prethodnog odjeljka) unutar hadrona. Zatim ćemo izračunati $\mathcal{D}$-član za najjednostavniji model jezgre: tzv. model kapljice. Na kraju ćemo još dati kratak pregled dosadašnjeg saznanja o $\mathcal{D}$-članu.

Već je u uvodu rečeno da za ispitivanje strukture hadrona možemo koristiti elektromagnetsku i gravitacijsku probu. Osim njih dvije, često se za ispitivanje koristi i slaba sila. Hadroni koje nastojimo ispitivati za te se interakcije vežu kroz struje tih interakcija: J^{μ}_{em}, J^{mu}_{slaba} i $\mathrm{T}^{\mu\nu}$. Matrični elementi tih struja mogu se zapisati u terminima form faktora koji u sebi sadrže bogate informacije o hadronu. Informacije o temeljnim globalnim značajkama hadrona dobivamo u limesu kada nema prijenosa impulsa: $t \to 0$. Na primjer, elektromagnetskim ispitivanjem dobivamo informacije o naboju i magnetskom dipolnom momentu unutar čestice. Slabom probom dobiva se aksijalna konstanta vezanja g_a i inducirana pseudoskalarna konstanta vezanja g_p. Masa i spin mogu se povezati s form faktorima matričnog elementa TEM-a što znači da do njih dolazimo gravitacijskom probom. Međutim, taj matrični element sadrži još jedan nezavisan form faktor te iz toga zaključujemo da postoji još jedno fundamentalno svojstvo čestice koje zasad ne znamo tumačiti sa sigurnošću. Također, pažljivom smo analizom u četvrtom odjeljku uspjeli dobiti ograničenja na A, B i J form faktore u limesu $t \to 0$, no ništa nismo uspjeli saznati o D form faktoru ([11]):

$$A(0) = 1, \quad B(0) = 0, \quad J(0) = \frac{1}{2}, \quad \mathcal{D} = D(0) = \text{nepoznato}. \tag{64}$$

Dakle, budući da sva ostala svojstva hadrona znamo u jednakoj mjeri, slobodno možemo reći da je svojstvo koje je posljedica $\mathcal{D}$-člana posljednja globalna nepoznanica hadrona. Sada ćemo pogledati kako izračunati tlak, smicanje i gustoću energije pomoću D form faktora.

6.1 Formule za tlak i smicanje pomoću D form faktora

U [4] su dane relacije pomoću kojih možemo saznati tlak i sile smicanja unutar hadrona uz pomoć D form faktora:

$$\begin{aligned} s(r) &= -\frac{1}{4M} r \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\tilde{D}(r) \\ p(r) &= \frac{1}{6M}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\tilde{D}(r) \\ \tilde{D}(r) &= \int \frac{\mathrm{d}^r \varDelta}{(2\pi)^2} e^{-i\boldsymbol{\Delta}\mathbf{r}} D(t). \end{aligned} \tag{65}$$

Dakle, tlak i smicanje mogu se izračunati pomoću Fourierovog transformata D form faktora. Ove se formule mogu izvesti iz izraza (10) u [10]. To je onaj isti izraz koji se koristi za izvod relacije (63). Kao i prije, smicanje je dobro definirano i za određene sastavnice hadrona te je stoga formula za kvarkovski, odnosno gluonski doprinos smicanju ista kao i formula za ukupno smicanje. Jedino što treba promijeniti je: $s \to s_a$ i $D \to D_a$. Budući da je tlak dijagonalni doprinos tenzoru naprezanja, nije mu moguće definirati kvarkovski, odnosno gluonski doprinos samo pomoću D form faktora, već je potrebno i poznavanje c form faktora. Osim ovih relacija, može se pokazati ([4]) da vrijede i sljedeći izrazi za gustoću energije i tlak u središtu hadrona:

$$\begin{aligned} t^{00}(r) &= \frac{M}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t \sqrt{-t} \Big(A(t) - \frac{t}{(2M)^2} D(t) \Big) \\ p(0) &= \frac{1}{24\pi^2} M \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t \sqrt{-t} D(t). \end{aligned} \tag{66}$$

Uvjeti koje form faktori moraju zadovoljavati da bi ovi integrali konvergirali nalaze se u [4].

