

Financijsko modeliranje

Vanja Wagner

PRIRODOSLOVNO MATEMATIČKI FAKULTET – MATEMATIČKI ODSJEK, SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
E-mail adresa: `wagner@math.hr`

Sadržaj

	v
Poglavlje 0. Uvod	1
0.1. Cilj kolegija	1
0.2. Osnovni elementi financijskog tržišta	2
0.3. Osnovne ideje određivanja cijene opcija	3
Poglavlje 1. Višeperiodni modeli u diskretnom vremenu – dinamički modeli	7
1.1. Opis modela: imovine, strategije i arbitraža	7
1.2. Martingali i mogućnost arbitraže	12
1.3. Potpuni modeli tržišta	16
1.4. CRR model	19
1.5. Problem optimalnog zaustavljanja i američke opcije	26

Ovo su materijali za kolegij Financijsko modeliranje, bazirani na skripti prof.dr.sc. Zorana Vondračeka iz kolegija *Financijsko modeliranje 1* i *Financijsko modeliranje 2*. Čitatelje koji uoče greške bilo kakve prirode molimo da na njih ukažu putem maila. Isto vrijedi i za sve komentare i sugestije koje bi mogle poboljšati izlaganje sadržaja.

Posljednja izmjena napravljena je 20. listopada 2025.

POGLAVLJE 0

Uvod

0.1. Cilj kolegija

Osnovni cilj kolegija je uvesti jednostavne modele financijskog tržišta u diskretnom i neprekidnom vremenu, te objasniti vjerojatnosne metode za precizan matematički opis i razumijevanje tih modela. Kolegij je podijeljen u 3 glavna dijela:

(i) **Dinamički (diskretni) modeli financijskih tržišta**

Opisujemo općeniti višeperiodni model financijskog tržišta (u kojem se promatra evolucija tržišta u končno mnogo vremenskih trenutaka). Uvodimo osnovne pojmove: financijska imovina, portfelj, arbitraža, nearbitražna cijena, martingalna mjera, potpunost tržišta. Dokazujemo fundamentalne teoreme financijskih tržišta koji daju vezu između arbitraže/potpunosti i martingalne mjere. Promatramo izvedene vrijednosnice, te određivanje nearbitražne cijene i pripadnog replicirajućeg portfelja. Promatramo osnovni višeperiodni model financijskih tržišta zvan Cox-Ross-Rubinsteinov model. Podsjećamo se teorije (diskretnih) supermartingala, uvodimo vremena zaustavljanja i Snellov omotač slučajnog procesa, specijalno Markovljevog lanca. Primjenjujemo matematičku teoriju na problem određivanja nearbitražnih cijena američkih opcija u CRR modelu.

(ii) **Brownovo gibanje i Itôv račun**

Definiramo Brownovo gibanje i promatramo njegova osnovna svojstva. Uvodimo pojam Itôvog integrala, prvo za jednostavne, zatim za opće integrande. Uvodimo pojam Itôvog procesa i dokazujemo Itôvu formulu. Osnovni primjer je geometrijsko Brownovo gibanje.

(iii) **Black-Scholesov model**

Uvodimo model preko odgovarajuće stohastičke diferencijalne jednadžbe za kretanje cijene dionice. Promatramo parcijalne diferencijalne jednadžbe u BSM modelu. Dokazujemo Girsanovljev teorem (o promjeni vjerojatnosti), te analiziramo potpunost modela preko teorema o reprezentaciji martingala. Određivanje cijena i zaštita (hedging) europskih i egzotičnih izvedenica u BSM modelu.

Predavanja prate skriptu Z.Vondraček: *Financijsko modeliranje*. Osnovnu literaturu za kolegij čine sljedeće publikacije:

- W. A. Baxter, A. Rennie, *Financial Calculus*, Cambridge University Press, 1996.
- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 1996.
- M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 1997.
- S. R. Pliska, *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell Publishers, 1997.

- S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer, 2004.

0.2. Osnovni elementi financijskog tržišta

Financijska tržišta općenito su kompleksna, no mi ćemo usklodu ovog kolegija promatrati osnovni model koji se u načelu sastoji od dvije vrste financijskih imovina – rizične i nerizične.

Kao **rizičnu imovinu** uzet ćemo dionicu, obzirom da njena cijena neprestano fluktuirala, uglavnom na nepredvidiv način. Stoga ulaganje u dionice u sebi nosi rizik.

Pod **nerizičnom imovinom** smatrat ćemo financijski instrument koji donosi siguran, predvidiv povrat. To je najjednostavnije modelirati novcem u banci (npr. na štednoj knjižici) uložnim uz fiksnu kamatnu stopu.

Zašto investitori ulažu u rizičnu imovinu? Zato što očekuju veći povrat nego kod nerizične imovine, te su stoga spremni preuzeti rizik.

Osim dionica i novca u banci, promatrat ćemo i **opcije**, odnosno izvedene vrijednosne papire (izvedenice, engl. derivative securities, derivatives). Otkud ime izvedeni vrijednosni papiri? Zato što je njihova vrijednost, odn. cijena, izvedena iz vrijednosnice na koju su napisani. Na primjer, vrijednost opcije na dionicu izvedena je iz vrijednosti dionice (što ne znači da ne ovisi i o drugim faktorima).

Što je u stvari opcija? Opcija je ugovor koji vlasniku ugovora daje pravo, ali ne i obavezu, kupiti ili prodati neku imovinu do određenog datuma (ili na određeni datum) po unaprijed dogovorenoj cijeni. Osnovno svojstvo opcije je da vlasnik opcije **ne** mora kupiti (odn. prodati) imovinu. U ugovoru sudjeluju dvije strane – prodavatelj (pisac) opcije, t.j. osoba koja izdaje opciju, te kupac opcije, t.j. osoba koja postaje vlasnik opcije.

Uobičajeniji **ugovor** između dvije strane je tzv. *forward* ugovor. Po tom ugovoru se jedna od strana obavezuje prodati (ili kupiti) od druge strane neku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni. U ovom slučaju stranka je obavezna na prodaju (ili kupnju) i ne može odustati od ugovora. Dakle, za razliku od opcije, kod forwarda ne postoji opcija odustajanja.

PRIMJER 0.2.1. Cijena jedne dionice Kraša KRAS na dan 29.9.2022. iznosila je $S_0 = 690.00$ Kn.

Call opcija (opcija poziva) s danom dospijeca 29.12.2022. (engl. *maturity*) i *cijenom izvršenja* $K = 695.00$ Kn (engl. *strike price, exercise price*) je ugovor koji kupcu opcije daje pravo na kupnju (od pisca opcije) jedne dionice KRAS-a na dan 29.12.2022. po cijeni od $K = 695.00$ Kn.

Put opcija (opcija ponude) s danom dospijeca 29.12.2022. i *cijenom izvršenja* $K = 695.00$ Kn je ugovor koji kupcu opcije daje pravo na prodaju (piscu opcije) jedne dionice KRAS-a na dan 29.12.2022. po cijeni od $K = 695.00$ Kn. Neka je S_T cijena jedne dionice Kraša na dan dospijeca 29.12.2022.

Pozicija kupca (odn. vlasnika) call opcije na dan dospijeca 29.12.2022.

- ako je cijena $S_T > K = 695.00$, na primjer, $S_T = 705.00$ Kn, vlasnik opcije će iskoristiti svoje pravo i kupiti (od pisca) jednu dionicu Kraša za 695.00 Kn, te je istog trenutka prodati na tržištu za tržišnu cijenu od $S_T = 705.00$ Kn. Na taj način će kupac ostvariti profit od $S_T - K = 705.00 - 695.00 = 10.00$ Kn.

- ako je cijena $S_T \leq K = 695.00$ Kn, na primjer, $S_T = 685.00$ Kn, vlasnik opcije ne koristi svoje pravo, jer na tržištu dionicu može kupiti jeftinije od cijene dospijeca.
- vrijednost opcije na dan dospijeca jednaka je $\max(S_T - K, 0) = \max(10, 0)$.

Pozicija pisca call opcije na dan dospijeca 29.12.2022. je suprotna od kupčeve:

- ako je cijena $S_T > K = 695.00$, na primjer, $S_T = 705.00$ Kn, pisac opcije mora prodati dionicu Kraša za $K = 695.00$ kn, dok je tržišna vrijednost $S_T = 705.00$ Kn, te prema tome gubi 10.00 Kn.
- ako je cijena $S_T \leq K = 695.00$ Kn, kupac ne koristi ugovor, te pisac ne gubi ništa.
- vrijednost opcije na dan dospijeca jednaka je $-\max(S_T - K, 0) = -\max(10, 0)$.

Zaključak: budući da vlasnik opcije može samo dobiti ugovorom, a pisac opcije samo izgubiti, jasno je da pisac mora od kupca tražiti premiju za pravo koje opcija daje. Ta premija je cijena opcije koju kupac mora platiti piscu na dan izdavanja opcije.

Osnovno pitanje: kolika je pravedna (racionalna) cijena opcije?

0.3. Osnovne ideje određivanja cijene opcija

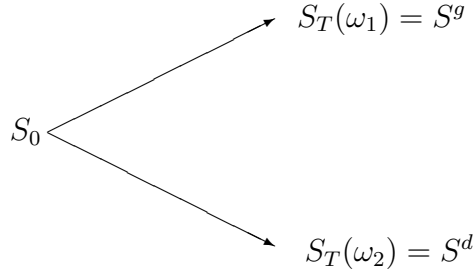
Sada ćemo na vrlo jednostavnom modelu objasniti osnovnu ideju određivanja pravedne cijene opcija. Da bismo to mogli učiniti, uvodimo sljedeće pretpostavke o financijskom tržištu (tzv. tržište *bez trenja*):

- sve stranke imaju isti pristup relevantnim informacijama,
- ne postoje troškovi transakcija (trgovanje je besplatno),
- sva financijska imovina je beskonačno dijeljiva i likvidna,
- kamatna stopa jednaka je za posuđivanje i ulaganje.

Vratimo se na Primjer 0.2.1: $S_0 = 690.00$, $K = 695.00$, $T = 3$ mjeseca. Pretpostavimo da je kamatna stopa za 3 mjeseca fiksna i iznosi 1%. To znači da jedna kuna uložena danas za tri mjeseca daje 1.01 Kn. Stavimo $r = 0.01$. Da bismo mogli odrediti cijenu call opcije, moramo na neki način modelirati slučajno kretanje cijene dionice Kraša. Predlažemo najjednostavniji mogući model, za koji je jasno da nije realan. Bez obzira na to, model je ilustrativan i poučan, a pokazat ćemo tokom kolegija da se može poopćiti tako da zadrži jednostavno svojstvo, ali postaje puno realniji.

Pretpostavke: nakon tri mjeseca, $T = 3$, cijena jedne dionice Kraša može porasti i iznositi će $S^g = 705.00$ Kn, ili može pasti i iznositi će $S^d = 685.00$ Kn. Reći ćemo da se dogodio elementarni događaj ω_1 ako je cijena jednaka S^g , odnosno da se dogodio ω_2 ako je cijena jednaka S^d . Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Cijena dionice nakon tri mjeseca S_T je slučajna i vrijedi

$$\begin{aligned} S_T(\omega_1) &= S^g = 705.00, \\ S_T(\omega_2) &= S^d = 685.00. \end{aligned}$$



Dakle, $S_T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$ je slučajna varijabla. Naravno, u trenutku $t = 0$ (t.j. sada), ne znamo da li će se dogoditi ω_1 ili ω_2 (odnosno koje je pravo stanje svijeta).

Izračunajmo vrijednost C_T call opcije u trenutku T . Uočimo da ta vrijednost ovisi o tome da li se dogodio ω_1 ili ω_2 . Dakle, $C_T : \Omega \rightarrow \mathbf{R}_+$ je slučajna varijabla i vrijedi:

$$\begin{aligned} C_T(\omega_1) &= S_T(\omega_1) - K = S^g - K = 705.00 - 695.00 = 10.00, \\ C_T(\omega_2) &= 0. \end{aligned}$$

Uočimo da možemo pisati $C_T = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$. Također, C_T koji smo gore izračunali je vrijednost opcije u kunama nakon tri mjeseca. Zbog vremenske vrijednosti novca, sadašnja vrijednost opcije nakon tri mjeseca je $(1+r)^{-1}C_T$. Tu vrijednost zvat ćemo diskontirana vrijednost. Dakle

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+r}C_T(\omega_1) &= \frac{1}{1+0.01} \times 10 = 9.9, \\ \frac{1}{1+r}C_T(\omega_2) &= 0. \end{aligned}$$

Jedna od mogućih ideja određivanja cijene opcija je izračunati očekivanje njezine diskontirane vrijednosti. Za računanje očekivanja potrebno je odrediti vjerojatnosti elementarnih događaja. Postoje dva načina kako se to može učiniti. Jedan je statistički, po kojem se vjerojatnosti procjenjuju iz povijesnih podataka. Takvu vjerojatnost možemo zvati objektivnom. Drugi način određivanja vjerojatnosti je subjektivan, po kojem investitori procjenjuju vjerojatnosti na subjektivan način (korištenjem informacija unutar i izvan tržišta). Na primjer, na tržištu na kojem se očekuje pad cijena dionica (bear market), subjektivna procjena vjerojatnosti može izgledati ovako:

$$\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = 0.2 \quad \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 0.8.$$

Uz takvu vjerojatnost, očekivanje diskontirane vrijednosti opcije bilo bi

$$\mathbf{E} \left[\frac{1}{1+r}C_T \right] = 0.2 \times \frac{1}{1.01} \times 10 + 0.8 \times \frac{1}{1.01} \times 0 = 1.98.$$

Dakle, investitoru koji predviđa pad tržišta (uz subjektivnu procjenu vjerojatnosti kao gore), opcija vrijedi 1.91 Kn (odnosno, toliko je spreman platiti za nju). Na tržištu na kojem se očekuje rast cijena dionica (bull market), subjektivna procjena vjerojatnosti može izgledati ovako:

$$\mathbf{P}(\{\omega_1\}) = 0.8 \quad \mathbf{P}(\{\omega_2\}) = 0.2.$$

Uz takvu vjerojatnost, očekivanje diskontirane vrijednosti opcije bilo bi

$$\mathbf{E} \left[\frac{1}{1+r} C_T \right] = 0.8 \times \frac{1}{1.01} \times 10 + 0.2 \times \frac{1}{1.01} \times 0 = 7.92,$$

odnosno četiri puta više. Jasno je da će se na takav način dvije strane u ugovoru koje imaju suprotna očekivanja o tržištu teško dogovoriti o cijeni opcije. Međutim, za izgradnju pouzdanog modela financijskog tržišta, mora biti zagarantirana jedinstvenost cijene izvedenih vrijednosnica. To se može postići primjenom **replicirajućeg portfelja**.

Objasnimo detaljno što je to replicirajući portfelj. Pretpostavimo da investitor može trgovati sa dvije financijske imovine – dionicama Kraša i novcem u banci (t.j., može uložiti novac u banku ili ga posuditi iz banke). Označimo sa ϕ^1 broj dionica Kraša koje investitor posjeduje (ili kupi) u trenutku $t = 0$ (zbog pretpostavke o beskonačnoj djeljivosti ϕ^1 može biti proizvoljan realan broj). Neka je ϕ^0 iznos novca koji investitor u trenutku $t = 0$ ima u banci (ϕ^0 može biti negativan – novac posuđen iz banke). Uređen par $\phi = (\phi^0, \phi^1) \in \mathbf{R}^2$ zovemo portfelj u trenutku $t = 0$. Kolika je vrijednost $V_0(\phi)$ takvog portfelja ϕ ? Očito je

$$V_0(\phi) = \phi^0 + \phi^1 S_0 = \phi^0 + 690\phi^1.$$

Kolika je vrijednost $V_T(\phi)$ portfelja ϕ u trenutku $t = T$? Budući da je cijena dionice Kraša slučajna, to će i vrijednost portfelja biti slučajna varijabla, $V_T(\phi) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$. Vrijedi:

$$V_T(\phi) = \phi^0(1+r) + \phi^1 S_T.$$

Preciznije

$$\begin{aligned} V_T(\phi)(\omega_1) &= \phi^0(1+r) + \phi^1 S_T(\omega_1) = 1.01\phi^0 + 705.00\phi^1, \\ V_T(\phi)(\omega_2) &= \phi^0(1+r) + \phi^1 S_T(\omega_2) = 1.01\phi^0 + 685.00\phi^1. \end{aligned}$$

Kažemo da portfelj ϕ replicira call opciju ako vrijedi $V_T(\phi) = C_T$, t.j., vrijednost portfelja jednaka je vrijednosti call opcije.

Pitanje: da li postoji replicirajući portfelj za našu call opciju? Odgovor je pozitivan što se lako i vidi. Zaista, replicirajući portfelj ϕ mora zadovoljavati sljedeće dvije jednakosti: $V_T(\phi)(\omega_1) = C_T(\omega_1)$ i $V_T(\phi)(\omega_2) = C_T(\omega_2)$. To možemo napisati kao

$$\begin{aligned} 1.01\phi^0 + 705.00\phi^1 &= 10.00, \\ 1.01\phi^0 + 685.00\phi^1 &= 0. \end{aligned}$$

To je sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, ϕ^0 i ϕ^1 . Rješavanjem slijedi:

$$\phi^0 = -339.11, \quad \phi^1 = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Dakle, portfelj $\phi = (-339.11, 0.5)$ replicira call opciju, odnosno portfelj ϕ i call opcija imaju jednaku vrijednost u trenutku $t = T$. Prema tome, portfelj ϕ i call opcija moraju imati jednaku vrijednost i u trenutku $t = 0$. Kolika je vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$? Računamo:

$$V_0(\phi) = \phi^0 + \phi^1 S_0 = -339.11 + 690 \times 0.5 = 5.89.$$

Međutim, to znači da je i vrijednost call opcije u trenutku $t = 0$ jednaka upravo $C_0 = 5.89$.

Pogledajmo malo detaljnije princip na kojem se zasniva određivanje cijene opcije pomoću replicirajućeg portfelja.

Pretpostavimo da je pisac uspio prodati razmatranu opciju za iznos $C_0 > 5.89$, na primjer za $C_0 = 7.42$ Kn. Za 5.89 Kn odmah kupi portfelj $\phi = (-339.11, 0.5)$, t.j., iz banke posudi 339.11 Kn, i kupi 0.5 dionica Kraša po cijeni od 690.00 Kn (uočite da mu za to treba $0.5 \times 690.00 = 345$ Kn. Međutim, $345 = 339.11 + 5.89$). Razliku od $7.42 - 5.89 = 1.53$ Kn stavi u banku uz kamatu 1% (ili u džep). U vremenu T vrijednost portfelja $V_T(\phi) = C_T$, te je pisac u stanju točno pokriti obavezu iz ugovora. U međuvremenu, 1.53 Kn u banci naraslo je na $1.53 \times 1.01 = 1.55$ Kn. Na taj način je pisac opcije ostvario nerizičan profit od 1.55 Kn.

Obratno, pretpostavimo da je kupac uspio kupiti opciju za iznos $C_0 < 5.89$, na primjer, za $C_0 = 4.42$ Kn. Istog trenutka kupac prodaje portfelj $\phi = (-339.11, 0.5)$ za 5.89 Kn ("short sell"), a razliku od $5.89 - 4.42 = 1.47$ Kn uloži u banku uz kamatu od 1% (ili stavi u džep). U trenutku T , vrijednost opcije koju posjeduje C_T jednaka je vrijednosti portfelja $V_T(\phi)$ kojeg je prodao. Stoga ima dovoljan iznos da isplati vrijednost portfelja ϕ kojeg je prodao. Time je na nuli, osim 1.47 Kn u banci koje su narasle na $1.47 \times 1.01 = 1.485$ Kn, što je nerizičan profit.

Iz gornjeg razmatranja se vidi da jedina cijena opcije koja niti piscu niti kupcu ne omogućava nerizičan profit mora biti jednaka 5.89 Kn. Portfelj koji donosi nerizičan profit naziva se **arbitraž**a (ili mogućnost arbitraže). Ekonomski je opravdano pretpostaviti da na tržištu ne postoje mogućnosti arbitraže. Slijedi da je nepostojanje arbitraže na financijskom tržištu ekonomski princip pomoću kojeg smo odredili cijenu opcije. Što onda vjerojatnost radi u ovoj priči? Uloga vjerojatnosti ima tehnički karakter. Objasnimo to malo detaljnije.

Pokušajmo naći vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ na $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathbf{P}^*(\{\omega_1\}) = p^*$, $\mathbf{P}^*(\{\omega_2\}) = 1 - p^*$, takvu da je očekivana (uz vjerojatnost $\mathbf{P}^*$) diskontirana vrijednost dionice u trenutku T jednaka sadašnjoj vrijednosti S_0 . Dakle, zahtijevamo

$$\mathbf{E}^* \left[\frac{1}{1+r} S_T \right] = S_0,$$

t.j.,

$$p^* \frac{1}{1.01} \times 705.00 + (1 - p^*) \frac{1}{1.01} \times 685.00 = 690.00.$$

Rješavanjem slijedi $p^* = 0.595$. Uočimo da je $\mathbf{E}^*[S_T] = (1+r)S_0$, t.j., upravo onoliko koliko bismo imali u trenutku T da smo novac uložili u nerizičnu imovinu (dakle u banku). Stoga vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ zovemo vjerojatnost neutralna na rizik – očekivani (uz $\mathbf{P}^*$) povrat na dionicu jednak je nerizičnom povratu od 1%.

Kakve to veze ima sa cijenom opcije? Izračunajmo očekivanu (uz $\mathbf{P}^*$) diskontiranu vrijednost opcije u trenutku $t = T$:

$$\mathbf{E}^* \left[\frac{1}{1+r} C_T \right] = p^* \frac{1}{1.01} \times 10 + (1 - p^*) \frac{1}{1.01} \times 0 = 5.89.$$

Međutim, to je upravo cijena opcije C_0 koju smo gore dobili konstrukcijom replicirajućeg portfelja. U kolegiju ćemo pokazati da to nije slučajno, te zašto računanje očekivanja (uz vjerojatnost neutralnu na rizik) diskontirane vrijednosti opcije daje cijenu opcije u trenutku $t = 0$. Uočite da je drugi postupak brži i jednostavniji.

Višeperiodni modeli u diskretnom vremenu – dinamički modeli

1.1. Opis modela: imovine, strategije i arbitraža

Promatramo diskretni model financijskog tržišta na kojem se trguje u konačno mnogo vremenskih perioda, odnosno u trenucima $t = 0, 1, \dots, T$. Pretpostavit ćemo da slučajne vrijednosti u modelu mogu poprimiti najviše konačno mnogo različitih vrijednosti, stoga ćemo financijski model graditi na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, gdje je prostor elementarnih događaja konačan, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$. Za σ -algebru $\mathcal{F}$ uzimamo partitivni skup od Ω , $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su svi elementarni događaji mogući, odnosno da je $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$.

Uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ dan nam je i neopadajući niz σ -algebri sadržanih u $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$. Podsjetimo se, takvu familiju σ -algebri $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_T\}$ zovemo **filtracija**. O σ -algebri $\mathcal{F}_t$ mislimo kao o informaciji o stanju na tržištu koja nam je dostupna u trenutku t . Informacija se prirodno povećava s vremenom (nema gubitka informacija), stoga je odabrana familija neopadajuća. Zbog jednostavnosti, običaj je pretpostaviti da je informacija $\mathcal{F}_0$ u trenutku $t = 0$ trivijalna, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Također ćemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, t.j., na kraju imamo potpunu informaciju.

Promotrimo prvo dva tipa osnovne imovine - gotovinu (nerizičnu imovinu) i dionicu (rizičnu imovinu). Pretpostavit ćemo da se financijsko tržište sastoji se od $d + 1$ financijske imovine - 1 nerizične (gotovina) i d rizičnih (d nezavisnih dionica). Cijenu i -te financijske imovine u trenutku $t = 0, 1, \dots, T$ označavamo sa S_t^i . Dakle, gornji indeks označava o kojoj se imovini radi, dok donji indeks pokazuje vremenski trenutak.

Nerizičnu imovinu (npr., novac u banci) označavamo kao 0-tu financijsku imovinu. Pretpostavljamo da je vrijednost nerizične imovine deterministička, te da se ukumačuje po konstantnoj kamatnoj stopi $r > 0$. Tada je uz početnu vrijednost novca $S_0^0 = 1$, vrijednost novca u trenutku t jednaka $S_t^0 = (1 + r)^t$ (jednostavno diskretno ukumačivanje po stopi r).

Cijene rizičnih financijskih imovina (npr., dionica) $i = 1, \dots, d$ modeliramo kao slučajne varijable S_t^i , $t = 0, \dots, d$. Prirodno je pretpostaviti da cijena S_t^i ovisi samo o događajima koji su se dogodili do trenutka t , odnosno o informaciji do trenutka t . Matematički to formuliramo tako da ćemo pretpostaviti da je slučajna varijabla S_t^i izmjeriva u odnosu na σ -algebru $\mathcal{F}_t$. To znači da za sve $x \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\{S_t^i \leq x\} \in \mathcal{F}_t$$

(ekvivalentno, $\{S_t^i < x\} \in \mathcal{F}_t$, $\{S_t^i \geq x\} \in \mathcal{F}_t$, obzirom da se nalazimo na diskretnom vjerojatnosnom prostoru, $\{S_t^i = x\} \in \mathcal{F}_t$).

Označimo s $S_t := (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)$ vektor cijena svih imovina u trenutku t . Tada je $S_t : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{d+1}$ $\mathcal{F}_t$ -izmjeriv slučajni vektor. Uočimo, slučajni proces $S^i = (S_t^i, t = 0, 1, \dots, T)$ je **adaptiran** u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t, t = 0, 1, \dots, T)$.

NAPOMENA 1.1.1. Pojam nerizične imovine može se poopćiti, tako da S_t^0 ne bude nužno degenerirana slučajna varijabla. Općenito možemo pretpostaviti da je 0-ta imovina lokalno nerizična. To znači da u trenutku $t - 1$ znamo njenu vrijednost u trenutku t , $t = 1, 2, \dots, T$. Formalno, to znači da je $S_t^0 \mathcal{F}_{t-1}$ -izmjeriva, odnosno da je slučajni proces $S^0 = (S_t^0, t = 0, 1, \dots, T)$ **predvidiv** u odnosu na filtraciju $\mathbf{F}$.

Kada imamo različite investicijske projekte ili isplate u različitim vremenskim trenucima, jedini način da ih objektivno usporedimo je da sve isplate preračunamo na zajedničku osnovu — sadašnju vrijednost. Uvedimo oznaku $\beta_t := 1/S_t^0$. Koeficijent β_t interpretiramo kao diskontni faktor od vremena t do vremena 0: ako u trenutku $t = 0$ uložimo u banku β_t eura, u trenutku t imat ćemo točno 1 euro. Ako u trenutku t imamo isplatu u iznosu K , onda je njena sadašnja vrijednost (u trenutku 0), u oznaci $\tilde{K}$, jednaka

$$\tilde{K} = \beta_t K = (1 + r)^{-t} K.$$

Sve ostale financijske imovine na tržištu bit će izvedenice ovih $d + 1$ odnosnih financijskih imovina. Najjednostavnija takva izvedenica je financijska imovina čija je vrijednost linearna kombinacija vrijednosti osnovnih financijskih imovina – nazivamo ju **portfelj**. Recimo da u trenutku $t = 0$ investiramo u osnovne financijske imovine, pri čemu smo uložili u $\phi^i \in \mathbf{R}$ jedinica i -te imovine. Time smo kreirali jedan portfelj $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d) \in \mathbf{R}^{d+1}$. Pri tom, primijetimo da definicija portfelja dozvoljava da je $\phi^i < 0$. Na primjer, ako je $\phi^0 < 0$ znači da smo iz banke **posudili** $|\phi^0|$ novčanih jedinica. Pretpostavka $\phi^i < 0$ za neki $i = 1, 2, \dots, d$, odgovara **short sale** dionice i .