6.2 Lokalni kriterij stabilnosti i negativnost $\mathcal{D}$-člana

Ukoliko ne želimo da sustav kolapsira sam u sebe, sila koju osjeća diferencijalni komadić površine $\mathrm{d}S^j$ na bilo kojoj udaljenosti r od središta mora biti usmjerena prema van. Silu na diferencijalni komadić površine možemo povezati sa tenzorom naprezanja:

$$\mathrm{d}F^i = t^{ij}(\mathbf{r}) \mathrm{d}S^j = \Big(\frac{2}{3} s(r) + p(r) \Big) \mathrm{d}S^i. \tag{67}$$

Uvjet da je sila pozitivna (to jest u smjeru povećanja varijable r) na svakoj udaljenosti od središta postaje:

$$\frac{2}{3} s(r) + p(r) \geqslant 0. \tag{68}$$

Svi stabilni sustavi koji su zasad eksperimentalno promatrani zadovoljavaju ovaj uvjet ([12]). Međutim, postoje i nestabilni sustavi koji zadovoljavaju ovaj uvjet. Stoga je taj uvjet nužan, ali nedovoljan za stabilnost nekog hadrona. Koristeći izraz (63) i uvjet (68) lagano vidimo da vrijedi sljedeća nejednakost:

$$0 \leqslant \int \mathrm{d}^3 r r^2 \Big[\frac{2}{3} s(r) + p(r) \Big] = -\frac{3\mathcal{D}}{2M}. \tag{69}$$

Ova nejednakost implicira da u stabilnom sustavu vrijedi:

$$\mathcal{D} \leqslant 0. \tag{70}$$

Nadalje, uvjet (68) nam može poslužiti kao određena distribucija te pomoću nje možemo usrednjiti različite veličine. U literaturi se često definira usrednjeni kvadrat radijusa (tzv. mehanički radijus hadrona) kao:

$$\Big\langle r^2 \Big\rangle_{mech} = \frac{\int \mathrm{d}^3 r r^2 \big(\frac{2}{3} s(r) + p(r) \big)}{\int \mathrm{d}^3 r \big(\frac{2}{3} s(r) + p(r) \big)}, \tag{71}$$

što se uz malo raspisivanja ([4]) može povezati sa D form faktorom i $\mathcal{D}$-članom:

$$\Big\langle r^2 \Big\rangle_{mech} = \frac{6\mathcal{D}}{\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t D(t)} \tag{72}$$

Sada je već jasno da bismo poznavanjem D form faktora imali pristup različitim mehaničkim opservablama. U idućem ćemo odjeljku eksplicitno izračunati $\mathcal{D}$-član za najjednostavniji model jezgre, model tekuće kapljice.

6.3 $\mathcal{D}$-član u modelu tekuće kapljice

Za dovoljno veliki sustav, plauzibilno je pretpostaviti da je tlak $p(r)$ konstantan unutar, a da se značajnije počinje mijenjati tek oko ruba sustava. Model tekuće kapljice je model koji rub sustava modelira delta funkcijom, to jest rub je vrlo oštar. U takvom modelu formulu za tlak možemo pisati u sljedećem obliku:

$$p(r) = p_0\theta(R - r) - \frac{p_0 R}{3}\delta(R - r), \tag{73}$$

gdje je p_0 tlak unutar sustava. Koristeći diferencijalnu jednadžbu (55) za tren dobivamo smicanje:

$$s(r) = \frac{p_0 R}{2}\delta(R - r) = \gamma\delta(R - r), \tag{74}$$

gdje smo s γ definirali površinsku napetost. Izraz (63) povezuje $\mathcal{D}$-član sa smicanjem i tlakom. Iskoristivši taj izraz, za $\mathcal{D}$-član u modelu tekuće kapljice dobivamo:

$$\mathcal{D} = -\frac{4M}{5}\frac{4\pi}{3}\gamma R^4. \tag{75}$$

Uočimo da je $\mathcal{D}$-član negativan, kao što bi i trebao biti. Osim $\mathcal{D}$-člana, u ovom modelu možemo vrlo jednostavno dobiti i usrednjeni kvadrat mehaničkog radijusa. Uvrštavanjem smicanja i tlaka u izraz (71) za tren dobivamo izraz:

$$\left\langle r^2 \right\rangle_{mech} = \frac{3}{5}R^2. \tag{76}$$

Ovaj nam je model, koji se najčešće koristi za opis velikih jezgara, dao poprilično lijepe rezultate do kojih smo došli uz vrlo malo posla. Nešto realniji opis jezgre bio bi model u kojem bismo rub sustava modelirali s konačnom debljinom. Rezultati za taj model dani su u [10]. Bitno je naglasiti da i taj model predviđa negativni $\mathcal{D}$-član. Ovime završavamo pregled D form faktora i $\mathcal{D}$-člana te ćemo u idućem odjeljku ukratko reći što se zasad zna o njima.