Uočite da u svakom trenutku trgovanja možemo kreirati novi portfelj i time optimizirati naše ulaganje obzirom na nove dostupne informacije na tržištu. Označimo s ϕ_1 portfelj koji smo kreirali u trenutku 0: $\phi_1 = (\phi_1^0, \phi_1^1, \dots, \phi_1^d)$. U trenutku $t = 1$, saznamo nove cijene dionica S_1^i i naše ulaganje u tom trenutku ima vrijednost $\phi_1 \cdot S_1 = \phi_1^0 S_1^0 + \dots + \phi_1^d S_1^d$. U trenutku $t = 1$ dopušteno nam je rebalansirati portfelj i zamijeniti ga nekim drugim portfeljom koji označimo s $\phi_2 = (\phi_2^0, \phi_2^1, \dots, \phi_2^d)$. O čemu će ovisiti taj novi portfelj? O cijenama financijskih imovina u trenutku $t = 1$. Budući da su te cijene slučajne, i to tako da su $\mathcal{F}_1$ izmjerive, to će općenito i portfelj ϕ_2 biti $\mathcal{F}_1$ -izmjeriv slučajni vektor u $\mathbf{R}^{d+1}$. U trenutku $t = 2$ saznamo nove cijene S_2^i , te rebalansiramo portfelj, itd.

DEFINICIJA 1.1.2. **Strategija trgovanja** (ili dinamički portfelj) je predvidiv slučajni proces $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d), t = 1, 2, \dots, T)$ s vrijednostima u $\mathbf{R}^{d+1}$. **Vrijednost portfelja** u trenutku $t = 1, 2, \dots, T$ je slučajna varijabla

$$V_t(\phi) := \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^d \phi_t^i S_t^i.^1$$

Primijetimo da je $V_t(\phi)$ slučajna varijabla izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$ (kao linearna kombinacija $\mathcal{F}_t$ -izmjerivih slučajnih varijabli). Dakle, $V(\phi) = (V_t(\phi), t = 1, 2, \dots, T)$ je adaptiran slučajni proces.

¹Ovdje $\cdot$ označava skalarni produkt u $\mathbf{R}^{d+1}$.



Po definiciji je vrijednost portfelja u trenutku t jednaka vrijednosti nakon što se saznaju cijene imovina u trenutku t , a prije rebalansa portfelja. Primijetimo da nismo definirali vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0$. Po definiciji stavljamo $V_0(\phi) := \phi_1 \cdot S_0$. Ta definicija nije formalno u skladu s definicijom od $V_t(\phi)$ za $t = 1, 2, \dots, T$. Alternativno, možemo definirati portfelj u trenutku $t = 0$ formulom $\phi_0 = \phi_1$. Tada možemo staviti $V_0(\phi) = \phi_0 \cdot S_0$ što je u skladu s definicijom od $V_t(\phi)$ za $t = 1, 2, \dots, T$. Od sada nadalje koristimo konvenciju da je $\phi_0 = \phi_1$.

Uočimo, diskontirana vrijednost portfelja u trenutku $t = 1, 2, \dots, T$ je slučajna varijabla

$$\tilde{V}_t(\phi) := \beta_t V_t(\phi) = \phi_t \cdot \tilde{S}_t,$$

gdje je $\tilde{S}$ diskontirani vektor cijena odnosnih financijskih imovina u trenutku t .

Od posebnog zanimanja će nam biti strategije u kojima nema vanjskih ulaganja ili izljeva sredstava u trenucima rebalansiranja. Takve strategije se rebalansiraju na sljedeći način:

- u trenutku t saznamo cijene $S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d$ i vrijednost portfelja (strategije) postaje $\phi_t \cdot S_t$;
- prilagođavamo svoju financijsku poziciju tako da biramo novi portfelj ϕ_{t+1} i to tako da sredstva za kupovinu tog novog portfelja mogu doći samo iz vrijednosti portfelja ϕ_t koja je $V_t(\phi) = \phi_t \cdot S_t$;
- dakle, vrijednost (u trenutku t) novog portfelja ϕ_{t+1} , koja je $\phi_{t+1} \cdot S_t$, mora biti jednaka vrijednosti starog portfelja ϕ_t koja je $\phi_t \cdot S_t$.

DEFINICIJA 1.1.3. Strategija ϕ je **samofinancirajuća** ako za sve $t = 0, 1, \dots, T-1$ vrijedi

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t. \quad (1.1.1)$$

NAPOMENA 1.1.4. Jednakost (1.1.1) ekvivalentna je sa

$$\phi_{t+1} \cdot (S_{t+1} - S_t) = \phi_{t+1} \cdot S_{t+1} - \phi_t \cdot S_t,$$

odnosno, uz oznaku $\Delta S_{t+1} := S_{t+1} - S_t$,

$$\phi_{t+1} \cdot \Delta S_{t+1} = V_{t+1}(\phi) - V_t(\phi). \quad (1.1.2)$$

Desna strana je razlika vrijednosti portfelja ϕ u trenucima $t+1$ i t . Lijeva strana je dobitak (gubitak) ostvaren promjenom cijena od trenutka t do trenutka $t+1$. Dakle, strategija je samo-financirajuća ako i samo ako je dobitak (gubitak) ostvaren samo promjenom cijena financijskih imovina (a ne, npr., dodatnim investiranjem ili povlačenjem novca iz portfelja - konzumacija).

Definiramo s $G(\phi) = (G_t(\phi), t = 1, 2, \dots, T)$,

$$G_t(\phi) := \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta S_j.$$

slučajni proces koji zovemo **proces dobitka**. Uočimo da je adaptiran obzirom na filtraciju $\mathbf{F}$.

PROPOZICIJA 1.1.5. *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) Strategija ϕ je samofinancirajuća.

(ii) Za sve $t = 1, 2, \dots, T$ vrijedi

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + G_t(\phi).$$

(iii) Za sve $t = 1, 2, \dots, T$ vrijedi

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \tilde{G}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j.$$

DOKAZ. Iz Napomene 1.1.4, ϕ je samofinancirajuća ako i samo ako vrijedi jednakost (1.1.2).

(i) $\Rightarrow$ (ii) $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t (V_j(\phi) - V_{j-1}(\phi)) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta S_j$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Iz $V_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta S_j$ za sve $t = 1, 2, \dots, T$, slijedi $V_t(\phi) - V_{t-1}(\phi) = \phi_t \cdot \Delta S_t$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Vrijedi $\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t$ ako i samo ako je $\phi_t \cdot \tilde{S}_t = \phi_{t+1} \cdot \tilde{S}_t$. Sada je dokaz isti kao dokaz ekvivalencije (i) i (ii). $\square$

NAPOMENA 1.1.6. Uočimo da za svaki predvidiv proces $((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d), 0 \leq t \leq T)$ i za svaku $\mathcal{F}_0$ -izmjerivu slučajnu varijablu V_0^2 postoji jedinstven predvidiv proces $(\phi_t^0, 0 \leq t \leq T)$ takav da je strategija $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ samofinancirajuća i vrijedi $V_0(\phi) = V_0$. To se jednostavno vidi iz Propozicije 1.1.5 uz

$$\begin{aligned} \phi_t^0 &:= V_0 + \sum_{j=1}^t (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) - \phi_t^1 \tilde{S}_t^1 - \dots - \phi_t^d \tilde{S}_t^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{t-1} (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) - \phi_{t-1}^1 \tilde{S}_{t-1}^1 - \dots - \phi_{t-1}^d \tilde{S}_{t-1}^d. \end{aligned}$$

Uočite da je iz drugog reda vidljivo da je slučajna varijabla ϕ_t^0 $\mathcal{F}_{t-1}$ -izmjeriva.

Gornja propozicija nam omogućava da samofinancirajuće strategije po potrebi zadajemo predvidim nizom slučajnih vektora $((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d), 0 \leq t \leq T)$, uz danu početnu vrijednost portfelja V_0 .

DEFINICIJA 1.1.7. Strategija ϕ je **dopustiva**, ako je ϕ samofinancirajuća i vrijedi $V_t(\phi) \geq 0$ za sve $t = 0, 1, \dots, T$. Dopustiva strategija ϕ je **arbitraža** (arbitražna strategija), ako je

$$V_0(\phi) = 0 \text{ i } \mathbf{P}(V_T(\phi) > 0) > 0.$$

Uočimo da iz dopustivosti od ϕ imamo $V_T(\phi) \geq 0$. Arbitražu interpretiramo na sljedeći način: bez rizika od gubitka, arbitražna strategija s pozitivnom vjerojatnošću donosi pozitivan profit. Ekonomski razlozi nalažu nam da promatramo samo modele financijskih tržišta koji ne dopuštaju arbitražu. Za financijsko tržište kažemo da ne dopušta arbitražu ako niti jedna dopustiva strategija nije arbitražna. To možemo izreći na sljedeći ekvivalentan način: neka je Γ konveksni konus (bez ishodišta) svih pozitivnih varijabli,

$$\Gamma = \{X : \Omega \rightarrow [0, \infty) : \exists \omega' \in \Omega, X(\omega') > 0\}.$$

Ako tržište ne dopušta arbitražu, za svaku dopustivu strategiju ϕ za koju je $V_0(\phi) = 0$ vrijedi $\tilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$. Zaista, kada bi za dopustivu strategiju ϕ vrijedilo $V_0(\phi) = 0$ i $\tilde{V}_T(\phi) \in \Gamma$, tada bi bilo i $V_T(\phi) \in \Gamma$, što znači da je ϕ arbitražna. Naravno, vrijedi i obrat: ako za svaku dopustivu

²Kada je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, tada je $V_0 \in \mathbf{R}$.

strategiju ϕ takvu da je $V_0(\phi) = 0$ vrijedi $V_T(\phi) \notin \Gamma$, tada tržište ne dopušta arbitražu. Uočimo, također, da je $V_T(\phi) \notin \Gamma$ ekvivalentno s $\tilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$.

Pojam arbitraže možemo definirati i za samofinancirajuće strategije koje nisu nužno dopustive: kažemo da je samofinancirajuća strategija ϕ arbitraža, ako je $V_0(\phi) = 0$, $V_T(\phi) \geq 0$ i $\mathbf{P}(V_T(\phi) > 0) > 0$. Jasno je da ako niti jedna samofinancirajuća strategija nije arbitraža, tada niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža. Postavlja se pitanje da li vrijedi i obrat. Naime, ako tržište ne dopušta arbitražu (t.j., niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža), da li se može dogoditi da postoji samofinancirajuća strategija koja je arbitraža. Da bismo odgovorili na to pitanje, prisjetimo se prvo procesa dobitka G , odnosno procesa diskontiranog dobitka $\tilde{G}$:

$$\tilde{G}_t(\phi) = \sum_{j=1}^t \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^t \phi_j^i \Delta \tilde{S}_j^i.$$

Uočimo da zbog $\Delta \tilde{S}_t^0 = 0$, vrijednosti ϕ_t^0 nisu bitne za vrijednost od $\tilde{G}$.

LEMA 1.1.8. *Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada za svaki predvidiv proces $(\phi^1, \dots, \phi^d) = ((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d), 0 \leq t \leq T)$ vrijedi*

$$\tilde{G}_T(\phi) \notin \Gamma.$$

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno, t.j., $\tilde{G}_T(\phi) \in \Gamma$. Tada ne može biti $\tilde{G}_t(\phi) \geq 0$ za sve $t = 0, 1, \dots, T-1$, jer bi tada (nadopunjena) strategija ϕ (koju dobijemo iz Napomene 1.1.6) bila arbitraža. Dakle, postoji $s \in \{1, \dots, T-1\}$ takav da $\tilde{G}_s(\phi)$ nije nenegativan. Definiramo

$$t_0 = \max\{s : \mathbf{P}(\tilde{G}_s(\phi) < 0) > 0\}.$$

Znamo da mora biti $t_0 \leq T-1$, i vrijedi $\mathbf{P}(\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0) > 0$, i $\tilde{G}_s(\phi) \geq 0$ za $t_0 < s \leq T$. Definirajmo novu strategiju ψ na sljedeći način:

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & j \leq t_0 \\ 1_{\{\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}} \phi_j & j > t_0. \end{cases}$$

Po strategiji ψ do (uključivo) trenutka t_0 uopće ne trgujemo, a od trenutka t_0 nadalje ne trgujemo za one ω za koje je $\tilde{G}_{t_0}(\phi)(\omega) \geq 0$, dok za ω koje je $\tilde{G}_{t_0}(\phi)(\omega) < 0$ slijedimo strategiju ϕ . Budući da je $\tilde{G}_{t_0}(\phi) \mathcal{F}_{t_0}$ -izmjeriva i ϕ je predvidiv, dobivamo da je i slučajni niz ψ također predvidiv.