6.4 $\mathcal{D}$-član u teoriji i eksperimentu

Form faktore $A(t)$ i $B(t)$ u četvrtom smo odjeljku uspjeli ograničiti pomoću općih principa, dok D form faktor nismo uspjeli ograničiti čak ni u limesu $t \to 0$. To znači da taj form faktor daje uvid u dinamiku koja se zbiva unutar hadrona, a nije povezan sa svojstvima kao što su npr. Lorentzova transformacija. Iz tog je razloga D form faktor različit za različite sustave. Međutim, slobodne teorije kao što su Klein-Gordonova i Diracova mogu predvidjeti vrijednost $\mathcal{D}$-člana ([13]):

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{KG} &= -1 \\ \mathcal{D}_{Dirac} &= 0. \end{aligned} \tag{77}$$

Osim toga, u prethodnom smo odjeljku uspjeli izračunati $\mathcal{D}$-član i mehanički radijus za masivne jezgre u modelu tekuće kapljice.

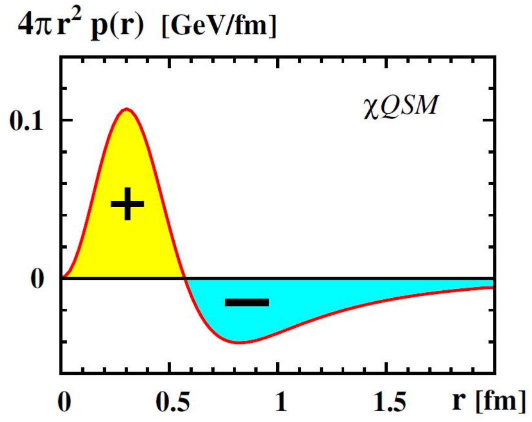
Postoji više modela pomoću kojih se proučava nukleonski $\mathcal{D}$-član. Posebno ćemo spomenuti *Kiralno-kvarkovski solitonski model* (χQSM) u kojem $\mathcal{D}$-član iščezava u slučaju ako nemamo kiralnih interakcija. Predviđena vrijednost $\mathcal{D}$-člana u tom modelu je ([4]):

$$-4 \leqslant \mathcal{D} \leqslant -2. \tag{78}$$

Također, u limesu velikog broja boja N_C, ovaj model predviđa okusnu hijerarhiju D form faktora:

$$|D_u(t) + D_d(t)| \sim N_C^2 \gg |D_u(t) - D_d(t)| \sim N_C. \tag{79}$$

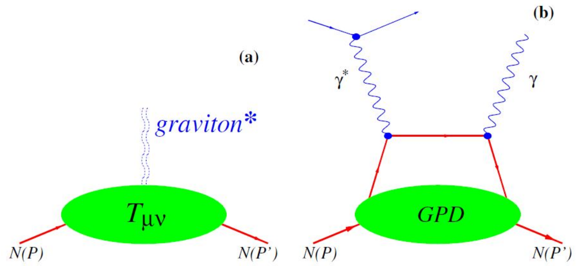
Na slici 2 prikazana je ovisnost tlaka $4\pi r^2 p(r)$ o udaljenosti od središta hadrona r, u ovom modelu. Pozitivan tlak za $0 \leqslant r \lesssim 0.6$ fm predstavlja odbijanje, a negativan za $r \gtrsim 0.6$ fm predstavlja privlačenje. Oni se izbalansiraju točno tako da zadovolje von Laueov identitet. Još nam je samo ostalo ukratko objasniti kako možemo eksperimentalno pristupiti gravitacijskim form faktorima.



Slika 2: Ovisnost $4\pi r^2 p(r)$ o r izračunata u χQSM modelu. Preuzeto iz [13]

7 Eksperimentalni pristup gravitacijskim form faktorima

Prirodni način za eksperimentalno postići gravitacijsku probu bilo bi raspršenje gravitona. Kako takav eksperiment zasad nije moguć, moramo tražiti alternativne opcije za pristupiti gravitacijskim form faktora. Jedan od praktičnijih eksperimenta koji nam daje informacije o gravitacijskim form faktorima je *duboko virtualno kumptonsko raspršenje* (DVCS) prikazan na slici 3. U toj reakciji



Slika 3: Raspršenje gravitona na nukleonu lijevo te DVCS desno. Preuzeto iz [4]

u izlaznom stanju imamo foton: $eN \to e'N'\gamma$, gdje e predstavlja elektron, N nukleon, a γ foton. Funkcije koje opisuju ovaj proces nazivaju se *generalizirane partonske distribucije* (GPD) ([14]) te su one kao što im i ime nalaže generalizacija *partonskih distribucijskih funkcija* (PDF) koje se pojavljuju u DIS-u. U slučaju nukleona, GPD-evi i form faktori EMT-a povezani su preko drugog Mellinovog momenta[4]:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x x H_a(x,\zeta,t) &= A_a(t) + \zeta^2 D_a(t) \\ \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x x E_a(x,\zeta,t) &= B_a(t) - \zeta^2 D_a(t), \end{aligned} \tag{80}$$

gdje su H i E generalizirane partonske distribucije. GPD-eve možemo promatrati kao amplitude procesa izvlačenja jednog partona koji nosi frakciju momenta $X - \zeta$ te dodavanje partona frakcije momenta $X + \zeta$, gdje X predstavlja Bjorkenov x. Dakle, pomoću DVCS-a saznajemo GPD-eve te pomoću njih dobivamo form faktore.