Izračunajmo diskontirani proces dobitka $\tilde{G}(\psi)$ za strategiju ψ . Ako je $j \leq t_0$, tada je očito $\tilde{G}_j(\psi) = 0$ (jer $\psi_k = 0$, $k = 0, \dots, j$). Za $j > t_0$ imamo

$$\begin{aligned} \tilde{G}_j(\psi) &= \sum_{k=1}^j (\psi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \psi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d) \\ &= \sum_{k=t_0+1}^j (\psi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \psi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d) \\ &= 1_{\{\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}} \sum_{k=t_0+1}^j (\phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d) \\ &= 1_{\{\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}} \left[\sum_{k=1}^j (\phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d) - \sum_{k=1}^{t_0} (\phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d) \right] \\ &= 1_{\{\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}} (\tilde{G}_j(\phi) - \tilde{G}_{t_0}(\phi)). \end{aligned}$$

Zaključujemo da je

$$\tilde{G}_j(\psi) = \begin{cases} 0 & j \leq t_0 \\ 1_{\{\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}}(\tilde{G}_j(\phi) - \tilde{G}_{t_0}(\phi)), & t_0 < j \leq T. \end{cases}$$

Slijedi da je $\tilde{G}_j(\psi) \geq 0$, za sve $j \in \{0, 1, \dots, T\}$, te

$$\tilde{G}_T(\psi) = 1_{\{\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}}(\tilde{G}_T(\phi) - \tilde{G}_{t_0}(\phi)) > 0$$

na $\{\tilde{G}_{t_0}(\phi) < 0\}$. Dakle, ψ je dopustiva strategija koja je arbitraža. Kontradikcija. $\square$

Pretpostavimo sada da je ϕ samofinancirajuća strategija za koju je $V_0(\phi) = 0$. Tada je $\tilde{V}_T(\phi) = \tilde{G}_T(\phi)$ i po Lemi 1.1.8, $\tilde{V}_T(\phi) \notin \Gamma$. Zato vrijedi i $V_T(\phi) \notin \Gamma$. Dakle, niti jedna samofinancirajuća strategija ne može biti arbitraža.

1.2. Martingali i mogućnost arbitraže

U ovom odjeljku uvest ćemo pojam martingalne mjere i dokazati 1. fundamentalni teorem koji nam daje karakterizaciju modela financijskih tržišta bez arbitraže u terminima martingalne mjere. Mali podsjetnik na osnovne pojmove uvjetnog očekivanja i martingala prezentiran je u na samom početku u malom fontu. Kao i do sada, promatramo konačan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, gdje je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, te vrijedi $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za svaki $\omega \in \Omega$. Dodatno, na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ imamo i filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t, t = 0, 1, \dots, T)$.

Podsjetimo se definicije uvjetne vjerojatnosti i uvjetnog očekivanja s obzirom na događaj pozitivne vjerojatnosti. Neka je $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(A) > 0$. Tada definiramo uvjetnu vjerojatnost $\mathbf{P}_A : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ formulom

$$\mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B|A) := \frac{\mathbf{P}(B \cap A)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Uvjetno očekivanje slučajne varijable $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ u odnosu na događaj A , je očekivanje od X s obzirom na (uvjetnu) vjerojatnost $\mathbf{P}_A$:

$$\mathbf{E}[X|A] = \mathbf{E}_A[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}_A(\{\omega\}).$$

Jednostavno se vidi da je

$$\mathbf{E}[X|A] = \frac{\mathbf{E}[X 1_A]}{\mathbf{P}(A)}.$$

Podjsetimo se sada definicije uvjetnog očekivanja s obzirom na σ -podalgebru od $\mathcal{F}$.

DEFINICIJA 1.2.1. Neka je $\mathcal{G}$ σ -algebra sadržana u $\mathcal{F}$. **Uvjetno očekivanje od X s obzirom na $\mathcal{G}$** je $\mathcal{G}$ -izmjeriva slučajna varijabla $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ t.d. je

$$\mathbf{E}[1_A \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}[1_A X] \quad (1.2.1)$$

za sve $A \in \mathcal{G}$.

NAPOMENA 1.2.2. Pokaže se da je gornja definicija dobra, odnosno da je slučajna varijable za koju vrijedi jednakost (1.2.1) g.s. jedinstvena. Drugim riječima, ako za $\mathcal{G}$ -izmjerivu slučajnu varijablu Y vrijedi

$$\mathbf{E}[1_A Y] = \mathbf{E}[1_A X]$$

za sve $A \in \mathcal{G}$ tada je $Y = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$ g.s.

Promotrimo vezu uvjetnih očekivanja obzirom na događaj i obzirom na σ -algebru. Ako je σ -algebra $\mathcal{G}$ određena atomima $A_1, A_2, \dots, A_k$, tada je

$$\mathbf{E}[X|\mathcal{G}](\omega) := \sum_{j=1}^k \mathbf{E}[X|A_j]1_{A_j}(\omega) = \sum_{j=1}^k \frac{\mathbf{E}[X1_{A_j}]}{\mathbf{P}(A_j)}1_{A_j}(\omega).$$

Drugim riječima, ako je $\omega \in A_j$, tada je $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}](\omega) = \mathbf{E}[X|A_j]$.

NAPOMENA 1.2.3. Podsjetimo se osnovnih svojstava uvjetnog očekivanja:

- (i) Ako je X $\mathcal{G}$ -izmjeriva slučajna varijabla, tada je $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = X$.
- (ii) $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbf{E}[X]$.
- (iii) Ako je Y $\mathcal{G}$ -izmjeriva slučajna varijabla, tada vrijedi $\mathbf{E}[YX|\mathcal{G}] = Y\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$.
- (iv) Uvjetno očekivanje je linearno: za slučajne varijable X_1, X_2 i realne brojeve a_1, a_2 vrijedi $\mathbf{E}[a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}] = a_1\mathbf{E}[X_1|\mathcal{G}] + a_2\mathbf{E}[X_2|\mathcal{G}]$.
- (v) Uvjetno očekivanje je nenegativno: $X \geq 0 \Rightarrow \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$.
- (vi) $|\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]| \leq \mathbf{E}[|X||\mathcal{G}]$.
- (vii) Ako je $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tada je $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$.
- (viii) Ako je X nezavisna s $\mathcal{G}$, tada je $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbf{E}[X]$.
- (ix) $\mathbf{E}[(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] - X)^2] = \min\{\mathbf{E}[(Y - X)^2], Y \text{ je } \mathcal{G}\text{-izmjeriva}\}$.

Podsjetimo se definicije martingala:

DEFINICIJA 1.2.4. Adaptiran slučajni proces $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ je

- (a) **martingal**, ako je $\mathbf{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] = M_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1$,
- (b) **supermartingal**, ako je $\mathbf{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \leq M_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1$,
- (c) **submartingal**, ako je $\mathbf{E}[M_{t+1}|\mathcal{F}_t] \geq M_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1$.

Definicija se proširuje na višedimenzionalan slučaj: niz $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ slučajnih vektora u $\mathbf{R}^d$ je martingal, ako su sve komponente martingali. Uočimo da ako je $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ martingal, tada je najbolji procjenitelj slučajne varijable M_{t+1} (neposredna budućnost) uz danu informaciju (o prošlosti i sadašnjosti) $\mathcal{F}_t$ upravo trenutna vrijednost procesa M_t .

NAPOMENA 1.2.5. Navedimo neka od osnovnih svojstava martingala (slična svojstva vrijede i za super(sub)martingale):

- (i) Slučajni proces $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za sve $0 \leq s \leq t \leq T$ vrijedi $\mathbf{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$.
- (ii) Slučajni proces $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za sve $0 \leq t \leq T$ vrijedi $\mathbf{E}[M_T|\mathcal{F}_t] = M_t$.
- (iii) Ako je $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ martingal, tada je $\mathbf{E}[M_t] = \mathbf{E}[M_0]$ za sve $t \in \{0, 1, \dots, T\}$.
- (iv) Linearna kombinacija konačno mnogo martingala opet je martingal.

Kako pomoću danog martingala M možemo konstruirati nove martingale? Vrlo koristan postupak kojim to činimo zove se martingalna transformacija. Prije definicije uvedimo oznaku $\Delta M_t := M_t - M_{t-1}$ za martingalnu razliku. Uočimo odmah da je $\mathbf{E}[\Delta M_t|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$ zbog definicije martingala.

DEFINICIJA 1.2.6. Neka je $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ martingal, te neka je $H = (H_t, 0 \leq t \leq T)$ predvidiv niz slučajnih varijabli. Definiramo niz $X = (X_t, t = 0, 1, \dots, T)$ slučajnih varijabli na sljedeći način:

$$\begin{aligned} X_0 &= H_0 M_0, \\ X_t &= H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + \dots + H_t \Delta M_t, \quad 1 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Niz X naziva se **martingalna transformacija**. Ponekad ćemo slučajni proces X označavati kao $H \circ M = ((H \circ M)_t, 0 \leq t \leq T)$.

PROPOZICIJA 1.2.7. *Martingalna transformacija X je martingal. Nadalje, ako je slučajni proces M supermartingal, te ako je H nenegativan, tada je i martingalna transformacija X također supermartingal.*

DOKAZ. Budući da je X_t linearna kombinacija $\mathcal{F}_t$ -izmjerivih slučajnih varijabli, to je i sama $\mathcal{F}_t$ -izmjeriva. Nadalje vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[H_{t+1} \Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= H_{t+1} \mathbf{E}[\Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= 0, \end{aligned}$$

gdje je za drugu jednakost iskorištena činjenica da je H_{t+1} $\mathcal{F}_t$ -izmjeriva i Napomena 1.2.5 (iii). Tvrdnja za supermartingal slijedi iz istog računa zbog $H_{t+1} \geq 0$ i $\mathbf{E}[\Delta M_{t+1} | \mathcal{F}_t] \leq 0$. $\square$

Financijska interpretacija martingalne transformacije je sljedeća: pretpostavimo da su diskontirane cijene $(\tilde{S}_t, 0 \leq t \leq T)$ financijskih imovina martingali. Ako je ϕ samofinancirajuća strategija, tada je po Propoziciji 1.1.5 (iii)

$$\tilde{V}_t(\phi) = \tilde{V}_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \Delta \tilde{S}_j.$$

Dakle, diskontirane vrijednosti portfelja su martingalna transformacija $\phi \circ \tilde{S}$, te također tvore martingal. Specijalno je $\mathbf{E}[\tilde{V}_t(\phi)] = \mathbf{E}[\tilde{V}_0(\phi)]$, za sve $0 \leq t \leq T$.

Sljedeća tvrdnja pokazuje da se martingalnost slučajnog procesa može karakterizirati pomoću svih martingalnih transformacija.

PROPOZICIJA 1.2.8. *Adaptiran niz slučajnih varijabli $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ je martingal ako i samo ako za svaki predvidiv niz slučajnih varijabli $H = (H_t, 1 \leq t \leq T)$ vrijedi*

$$\mathbf{E} \left[\sum_{t=1}^T H_t \Delta M_t \right] = 0.$$

DOKAZ. Neka je M martingal i neka je $H = (H_t, 1 \leq t \leq T)$ predvidiv niz slučajnih varijabli. Stavimo $H_0 = 0$. Tada je martingalna transformacija $X = H \circ M$ također martingal. Specijalno vrijedi $\mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[X_0]$. Međutim, zbog $H_0 = 0$ imamo $X_0 = 0$. Dakle, $0 = \mathbf{E}[X_T] = \mathbf{E}[\sum_{t=1}^T H_t \Delta M_t]$.

Obratno: fiksirajmo $j \in \{0, \dots, T-1\}$, odaberimo $A \in \mathcal{F}_j$, i definirajmo niz slučajnih varijabli $H = (H_t, 1 \leq t \leq T)$ na sljedeći način:

$$H_t = \begin{cases} 0 & t \neq j+1, \\ 1_A & t = j+1. \end{cases}$$

Tada je $H = (H_t, 1 \leq t \leq T)$ predvidiv niz, pa po pretpostavci vrijedi $\mathbf{E}[\sum_{t=1}^T H_t \Delta M_t] = 0$. Međutim,

$$\sum_{t=1}^T H_t \Delta M_t = H_{j+1}(M_{j+1} - M_j) = 1_A(M_{j+1} - M_j).$$

Slijedi da je

$$\mathbf{E}[1_A M_j] = \mathbf{E}[1_A M_{j+1}].$$

Budući da je $A \in \mathcal{F}_j$ bio proizvoljan, iz Napomene 1.2.2 slijedi da je

$$\mathbf{E}[M_{j+1} | \mathcal{F}_j] = M_j.$$

Kako je j bio proizvoljan, slijedi da je M martingal. $\square$

Sada ćemo pojam martingala upotrijebiti za karakterizaciju financijskog tržišta bez arbitraže. Prvo nam treba definicija martingalne mjere u dinamičkom modelu tržišta.

DEFINICIJA 1.2.9. Vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se **martingalna mjera** ili **mjera neutralna na rizik**, ako za sve $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ vrijedi

$$\mathbf{E}^*[\tilde{S}_{t+1}^i | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^i, \quad i = 0, 1, \dots, d.$$

Riječima, $\mathbf{P}^*$ je martingalna mjera ako su diskontirane cijene financijskih imovina martingali u odnosu na $\mathbf{P}^*$. Vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}^*$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se **ekvivalentna martingalna mjera**, ako je martingalna mjera i vrijedi $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$.

Sljedeći rezultat je fundamentalni teorem određivanja cijena imovine koji govori o nepostojanju arbitraže na tržištu. Dokaz drugog smjera je nešto složeniji, i trebat će nam sljedeći pomoćni rezultati iz linearne algebre.

- LEMA 1.2.10.** (a) Neka je $C \subset \mathbf{R}^n$ zatvoren i konveksan skup takav da $0 \notin C$. Tada postoje linearan funkcional $\xi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ i $\alpha > 0$ takvi da je $\xi(x) \geq \alpha$ za sve $x \in C$. Specijalno, hiperravnina $\{x : \xi(x) = 0\}$ ne presijeca C .
- (b) (teorem separacije) Neka je $K \subset \mathbf{R}^n$ kompaktan i konveksan, te neka je $V \subset \mathbf{R}^n$ vektorski potprostor takav da je $K \cap V = \emptyset$. Tada postoji linearan funkcional $\xi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ takav da vrijedi $\xi(x) > 0$ za sve $x \in K$, i $\xi(x) = 0$ za sve $x \in V$.

TEOREM 1.2.11. Model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji ekvivalentna martingalna mjera.

DOKAZ. $\Leftarrow$ Pretpostavimo da postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{P}^*$. Tada je niz $(\tilde{S}_t, 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$ -martingal. Neka je $\phi = (\phi_t, 0 \leq t \leq T)$ dopustiva (ili samofinancirajuća) strategija takva da je $V_0(\phi) = 0$. Tada je slučajni proces diskontiranih vrijednosti strategije

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^t \phi_j \Delta \tilde{S}_j$$

martingalna transformacija, pa po Propoziciji 1.2.6, i sam $\mathbf{P}^*$ -martingal. Slijedi $\mathbf{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)] = \mathbf{E}^*[V_0(\phi)]$. Zbog $V_0(\phi) = 0$ slijedi $\mathbf{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)] = 0$, a zbog dopustivosti je $\tilde{V}_T(\phi) = \beta_T V_T(\phi) \geq 0$. Budući da je $\mathbf{P}^*(\{\omega\}) > 0$ za sve ω , iz $\mathbf{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)] = 0$ i $\tilde{V}_T(\phi) \geq 0$ slijedi da je $\tilde{V}_T(\phi) \equiv 0$. Tada je i $V_T(\phi) \equiv 0$, pa je i $\mathbf{P}[V_T(\phi) > 0] = 0$. Dakle, dopustiva strategija ϕ nije arbitraž.

$\Rightarrow$ Obratno, pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitraž. Neka je

$$\mathcal{V} := \{\tilde{G}_T(\phi), \phi \text{ predvidiv proces u } \mathbf{R}^d\}.$$

Tada je $\mathcal{V}$ vektorski prostor slučajnih varijabli na Ω i možemo ga shvatiti kao vektorski potprostor konačnodimenzionalnog prostora $\mathbf{R}^K$, gdje je kao i prije $K = |\Omega|$. Po Lemi 1.1.8, $\mathcal{V} \cap \Gamma = \emptyset$.

Definirajmo $K := \{X \in \Gamma : \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) = 1\}$. Tada je $K \subset \Gamma$ konveksan i kompaktan skup za koji vrijedi $K \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Po teoremu separacije (Lema 1.2.10 (b)), postoji $\lambda = (\lambda(\omega) : \omega \in \Omega)$ takav da vrijedi:

- (i) $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0$ za sve $X \in K$,
- (ii) $\sum_{\omega \in \Omega} \lambda(\omega) \tilde{G}_T(\phi)(\omega) = 0$ za svaki predvidiv ϕ .

Iz svojstva (i) slijedi da je $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ (zaista, dovoljno je uzeti X tako da je $X(\omega) = 1$ i $X(\omega') = 0$ za sve ostale ω'). Definiramo vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ formulom:

$$\mathbf{P}^*(\{\omega\}) := \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')}.$$

Zbog $\lambda(\omega) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ slijedi $\mathbf{P}^* \approx \mathbf{P}$. Za proizvoljni predvidiv proces ϕ s vrijednostima u $\mathbf{R}^d$ vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^* \left[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta \tilde{S}_t \right] &= \mathbf{E}^*[\tilde{G}_T(\phi)] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{G}_T(\phi)(\omega) \mathbf{P}^*(\{\omega\}) \\ &= \frac{1}{\sum_{\omega' \in \Omega} \lambda(\omega')} \sum_{\omega \in \Omega} \tilde{G}_T(\phi)(\omega) \lambda(\omega) \\ &= 0, \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost izlazi iz (ii). Specijalno, za $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, stavimo $\phi_t^j = 0$, $t = 0, 1, \dots, T$, $j \neq i$. Tada je

$$\mathbf{E}^* \left[\sum_{t=1}^T \phi_t^i \Delta \tilde{S}_t^i \right] = 0$$

za svaki (1-dim) predvidiv proces $(\phi_t^i, 1 \leq t \leq T)$. Po Propoziciji 1.2.8 slijedi da je $\tilde{S}^i$ $\mathbf{P}^*$ -martingal. $\square$

1.3. Potpuni modeli tržišta

DEFINICIJA 1.3.1. Slučajni zahtjev s dospijećem $\mathbf{TT}$ je $\mathcal{F}_T$ -izmjeriva slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ takva da je

$$0 \leq C < \infty \quad \mathbf{P} - \text{g.s.}$$

Slučajni zahtjev C s dospijećem T zove se **izvedenica (derivative)** primarnih imovina $S^1, \dots, S^d$ ako je C funkcija slučajnih vektora $S_1, S_2, \dots, S_T$.

PRIMJER 1.3.2. Europska call opcija (na financijsku imovinu i) s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s $C = (S_T^i - K)^+$. Dakle,

$$C = \begin{cases} S_T^i - K, & S_T^i > K \\ 0, & S_T^i \leq K. \end{cases}$$

Europska put opcija (na financijsku imovinu i) s dospijećem T i cijenom izvršenja K definirana je s $C = (K - S_T^i)^+$.

U gornja dva primjera C je funkcija od S_T^i , pa je prema tome izvedenica. Općenito, C može ovisiti o svim cijenama financijske imovine i do trenutka T .

Azijska call opcija (na financijsku imovinu i) s dospeljećem T . Neka je

$$\bar{A}_T^i := \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T \tilde{S}_t^i$$

srednja vrijednost diskontiranih cijena i -te imovine. Azijska call opcija (na i -tu imovinu) s cijenom izvršenja K je slučajni zahtjev $C = (\bar{A}_T^i - K)^+$.

DEFINICIJA 1.3.3. Slučajni zahtjev C je **dostižan** ako postoji dopustiva strategija ϕ takva da je $V_T(\phi) = C$. Kažemo da strategija ϕ **replicira** C .

NAPOMENA 1.3.4. Pretpostavimo da tržište ne dopušta arbitražu. Ako je C slučajni zahtjev takav da je $V_T(\phi) = C$ za neku samofinancirajuću strategiju, tada je C dostižan slučajni zahtjev. Dovoljno je provjeriti da je u tom slučaju ϕ dopustiva strategija, t.j., $V_t(\phi) \geq 0$, $t = 0, 1, \dots, T$. Taj uvjet je ekvivalentan uvjetu $\tilde{V}_t(\phi) \geq 0$, $t = 0, 1, \dots, T$. Neka je $\mathbf{P}^*$ ekvivalentna martingalna mjera. Tada je $(\tilde{V}_t(\phi), 0 \leq t \leq T)$ $\mathbf{P}^*$ -martingal, pa je

$$\tilde{V}_t(\phi) = \mathbf{E}^*[\tilde{V}_T(\phi) | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*[\beta_T C | \mathcal{F}_t] \geq 0,$$

zbog $\beta_T > 0$ i $C \geq 0$.

DEFINICIJA 1.3.5. Model tržišta bez arbitraže je **potpun** ako je svaki slučajni zahtjev dostižan.

Zahtjev na potpunost tržišta je ekonomski restriktivan i često nema ekonomsko opravdanje, za razliku od zahtjeva na nepostojanje arbitraže. Osnovni rezultat o potpunosti tržišta je sljedeći:

TEOREM 1.3.6. *Model tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera.*

DOKAZ. $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je model tržišta bez arbitraže potpun. Neka je C proizvoljan slučajni zahtjev. Po pretpostavci postoji dopustiva strategija ϕ koja replicira C , $C = V_T(\phi)$. Specijalno vrijedi

$$\beta_T C = \tilde{V}_T(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^T \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j.$$

Pretpostavimo da su $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$ dvije ekvivalentne martingalne mjere. Tada je proces $(\tilde{V}_t(\phi), 0 \leq t \leq T)$ martingal u donosu na $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$. Specijalno, to znači da je (zbog $\mathcal{F}_0$ trivijalna)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1[\tilde{V}_T(\phi)] &= \mathbf{E}_1[V_0(\phi)] = V_0(\phi), \\ \mathbf{E}_2[\tilde{V}_T(\phi)] &= \mathbf{E}_2[V_0(\phi)] = V_0(\phi), \end{aligned}$$

otkud $\mathbf{E}_1[\tilde{V}_T(\phi)] = \mathbf{E}_2[\tilde{V}_T(\phi)]$. Slijedi $\mathbf{E}_1[\beta_T C] = \mathbf{E}_2[\beta_T C]$. Budući da je $\beta_T = 1/(1+r)^T$ deterministički, dobivamo

$$\mathbf{E}_1[C] = \mathbf{E}_2[C].$$

Ta jednakost vrijedi za svaku nenegativnu $\mathcal{F}_T$ -izmjerivu slučajnu varijablu C . Budući da je po pretpostavci $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, slijedi $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_2$ (zaista, dovoljno je za C uzeti $1_{\{\omega\}}$).

$\Leftarrow$ Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže, ali nepotpuno. To znači da postoji slučajni zahtjev C koji nije dostižan. Definiramo

$$\tilde{\mathcal{V}} := \{U_0 + \sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta \tilde{S}_t : U_0 \text{ je } \mathcal{F}_0 \text{ izmjeriva, } ((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d) : 1 \leq t \leq T) \text{ je predvidiv}\}.$$

Uočimo da za dani d -dimenzionalni predvidiv proces $((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d) : 1 \leq t \leq T)$ postoji predvidiv proces $(\phi_t^0 : 1 \leq t \leq T)$ takav da je strategija $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d) : 1 \leq t \leq T)$ samofinancirajuća (Propozicija 1.1.6). Zbog $\Delta \tilde{S}_t^0 = 0$, te budući da je U_0 konstanta ($\mathcal{F}_0$ je trivijalna), slijedi da je

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{V}_T(\phi) : \phi \text{ samofinancirajuća}\}.$$

Budući da po pretpostavci C nije dostižan zahtjev, zbog Napomene 1.3.4, ne može se dostići niti samofinancirajućom strategijom. Slijedi: $C/S_T^0 \notin \tilde{\mathcal{V}}$. To znači da je $\tilde{\mathcal{V}}$ pravi podskup skupa svih slučajnih varijabli. Jednostavno se provjeri da je $\tilde{\mathcal{V}}$ vektorski podprostor.

Neka je $\mathbf{P}^*$ neka ekvivalentna martingalna mjera. Na prostoru svih slučajnih varijabli definiramo skalarni produkt

$$(X, Y) := \mathbf{E}^*[XY], \quad X, Y : \Omega \rightarrow \mathbf{R}.$$

Budući da je $\tilde{\mathcal{V}}$ pravi podprostor, postoji slučajna varijabla $X \neq 0$ ortogonalna na $\tilde{\mathcal{V}}$, $X \in \tilde{\mathcal{V}}^\perp$. Definiramo

$$\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) := \left(1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty}\right) \mathbf{P}^*(\{\omega\})$$

gdje je $\|X\|_\infty = \sup_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|$. Uočimo da je $1 \in \tilde{\mathcal{V}}$ ($U_0 = 1$, $\phi \equiv 0$), pa je $X \perp 1$, t.j., $0 = \mathbf{E}^*[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}^*(\{\omega\})$. Slijedi:

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}^*(\{\omega\}) + \frac{1}{2\|X\|_\infty} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}^*(\{\omega\}) = 1.$$

Očito je $1 + \frac{X(\omega)}{2\|X\|_\infty} > 0$, pa je $\mathbf{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$. Dakle, $\mathbf{P}^{**}$ je vjerojatnost ekvivalentna s $\mathbf{P}^*$ i $\mathbf{P}^{**} \neq \mathbf{P}^*$ (zbog $X \neq 0$).

Neka je $\phi = ((\phi_t^1, \dots, \phi_t^d) : 1 \leq t \leq T)$ predvidiv proces. Računamo

$$\mathbf{E}^{**}\left[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta \tilde{S}_t\right] = \mathbf{E}^*\left[\sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta \tilde{S}_t\right] + \frac{1}{2\|X\|_\infty} \mathbf{E}^*\left[X \sum_{t=1}^T \phi_t \cdot \Delta \tilde{S}_t\right] = 0.$$

Prvi sumand je nula, jer je $\tilde{S}_t$ $\mathbf{P}^*$ -martingal, a drugi je nula, jer je $X \perp \tilde{\mathcal{V}}$. Po Propoziciji 1.2.8 slijedi da je $(\tilde{S}_t : 0 \leq t \leq T)$ martingal u donosu na $\mathbf{P}^{**}$. Dakle, $\mathbf{P}^{**}$ je martingalna mjera. Budući da je različita od $\mathbf{P}^*$, martingalna mjera nije jedinstvena. $\square$

Pretpostavimo sada da je tržište bez arbitraže i potpuno. Neka je $\mathbf{P}^*$ jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Cilj nam je odrediti cijenu proizvoljnog slučajnog zahtjeva C .

Neka je $C \geq 0$ proizvoljna $\mathcal{F}_T$ -izmjeriva slučajna varijabla, te neka je ϕ dopustiva strategija koja replicira C : $V_T(\phi) = C$. Niz $(\tilde{V}_t(\phi) : 0 \leq t \leq T)$ je $\mathbf{P}^*$ -martingal, pa je

$$V_0(\phi) = \mathbf{E}^*[\tilde{V}_T(\phi)] = \mathbf{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0}\right].$$

Općenitije,

$$\tilde{V}_t(\phi) = \mathbf{E}^*[\tilde{V}_T(\phi) | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0} | \mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, 1, \dots, T,$$

otkud

$$V_t(\phi) = S_t^0 \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right], t = 0, 1, \dots, T. \quad (1.3.1)$$

Dakle, u trenutku t je vrijednost $V_t(\phi)$ dopustive strategije ϕ koja replicira C potpuno određena s C .

Prirodno je $V_t(\phi)$ zvati cijenom slučajnog zahtjeva u trenutku t . To je bogatstvo potrebno u trenutku t za repliciranje zahtjeva C slijedeći strategiju ϕ . Specijalno, u trenutku $t = 0$,

$$C_0 = V_0(\phi) = \mathbf{E}^* \left[\frac{C}{S_T^0} \right].$$

Pretpostavimo da investitor u trenutku $t = 0$ proda slučajni zahtjev C za cijenu $C_0 = \mathbf{E}^*[C/S_T^0]$, te dobiveni iznos $C_0 = V_0(\phi)$ uloži u replicirajući portfelj ϕ . Budući da je ϕ samofinancirajući, investitor može slijediti ϕ bez dodatnog ulaganja. Dakle, u svakom daljnjem vremenskom trenutku t , redistribucija imovina po dinamičkom portfelju ϕ je besplatna. U trenutku T , vrijednost portfelja jednaka je $V_T(\phi)$. Međutim, $V_T(\phi) = C$, što znači da je iznos $V_T(\phi)$ upravo dovoljan za pokriće obaveze dospjele po slučajnom zahtjevu C . Drugim riječima, dinamički portfelj ϕ je savršena zaštita (engl. hedge) za slučajni zahtjev C .