[4]Detaljnija analiza GPD-eva kao i definicija Mellinovih momenata dana je u opsežnoj referenci [15]

8 Zaključak

U ovom smo seminaru detaljno razmotrili gravitacijske funkcije strukture. Prvo smo se pozabavili matričnim elementom tenzora energije i impulsa. Njega smo pomoću raznih simetrija uspjeli rastaviti na linearnu kombinaciju najopćenitijih Lorentzovih struktura. Funkcije u rastavu upravo su gravitacijske funkcije strukture. Jednom kada smo dobili ukupni matrični element bili smo u mogućnosti pronaći određena ograničenja na form faktore. Te smo izvode radili uzimajući u obzir distribucijska svojstva polja. Uspjeli smo naći ograničenje na form faktore A i B, dok za form faktor D nismo dobili nikakvu informaciju. Sljedeći nam je korak bio dati tim form faktorima i ograničenjima neku fizikalnu pozadinu. U par smo koraka form faktor A povezali s raspodjelom energije, a form faktor J s raspodjelom momenta impulsa unutar hadrona. Nakon toga smo se posvetili D form faktoru i $\mathcal{D}$-članu. Njih smo povezali s tlakom i silama smicanja unutar hadrona. Također, uspjeli smo i izračunati $\mathcal{D}$-član u najjednostavnijem opisu atomske jezgre, modelu tekuće kapljice. Uz to, dali smo i kratak pregled trenutačnog znanja o D form faktoru unutar hadrona. Na kraju smo još ukratko opisali kako eksperimentalno pristupati gravitacijskim funkcijama strukture. Budući da u eksperimentima ne možemo koristiti gravitone, morali smo promatrati duboko virtualno komptonsko raspršenje.

Zahvale

Zahvaljujem se svom mentoru K. Kumeričkom što me uveo u ovo područje istraživanja te na strpljivom vođenju kroz pisanje seminara.

Literatura

[1] M. Thomson, *Modern particle physics.* Cambridge University Press, 2013.

[2] I. Kobzarev and L. Okun, "Gravitational interaction of fermions," *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, vol. 43, pp. 1904–1909, 1962.

[3] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, vol. 1. Cambridge University Press, 1995.

[4] M. V. Polyakov and P. Schweitzer, "Forces inside hadrons: Pressure, surface tension, mechanical radius, and all that," *Int. J. Mod. Phys. A*, vol. 33, p. 1830025, 2018.

[5] H. Pagels, "Energy-momentum structure form factors of particles," *Phys. Rev.*, vol. 144, pp. 1250–1260, 1966.

[6] X.-D. Ji, "Lorentz symmetry and the internal structure of the nucleon," *Phys. Rev. D*, vol. 58, p. 056003, 1998.

[7] P. Lowdon, K. Y.-J. Chiu, and S. J. Brodsky, "Rigorous constraints on the matrix elements of the energy-momentum tensor," *Phys. Lett. B*, vol. 774, pp. 1–6, 2017.

[8] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory.* Addison-Wesley, 1995.

[9] A. Ilakovac, *Teorija polja 1 i 2, skripta.* Prirodoslovno - matematički fakultet, 2020.

[10] M. V. Polyakov, "Generalized parton distributions and strong forces inside nucleons and nuclei," *Phys. Lett. B*, vol. 555, pp. 57–62, 2003.

[11] J. Hudson, I. A. Perevalova, M. V. Polyakov, and P. Schweitzer, "Structure of the energy-momentum tensor and applications," 2016. arXiv:1612.06721.

[12] I. A. Perevalova, M. V. Polyakov, and P. Schweitzer, "LHCb pentaquarks as a baryon-ψ(2s) bound state: Prediction of isospin-$\frac{3}{2}$ pentaquarks with hidden charm," *Phys. Rev. D*, vol. 94, p. 054024, 2016.

[13] M. V. Polyakov and P. Schweitzer, "Gravitational form factors and internal forces in Hadrons," *Frascati Phys. Ser.*, vol. 69, pp. 31–36, 2019.

[14] A. Belitsky and A. Radyushkin, "Unraveling hadron structure with generalized parton distributions," *Phys. Rep.*, vol. 418, p. 1–387, 2005.

[15] M. Diehl, "Generalized parton distributions," *Phys. Rep.*, vol. 388, p. 41–277, 2003.