Uočite da nam je do sada za razvoj teorije bila potrebna samo egzistencija replicirajućeg portfelja ϕ . Za praktične potrebe hedginga, važno je izračunati taj portfelj. To ćemo kasnije naučiti za slučaj Cox–Ross–Rubinsteinovog (ili binomnog) modela.

Ponovimo još jednom da za računanje cijene slučajnog zahtjeva (opcije) moramo znati samo vjerojatnost $\mathbf{P}^*$, t.j., ekvivalentnu martingalnu mjeru. Vjerojatnost $\mathbf{P}$, koja može biti objektivna vjerojatnost (statistički ustanovljena) ili bilo koja subjektivna vjerojatnost, potpuno je irelevantna za računanje cijena opcija. **Cijena slučajnog zahtjeva jednaka je vrijednosti portfelja koji replicira taj slučajni zahtjev.**

1.4. CRR model

U ovom odjeljku ćemo detaljno proučiti **Cox–Ross–Rubinsteinov model** (CRR model), za koji ćemo kasnije pokazati da je u stvari diskretna verzija Black–Scholesovog modela, najpoznatijeg (vremenski neprekidnog) modela financijskog tržišta. Pretpostavke modela su sljedeće:

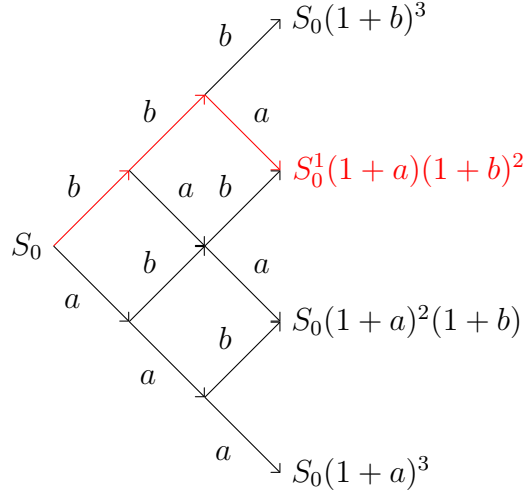
- na financijskom tržištu imamo jednu rizičnu financijsku imovinu (dionica), čija je cijena jednaka S_t u trenutku t , $0 \leq t \leq T$, te je relativna promjena cijene između dva trenutka jednaka ili a ili b , gdje je $-1 < a < b$ (nezavisno od vremena t i trenutne cijene dionice);
- također imamo jednu nerizičnu imovinu s fiksnim povratom $r > 0$ u jednom vremenskom trenutku: $S_t^0 = (1 + r)^t$, $0 \leq t \leq T$.

Konstruirajmo vjerojatnosni prostor. Uočimo da se u svakom trenutku t slučajnost manifestira samo u tome je li relativna promjena cijene jednaka a ili b . Označimo $\Omega_1 := \{a, b\}$, te neka je $\mathbf{P}_1$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbf{P}_1(\{b\}) = p$, $\mathbf{P}_1(\{a\}) = 1 - p$, $0 < p < 1$. Relativne promjene cijene dionice su nezavisne, pa prostor elementarnih događaja Ω uzet ćemo Kartezijev produkt skupa Ω_1 ,

$$\Omega = \Omega_1^T = \{a, b\}^T = \{(\omega_1, \dots, \omega_T) : \omega_t \in \{a, b\}, t = 1, \dots, T\},$$

a za vjerojatnost $\mathbf{P}$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ uzimamo produktnu vjerojatnost $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1^T$.

Na primjer, za $T = 3$, $\mathbf{P}(\{(b, b, a)\}) = p^2(1 - p)$ i elementarni događaj $\omega = (b, b, a)$ odgovara grani sljedećeg binomnog stabla označenoj crvenom bojom:



Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ definiramo niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots, X_T$ (relativna promjena cijene dionice) na sljedeći način:

$$X_t(\omega) = \omega_t, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_T).$$

Uočimo da su to nezavisne slučajne varijable (jer je riječ o projekcijama na produktom vjerojatnosnom prostoru), s distribucijom

$$\mathbf{P}(X_t = a) = 1 - p, \quad \mathbf{P}(X_t = b) = p.$$

Neka je $S_0 \in \mathbf{R}_+$ dano. Niz slučajnih varijabli $S = (S_t : t = 0, 1, \dots, T)$ definiramo sa

$$S_t := S_{t-1}(1 + X_t), \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

Uočimo da je

$$\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = X_t.$$

Prema tome, niz $S = (S_t : t = 0, 1, \dots, T)$ možemo interpretirati kao niz cijena dionice kod koje je u svakom trenutku t relativna promjena cijene (t.j., povrat) jednaka ili a ili b . Te relativne promjene modelirane su slučajnim varijablama X_t , $t = 1, 2, \dots, T$. Diskontirane cijene dionice definirane su kao i do sada: $\tilde{S}_t = \beta_t S_t = S_t / S_t^0 = S_t / (1 + r)^t$.

Još preostaje definirati filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \dots, T)$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Po definiciji je $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Dostupna informacija u trenutku t su cijene dionice do (uključivo) trenutka t . Dakle, imamo informaciju o $S_0, S_1, \dots, S_t$. Uočimo da je ta informacija jednaka informaciji koju možemo dobiti pomoću $X_1, \dots, X_t$. To je jasno: iz relativnih promjena cijena možemo rekonstruirati cijene dionice, i obratno, iz cijena dionice možemo izračunati relativne promjene. Matematički se informacija dana s $S_1, \dots, S_t$ opisuje σ -algebrom $\mathcal{F}_t := \sigma(S_1, \dots, S_t)$. To je najmanja σ -algebra na Ω takva da su sve slučajne varijable $S_1, \dots, S_t$ izmjerive. Alternativno, zbog jednake informacije sadržane u nizu $X_1, \dots, X_t$, vrijedi $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$.

PRIMJER 1.4.1. Neka je $T = 3$. Izračunajmo eksplicitno filtraciju $\mathbf{F}$ tako da izračunamo atome odgovarajućih σ -algebri $\mathcal{F}_t$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \sigma(\{(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b)\}, \{(b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b)\}) , \\ \mathcal{F}_2 &= \sigma(\{(a, a, a), (a, a, b)\}, \{(a, b, a), (a, b, b)\}, \{(b, a, a), (b, a, b)\}, \{(b, b, a), (b, b, b)\}) , \\ \mathcal{F}_3 &= \sigma(\{(a, a, a)\}, \{(a, a, b)\}, \{(a, b, a)\}, \{(a, b, b)\}, \{(b, a, a)\}, \{(b, a, b)\}, \{(b, b, a)\}, \{(b, b, b)\}) .\end{aligned}$$

Želimo odrediti pod kojim uvjetima na parametre modela (a, b, r, p) ovaj model tržišta ne dopušta arbitražu, odnosno kada je model potpun. Sljedeći rezultat ključan je za ovu analizu:

LEMA 1.4.2. *Neka je $\hat{\mathbf{P}}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentna s $\mathbf{P}$.*

(a) *Niz diskontiranih cijena $(\tilde{S}_t : t = 0, 1, \dots, T)$ je $\hat{\mathbf{P}}$ -martingal ako i samo ako vrijedi*

$$\hat{\mathbf{E}}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = r, \quad t = 1, 2, \dots, T.$$

(b) *Neka je zadovoljen uvjet (a). Tada vrijedi $a < r < b$ i slučajne varijable $X_1, X_2, \dots, X_T$ su nezavisne i jednako distribuirane (u odnosu na $\hat{\mathbf{P}}$).*

DOKAZ. (a) Fiksirajmo $t \in \{1, 2, \dots, T\}$. Kako je $\tilde{S}_{t-1}$ $\mathcal{F}_{t-1}$ -izmjeriva slučajna varijabla, vrijedi ekvivalencija

$$\hat{\mathbf{E}}[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1} \iff \hat{\mathbf{E}}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1.$$

Nadalje, kako je

$$1 = \hat{\mathbf{E}}\left[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{1}{1+r} \hat{\mathbf{E}}\left[\frac{S_t}{S_{t-1}} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{1}{1+r} \hat{\mathbf{E}}[1 + X_t | \mathcal{F}_{t-1}],$$

slijedi da je

$$\hat{\mathbf{E}}[\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \tilde{S}_{t-1} \iff \hat{\mathbf{E}}[1 + X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 1 + r \iff \hat{\mathbf{E}}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = r.$$

(b) Kako je $X_t \in \{a, b\}$ i $\mathbf{P} \approx \hat{\mathbf{P}}$ vrijedi $\hat{\mathbf{P}}(X_t = a) > 0$ i $\hat{\mathbf{P}}(X_t = b) > 0$. Dodatno, po pretpostavci (a) imamo da je $\hat{\mathbf{E}}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = r$.

Pretpostavimo da ne vrijedi $r \in (a, b)$. Tada je ili $r \leq a < b$ ili $a < b \leq r$. U prvom slučaju je tada $\hat{\mathbf{P}}(X_t \geq r) = 1$ i $\hat{\mathbf{P}}(X_t > r) > 0$ otkud slijedi $\hat{\mathbf{E}}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] > r$, što je u kontradikciji s pretpostavkom. Slučaj $a < b \leq r$ na isti način daje kontradikciju.

Nadalje, odredimo uvjetnu razdiobu slučajne varijable X_t uvjetno na $\mathcal{F}_{t-1}$. Želimo odrediti $\hat{p} := \hat{\mathbf{P}}[X_t = b | \mathcal{F}_{t-1}]$ (uočimo $\hat{\mathbf{P}}[X_t = a | \mathcal{F}_{t-1}] = 1 - \hat{p}$). Kako je

$$r = \hat{\mathbf{E}}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = a\hat{\mathbf{P}}[X_t = a | \mathcal{F}_{t-1}] + b\hat{\mathbf{P}}[X_t = b | \mathcal{F}_{t-1}] = a(1 - \hat{p}) + b\hat{p},$$

slijedi da je

$$\hat{p} = \frac{r - a}{b - a}$$

Uočimo da je zbog pokazanog $a < r < b$ nužno $0 < \hat{p} < 1$, pa je gornje rješenje dobro.

Sada iz gornje uvjetne razdiobe možemo odrediti razdiobu od X_t obzirom na vjerojatnosnu mjeru $\hat{P}$: Iz gornje dvije jednakosti prvo čitamo da je

$$\hat{\mathbf{P}}[X_t = a] = \hat{\mathbf{E}}[1_{\{X_t=a\}}] = \hat{\mathbf{E}}[\hat{\mathbf{E}}[1_{\{X_t=a\}} | \mathcal{F}_{t-1}]] = \hat{\mathbf{E}}[\hat{\mathbf{P}}[X_t = a | \mathcal{F}_{t-1}]] = \hat{\mathbf{E}}[1 - \hat{p}] = 1 - \hat{p},$$

i slično, $\hat{\mathbf{P}}[X_t = b] = \hat{p}$. To pokazuje jednaku distribuiranost slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots, X_T$ (obzirom na $\hat{\mathbf{P}}$). Nadalje, iz gornje jednakosti slijedi da je

$$\hat{\mathbf{P}}[X_t = x | \mathcal{F}_{t-1}] = \hat{\mathbf{P}}[X_t = x]$$

za $x \in \{a, b\}$, pa zaključujemo da je X_t nezavisna od σ -algebre $\mathcal{F}_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots, T$. Budući da je $\mathcal{F}_{t-1}$ generirana s $X_1, \dots, X_{t-1}$, slijedi da je X_t nezavisna s $X_1, \dots, X_{t-1}$, $t = 1, 2, \dots, T$. Odavde se vidi nezavisnost slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots, X_T$ (u odnosu na $\hat{\mathbf{P}}$). $\square$

Uočimo da je uz pretpostavke gornje leme, X_t nezavisna od $\mathcal{F}_{t-1}$ (u odnosu na $\hat{\mathbf{P}}$), pa je uvjetno očekivanje $\hat{\mathbf{E}}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}]$ ustvari jednako očekivanju $\hat{\mathbf{E}}[X_t] = (1 - \hat{p})a + \hat{p}b$. Gornjom lemom također smo pokazali da je uvjet $a < r < b$ nužan za nepostojanje arbitraže u CRR modelu – ako tržište ne dopušta arbitražu, tada postoji ekvivalentna martingalna mjera $\mathbf{P}^*$, pa po Lemi 1.4.2 (b) slijedi da je $a < r < b$.

LEMA 1.4.3. *Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada je $r \in (a, b)$.*

Gornju lemu možemo jednostavno objasniti i ekonomskim argumentom. Pretpostavimo da $r \notin (a, b)$, i na primjer, $r \leq a < b$. Tada je $S_T(\omega) \geq S_0(1 + a)^T \geq S_0(1 + r)^T$ za sve $\omega \in \Omega$, te postoji ω' takav da je $S_T(\omega') > S_0(1 + r)^T$. Dakle, posudimo li iz banke S_0 kuna i investiramo u jednu dionicu rizične imovine (te čekamo da dođe vrijeme T), ne možemo imati manje od $S_0(1 + r)^T$ koliko smo u trenutku T dužni banci, a s pozitivnom vjerojatnošću ćemo imati strogo više od tog iznosa.

Sada želimo pokazati obrat Leme 1.4.3, t.j., da je uvjet $r \in (a, b)$ dovoljan za nepostojanje arbitraže na tržištu. To ćemo dokazati tako da, uz pretpostavku $a < r < b$, konstruiramo ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{P}^*$. Označimo $p^* := \mathbf{P}^*(X_1 = b)$. Uz $\mathbf{P}^*$ je proces diskontiranih cijena $(\tilde{S}_t : t = 0, 1, \dots, T)$ martingal, pa po Lemi 1.4.2 tada vrijedi $\mathbf{E}^*[X_1] = r$, odnosno

$$r = \mathbf{E}^*[X_1] = (1 - p^*)a + p^*b,$$

otkud dobivamo

$$p^* = \frac{r - a}{b - a} \in (0, 1).$$

Neka je $\mathbf{P}_1^*$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $\mathbf{P}_1^*({b}) = p^*$, te neka je $\mathbf{P}^* := (\mathbf{P}_1^*)^T$. Vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ ekvivalentna je vjerojatnosti $\mathbf{P}$ (jer je $p^* \in (0, 1)$ i $\mathbf{P}^*(\omega) = \prod_{t=1}^T \mathbf{P}_1^*({\omega_t}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$). Štoviše, slučajne varijable $X_1, X_2, \dots, X_T$ su nezavisne u odnosu na $\mathbf{P}^*$. Nadalje, kako je $\mathbf{E}^*[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbf{E}^*[X_t] = (1 - p^*)a + p^*b = r$, iz Leme 1.4.2 (a) slijedi da je $(\tilde{S}_t : t = 0, 1, \dots, T)$ martingal u odnosu na $\mathbf{P}^*$. Dakle, ovako konstruirana vjerojatnost $\mathbf{P}^*$ je ekvivalentna martingalna mjera. Na taj način smo dokazali prvi dio sljedeće propozicije.

PROPOZICIJA 1.4.4. (a) *CRR model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $a < r < b$.*
 (b) *Ako je $a < r < b$, tada je CRR model potpun.*

DOKAZ. (b) Neka su $\mathbf{P}^*$ i $\hat{\mathbf{P}}$ dvije ekvivalentne martingalne mjere. Po Lemi 1.4.2 (b), slučajne varijable $X_1, X_2, \dots, X_T$ su tada nezavisne, jednako distribuirane (i po $\mathbf{P}^*$ i po $\hat{\mathbf{P}}$), te vrijedi

$$\mathbf{P}^*(X_t = a) = 1 - p^* = \hat{\mathbf{P}}(X_t = a), \quad \mathbf{P}^*(X_t = b) = p^* = \hat{\mathbf{P}}(X_t = b).$$

Zbog

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^*(\{(\omega_1, \dots, \omega_T)\}) &= \mathbf{P}^*(X_1 = \omega_1, \dots, X_T = \omega_T) \\ &= \mathbf{P}^*(X_1 = \omega_1) \cdots \mathbf{P}^*(X_T = \omega_T),\end{aligned}$$

i slično

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}(\{(\omega_1, \dots, \omega_T)\}) &= \hat{\mathbf{P}}(X_1 = \omega_1, \dots, X_T = \omega_T) \\ &= \hat{\mathbf{P}}(X_1 = \omega_1) \cdots \hat{\mathbf{P}}(X_T = \omega_T),\end{aligned}$$

slijedi

$$\mathbf{P}^*(\{(\omega_1, \dots, \omega_T)\}) = \hat{\mathbf{P}}(\{(\omega_1, \dots, \omega_T)\})$$

za sve $(\omega_1, \dots, \omega_T) \in \Omega$ (ovdje su $\omega_1, \dots, \omega_t \in \{a, b\}$). Zato je $\mathbf{P}^* = \hat{\mathbf{P}}$, što znači da je martingalna mjera jedinstvena. Po Teoremu 1.3.6, tržište je potpuno. $\square$

Označimo sa C_t (odnosno P_t), $t = 0, 1, \dots, T$, vrijednost call opcije (odnosno put opcije) na jednu dionicu sa cijenom izvršenja K i datumom dospijeca T . Te vrijednosti su na dan dospijeca jednake

$$C_T = (S_T - K)^+, \quad P_T = (K - S_T)^+.$$

Nadalje, neka je $\mathbf{P}^*$ jedinstvena martingalna mjera. Tada po formuli (1.3.1) imamo

$$C_t = S_t^0 \mathbf{E}^* \left[\frac{C_T}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right] = (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[(S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t] \quad (1.4.1)$$

$$P_t = S_t^0 \mathbf{E}^* \left[\frac{P_T}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t \right] = (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[(K - S_T)^+ \mid \mathcal{F}_t]. \quad (1.4.2)$$

Vrijednosti C_t i P_t zadovoljavaju sljedeći *call-put paritet*:

$$\begin{aligned}C_t - P_t &= (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ \mid \mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[S_T - K \mid \mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[S_T \mid \mathcal{F}_t] - K(1+r)^{-(T-t)} \\ &= S_t - K(1+r)^{-(T-t)}\end{aligned}$$

Uočimo da je formulom (1.4.1) dan izraz za cijenu call opcije pomoću očekivanja u odnosu na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbf{P}^*$. Sada ćemo to očekivanje eksplicitno izračunati.

PROPOZICIJA 1.4.5. *Neka je $c : \{0, 1, \dots, T\} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definirana formulom*

$$c(t, x) := (1+r)^{-(T-t)} \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} (1-p^*)^j (p^*)^{T-t-j} (x(1+a)^j (1+b)^{T-t-j} - K)^+. \quad (1.4.3)$$

Tada vrijedi $C_t = c(t, S_t)$ za svaki $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. Specijalno, u trenutku $t = 0$ cijena call opcije je

$$C_0 = c(0, S_0) = (1+r)^{-T} \sum_{j=0}^T \binom{T}{j} (1-p^*)^j (p^*)^{T-j} (S_0(1+a)^j (1+b)^{T-j} - K)^+. \quad (1.4.4)$$

DOKAZ. Zbog $S_t = S_{t-1}(1 + X_t)$ vrijedi da je $S_T = S_t \prod_{i=t+1}^T (1 + X_i)$, $t = 0, 1, \dots, T$. Stoga je po formuli (1.4.1)

$$C_t = (1 + r)^{-(T-t)} \mathbf{E}^*[(S_t \prod_{i=t+1}^T (1 + X_i) - K)^+ | \mathcal{F}_t].$$

Računamo

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}^*[(S_t \prod_{i=t+1}^T (1 + X_i) - K)^+ | S_t = x] \\ &= \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=t+1}^T (1 + X_i) - K)^+ | S_t = x] \\ &= \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=t+1}^T (1 + X_i) - K)^+] \quad (\text{zbog nezavisnosti } X_i, i \geq t+1, \text{ i } S_t) \\ &= \mathbf{E}^*[(x \prod_{i=1}^{T-t} (1 + X_i) - K)^+] \quad (\text{zbog } X_i \text{ su njd uz } \mathbf{P}^*) \\ &= \sum_{j=0}^{T-t} \binom{T-t}{j} (1 - p^*)^j (p^*)^{T-t-j} (x(1+a)^j (1+b)^{T-t-j} - K)^+, \end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz distribucije (uz $\mathbf{P}^*$) slučajnih varijabli X_j . Tvrdnja propozicije slijedi direktno iz gornjih računa. $\square$

Budući da je model koji promatramo potpun, call opcija se može replicirati. Sada ćemo eksplicitno izračunati replicirajuću strategiju $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1); 0 \leq t \leq T)$. Slijedimo li strategiju ϕ , vrijednost portfelja u trenutku $t \in \{1, \dots, T\}$ jednaka je $\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_t$. S druge strane, budući da strategija replicira call opciju, vrijednost replicirajućeg portfelja u trenutku t jednaka je vrijednosti opcije $C_t = c(t, S_t)$ u trenutku $t \in \{1, \dots, T\}$. Dakle vrijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_t = c(t, S_t).$$

Pomnožimo gornju jednakost indikatorom $1_{\{X_t=a\}}$. Slijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t 1_{\{X_t=a\}} + \phi_t^1 S_t 1_{\{X_t=a\}} = c(t, S_t) 1_{\{X_t=a\}}.$$

Uvrstimo $S_t 1_{\{X_t=a\}} = S_{t-1}(1 + X_t) 1_{\{X_t=a\}} = S_{t-1}(1 + a) 1_{\{X_t=a\}}$ u gornju jednadžbu. Slijedi

$$\phi_t^0(1+r)^t 1_{\{X_t=a\}} + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a) 1_{\{X_t=a\}} = c(t, S_{t-1}(1+a)) 1_{\{X_t=a\}}.$$

Izračunajmo uvjetno očekivanje u odnosu na $\mathcal{F}_{t-1}$ u gornjoj formuli, te iskoristimo da su ϕ_t^0 , ϕ_t^1 i S_{t-1} izmjerive u odnosu na $\mathcal{F}_{t-1}$, te da je X_t nezavisna s $\mathcal{F}_{t-1}$. Dobivamo

$$\phi_t^0(1+r)^t \mathbf{P}^*(X_t = a) + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a) \mathbf{P}^*(X_t = a) = c(t, S_{t-1}(1+a)) \mathbf{P}^*(X_t = a).$$

Podijelimo s $\mathbf{P}^*(X_t = a)$ i dobivamo

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_{t-1}(1+a) = c(t, S_{t-1}(1+a)).$$

Na isti način možemo dobiti jednakost

$$\phi_t^0(1+r)^t + \phi_t^1 S_{t-1}(1+b) = c(t, S_{t-1}(1+b)).$$

Oduzmimo prvu jednakost od druge. Slijedi:

$$\phi_t^1 S_{t-1}((1+b) - (1+a)) = c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t, S_{t-1}(1+a)),$$

odnosno

$$\phi_t^1 = \frac{c(t, S_{t-1}(1+b)) - c(t, S_{t-1}(1+a))}{S_{t-1}(b-a)} = \Delta(t, S_{t-1}),$$

gdje je $\Delta : \{1, \dots, T\} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definirano formulom

$$\Delta(t, x) := \frac{c(t, x(1+b)) - c(t, x(1+a))}{x(b-a)}. \quad (1.4.5)$$

Izraz $\Delta(t, x)$ zovemo **delta opcije**.

Kako računamo replicirajuću strategiju call opcije? U trenutku $t = 0$ vrijednost opcije jednaka je C_0 . Izračunamo $\phi_1^1 = \Delta(1, S_0)$ što možemo, jer nam je S_0 poznato u trenutku $t = 0$. Vrijednost od ϕ_1^0 izračunamo iz jednakosti $\phi_1^0 + \phi_1^1 S_0 = C_0$. Riječima, u trenutku $t = 0$ raspolažemo iznosom C_0 . Dio $\phi_1^1 S_0$ tog iznosa uložimo u dionice, a ostatak stavimo u banku (ili posudimo iz banke u slučaju $\phi_1^1 S_0 > C_0$). U trenutku $t = 1$ sazna se cijena dionice S_1 . Izračunamo $\Delta(2, S_1)$ što je ϕ_2^1 . Rebalansiramo portfelj tako da sadrži ϕ_2^1 dionica u vrijednosti $\phi_2^1 S_1$. Razlika ostaje u novcu. Preciznije, vrijedi

$$V_1(\phi) = \phi_1^0(1+r) + \phi_1^1 S_1 = \phi_2^0(1+r) + \phi_2^1 S_1,$$

otkud izračunamo

$$\phi_2^0 = \frac{1}{1+r} (V_1(\phi) - \phi_2^1 S_1).$$

Na isti način računamo replicirajući portfelj u ostalim vremenskim trenucima, tako da u trenutku $t - 1$ odredimo

$$\begin{aligned} \phi_t^1 &= \Delta(t, S_{t-1}), \\ \phi_t^0 &= \frac{V_{t-1}(\phi) - \phi_t^1 S_{t-1}}{(1+r)^{t-1}}. \end{aligned}$$

PRIMJER 1.4.6. U Primjeru 1.3.2 već smo vidjeli neke druge tipove opcija u dinamički modelima tržišta, gdje isplata ovisi o svim cijenama dionice do trenutka T . Pogledajmo još nekoliko primjera takvih opcija u CRR modelu (imamo samo jednu dionicu na tržištu):

- (i) **Azijske opcije** – neka je

$$A_T = \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T S_t$$

srednja vrijednost cijena dionica do trenutka T . Uz azijsku call opciju $(A_T - K)^+$ i azijsku put opciju $(K - A_T)^+$, na tržištu se trguje i modificiranim call/put azijskim opcijama čije su isplate $(S_T - A_T)^+$, odnosno $(A_T - S_T)^+$;

- (ii) **Lookback opcije** – označimo

$$m = \min\{S_t : t \in [0, T]\}, \quad M = \max\{S_t : t \in [0, T]\}.$$

Lookback call opcija je isplata $C = S_T - m$, a lookback put opcija jednaka je $C = M - S_T$. Možemo promatrati i modificirane call/put lookback opcije: $C = (K - m)^+$ i $C = (M - K)^+$.

- (iii) **Opcije s barijerama** su opcije koje aktiviraju ili prestanu vrijediti ako cijena dionice prijeđe neki unaprijed zadani prag B (barijera). Razlikujemo sljedeća četiri tipa opcija s barijerom: *down-and-in* ($C = 1_{\{m < B\}}X$), *down-and-out* ($C = 1_{\{m > B\}}X$), *up-and-in* ($C = 1_{\{M > B\}}X$), *up-and-out* ($C = 1_{\{M < B\}}X$). Ovdje X označava tip isplate, pa ćemo tako da $X = (S_T - K)^+$ promatrati odgovarajuću call opciju s barijerom.

- (iv) **Digitalna (binarna) opcija** isplaćuje fiksni iznos Q ukoliko je cijena dionice u trenutku T veća od cijene izvršenja K , $C = Q1_{\{S_T > K\}}$.

ZADATAK 1.4.7. Promatramo CRR model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.25$, $r = 0.1$ i $T = 3$. Početna cijena dionice je $S_0 = 100$. Odredite cijenu call opcije s cijenom izvršenja $K = 120$ te pripadni replicirajući portfelj.

1.5. Problem optimalnog zaustavljanja i američke opcije

Kao i u prethodnim odjeljcima, promatramo dinamički diskretni model financijskog tržišta. Osnovna razlika američkih opcija u odnosu na opcije koje smo do sada promatrali (europske opcije) je ta da se pravo na kupnju (prodaju) može ostvariti i u trenucima prije dospijeca opcije.

PRIMJER 1.5.1. **Američka call opcija** s dospijecom T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo kupiti dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeca T . **Američka put opcija** s dospijecom T i cijenom izvršenja K je ugovor koji vlasniku opcije daje pravo prodati dionicu po cijeni K u bilo kojem vremenskom trenutku do datuma dospijeca T .

Pretpostavimo da je američka call opcija napisana na prvu financijsku imovinu, te da je cijena izvršenja jednaka K . U trenutku $t = 1$, unutarnja vrijednost tog američkog calla jednaka je $(S_1^1 - K)^+$, u trenutku $t = 2$ vrijednost je $(S_2^1 - K)^+$, i tako dalje do trenutka $t = T$ kada joj je vrijednost $(S_T^1 - K)^+$. Stavimo $Z_t := (S_t^1 - K)^+$, $t = 0, 1, \dots, T$. Tada na američku call opciju možemo gledati kao na adaptiran niz slučajnih varijabli $(Z_t : t = 0, 1, \dots, T)$.

Prethodni primjer nas vodi na definiciju američkog slučajnog zahtjeva (opcije).

DEFINICIJA 1.5.2. **Američki slučajni zahtjev** je adaptiran niz slučajnih varijabli $Z = (Z_t : t = 0, 1, \dots, T)$.

Označimo s $U = (U_t : t = 0, 1, \dots, T)$, cijenu (vrijednost) američkog slučajnog zahtjeva $Z = (Z_t : t = 0, 1, \dots, T)$. Uočimo da je U_t općenito slučajna varijabla. Kako možemo odrediti cijenu U_t ?

- Uočimo da je u trenutku T vrijednost (cijena) američkog slučajnog zahtjeva Z jednaka točno unutarnjoj vrijednosti,

$$U_T = Z_T.$$

- Promotrimo trenutak $T - 1$. U tom trenutku vlasnik američke opcije je može odmah iskoristiti i dobiti iznos Z_{T-1} , ili je može iskoristiti u trenutku T , te dobiti iznos Z_T . U trenutku $T - 1$ iznos Z_T je nepoznat, ali znamo izračunati njegovu vrijednost (cijenu). To je vrijednost (u trenutku $T - 1$) opcije koja u trenutku T vrijedi Z_T . Ta vrijednost je po formuli (1.3.1) jednaka

$$S_{T-1}^0 \mathbf{E}^*[\tilde{Z}_T | \mathcal{F}_{T-1}] = S_{T-1}^0 \mathbf{E}^*\left[\frac{Z_T}{S_T^0} | \mathcal{F}_{T-1}\right].$$

Racionalni investitor odlučit će se u trenutku $T - 1$ za veću od te dvije vrijednosti. Zato je

$$\begin{aligned} U_{T-1} &= \max\left(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 \mathbf{E}^*[\tilde{Z}_T | \mathcal{F}_{T-1}]\right) \\ &= \max\left(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 \mathbf{E}^*\left[\frac{Z_T}{S_T^0} | \mathcal{F}_{T-1}\right]\right) \\ &= \max\left(Z_{T-1}, S_{T-1}^0 \mathbf{E}^*\left[\frac{U_T}{S_T^0} | \mathcal{F}_{T-1}\right]\right). \end{aligned}$$

Primijetimo da je U_{T-1} $\mathcal{F}_{T-1}$ -izmjeriva slučajna varijabla koja je vrijednost američke opcije Z u trenutku $T - 1$.

- Pomaknimo se jedan vremenski trenutak unatrag i promotrimo što se događa u $t = T - 2$. Investitor može odmah iskoristiti opciju i dobiti iznos Z_{T-2} , ili je ne iskoristiti. Ako ne iskoristi opciju, u trenutku $T - 1$ ona će vrijediti U_{T-1} . Vrijednost (u trenutku $T - 2$) opcije U_{T-1} s dospijecem $T - 1$ po formuli (1.3.1) jednaka je

$$S_{T-2}^0 \mathbf{E}^*\left[\frac{U_{T-1}}{S_{T-1}^0} | \mathcal{F}_{T-2}\right].$$

Slijedi da je

$$U_{T-2} = \max\left(Z_{T-2}, S_{T-2}^0 \mathbf{E}^*\left[\frac{U_{T-1}}{S_{T-1}^0} | \mathcal{F}_{T-2}\right]\right).$$

- Indukcijom unatrag dobivamo da je za sve $t = 1, \dots, T$,

$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, S_{t-1}^0 \mathbf{E}^*\left[\frac{U_t}{S_t^0} | \mathcal{F}_{t-1}\right]\right). \quad (1.5.1)$$

Za slučaj $S_t^0 = (1 + r)^t$, formula (1.5.1) prelazi u

$$U_{t-1} = \max\left(Z_{t-1}, \frac{1}{1 + r} \mathbf{E}^*[U_t | \mathcal{F}_{t-1}]\right).$$

Neka je $\tilde{U}_t := U_t/S_t^0$ diskontirana cijena američke opcije. Uočimo da $\tilde{U}$ zadovoljava sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}\tilde{U}_T &= \tilde{Z}_T, \\ \tilde{U}_t &= \max(\tilde{Z}_t, \mathbf{E}^*[\tilde{U}_{t+1} | \mathcal{F}_t]) \quad 0 \leq t \leq T-1.\end{aligned}$$

DEFINICIJA 1.5.3. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ diskretni vjerojatnosni prostor, te neka je $\mathbf{P}(\{\omega\}) > 0$ za sve $\omega \in \Omega$ i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Neka je, nadalje, dana filtracija $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T)$ i $Z = (Z_t, 0 \leq t \leq T)$ adaptiran slučajni proces. Definiramo slučajni proces $U = (U_t, 0 \leq t \leq T)$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}U_T &= Z_T, \\ U_t &= \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]) \quad 0 \leq t \leq T-1.\end{aligned}$$

Slučajni proces $U = (U_t, 0 \leq t \leq T)$ zovemo **Snellov omotač** od $Z = (Z_t, 0 \leq t \leq T)$.

Dakle diskontirana cijena $\tilde{U} = (\tilde{U}_t, 0 \leq t \leq T)$ američkog slučajnog zahtjeva $Z = (Z_t, 0 \leq t \leq T)$ je Snellov omotač (obzirom na $\mathbf{F}$ i $\mathbf{P}^*$) diskontiranih unutarnjih vrijednosti $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_t, 0 \leq t \leq T)$ američkog slučajnog zahtjeva. Za razliku od europskog slučajnog zahtjeva, diskontirana cijena američkog slučajnog zahtjeva nije nužno $\mathbf{P}^*$ -martingal, već samo $\mathbf{P}^*$ -supermartingal.

PROPOZICIJA 1.5.4. *Niz $(U_t : 0 \leq t \leq T)$ iz Definicije 1.5.3 je $\mathbf{P}$ -supermartingal. To je najmanji $\mathbf{P}$ supermartingal koji dominira niz $(Z_t : 0 \leq t \leq T)$.*

DOKAZ. Iz definicije Snellovog omotača slijedi

$$\begin{aligned}U_{t-1} &\geq Z_{t-1}, t = 1, \dots, T \quad (U \text{ dominira } Z), \text{ i} \\ U_{t-1} &\geq \mathbf{E}[U_t | \mathcal{F}_{t-1}], t = 1, \dots, T \quad (U \text{ je supermartingal}).\end{aligned}$$

Dakle, $(U_t : 0 \leq t \leq T)$ je $\mathbf{P}$ -supermartingal koji dominira niz $(Z_t : 0 \leq t \leq T)$, ostaje pokazati da je najmanji takav. Neka je $(X_t : t = 0, 1, \dots, T)$ supermartingal koji dominira Z , $X_t \geq Z_t, t = 0, 1, \dots, T$. Zbog $Z_T = U_T$ vrijedi $X_T \geq U_T$. Pretpostavimo da vrijedi $X_t \geq U_t$. Tada je

$$\begin{aligned}X_{t-1} &\geq \mathbf{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] \geq \mathbf{E}[U_t | \mathcal{F}_{t-1}], \text{ i} \\ X_{t-1} &\geq Z_{t-1},\end{aligned}$$

odnosno

$$X_{t-1} \geq \max(Z_{t-1}, \mathbf{E}[U_t | \mathcal{F}_{t-1}]) = U_{t-1}.$$

□

Uočimo da je $U_t \geq Z_t$ za sve t i u slučaju stroge nejednakosti vrijedi $U_t = \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]$. To sugerira da se pogodnim zaustavljanjem procesa U može dobiti martingal. Sljedeće pitanje na koje želimo dati odgovor je pitanje optimalnog vremena za korištenje američke opcije. Prvo se podsjetimo nekih pojmova iz teorije slučajnih procesa, kao što su vrijeme zaustavljanja i zaustavljeni proces.

DEFINICIJA 1.5.5. Slučajna varijabla $\tau : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, T\}$ zove se **vrijeme zaustavljanja** ako za svaki $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ vrijedi

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Uočite da je po definiciji slučajna varijabla τ vrijeme zaustavljanja, ako događaj $\{\tau \leq t\}$ ovisi samo o informaciji dostupnoj do trenutka t . Drugim riječima, u trenutku t znamo da li se vrijeme τ već dogodilo ili ne. Jednostavno se vidi da je uvjet iz definicije ekvivalentan sljedećem uvjetu: za svaki $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ vrijedi

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leq t\} \setminus \{\tau \leq t-1\} \in \mathcal{F}_t.$$

Neka je $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ slučajni proces adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T)$, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. **Slučajni proces zaustavljen u vremenu τ** , u oznaci $X^\tau = (X_t^\tau, 0 \leq t \leq T)$ definiran je formulom

$$X_t^\tau(\omega) := X_{\tau(\omega) \wedge t}(\omega),$$

odnosno preciznije, na skupu $\{\tau = s\}$ vrijedi

$$X_t^\tau = \begin{cases} X_s & \text{ako je } s \leq t \\ X_t & \text{ako je } s > t \end{cases}$$

Uočimo da je uvijek $X_T^\tau = X_\tau$ i $X_0^\tau = X_0$.

PROPOZICIJA 1.5.6. *Neka je $X = (X_t, 0 \leq t \leq T)$ slučajni proces adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T)$, te neka je τ vrijeme zaustavljanja. Tada je zaustavljen proces $X^\tau = (X_t^\tau, 0 \leq t \leq T)$ također adaptiran. Ako je X martingal (odnosno supermartingal), tada je i X^τ također martingal (odnosno supermartingal).*

DOKAZ. Za dokaz adaptiranosti primijetimo prvo da za Borelov skup $A \subset \mathbf{R}$ vrijedi

$$\{X_s \in A, \tau = s\} \in \mathcal{F}_s$$

(kao presjek dva događaja iz $\mathcal{F}_s$), te

$$\{X_t \in A, \tau > t\} \in \mathcal{F}_t$$

(kao presjek dva događaja iz $\mathcal{F}_t$). Zato je

$$\begin{aligned} \{X_t^\tau \in A\} &= \cup_{s=0}^T \{X_t^\tau \in A, \tau = s\} \\ &= \cup_{s=0}^t \{X_s \in A, \tau = s\} \cup \cup_{s=t+1}^T \{X_t \in A, \tau = s\} \\ &= \cup_{s=0}^t \{X_s \in A, \tau = s\} \cup \{X_t \in A, \tau > t\} \in \mathcal{F}_t \end{aligned}$$

po gore pokazanom.

Definirajmo proces $\phi = (\phi_t, 1 \leq t \leq T)$ formulom

$$\phi_t := 1_{\{t \leq \tau\}},$$

(dakle, ϕ je jednak 1 do vremena τ , a nakon toga je nula). Uočimo da je $\{t \leq \tau\} = \{\tau < t\}^c = \{\tau \leq t-1\}^c \in \mathcal{F}_{t-1}$ (zbog τ vrijeme zaustavljanja). To znači da je slučajni proces ϕ predvidiv. Nadalje, za $1 \leq t \leq T$ vrijedi

$$\begin{aligned} X_0 + \sum_{s=1}^t \phi_s (X_s - X_{s-1}) &= X_0 + \sum_{s=1}^t 1_{\{s \leq \tau\}} (X_s - X_{s-1}) \\ &= X_0 + \sum_{s=1}^{t \wedge \tau} (X_s - X_{s-1}) \\ &= X_{t \wedge \tau} = X_t^\tau. \end{aligned}$$

Dakle, zaustavljen proces X^τ je martingalna transformacija procesa X pomoću predvidivog procesa ϕ . Sada tvrdnja slijedi iz Propozicije 1.2.7. $\square$

Vraćamo se dalje na analizu svojstava Snellovog omotača iz Definicije 1.5.3.

PROPOZICIJA 1.5.7. *Slučajna varijabla definirana formulom*

$$\tau_0 := \min\{t \geq 0, U_t = Z_t\}$$

je vrijeme zaustavljanja. Zaustavljen proces $U^{\tau_0} = (U_{t \wedge \tau_0}, 0 \leq t \leq T)$ je martingal.

DOKAZ. Zbog $U_T = Z_T$ slijedi da je τ_0 dobro definiran i $\tau_0 \in \{0, 1, \dots, T\}$. Nadalje, $\{\tau_0 = 0\} = \{U_0 = Z_0\} \in \mathcal{F}_0$, a za $t \geq 1$

$$\{\tau_0 = t\} = \{U_0 > Z_0\} \cap \dots \cap \{U_{t-1} > Z_{t-1}\} \cap \{U_t = Z_t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Dakle, τ_0 je vrijeme zaustavljanja.

Zapišimo zaustavljen proces kao u dokazu Propozicije 1.5.6:

$$U_t^{\tau_0} = U_{t \wedge \tau_0} = U_0 + \sum_{j=1}^t \phi_j \Delta U_j$$

gdje je $\phi_j = 1_{\{\tau_0 \geq j\}}$. Slijedi da je za sve $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = \phi_{t+1}(U_{t+1} - U_t) = 1_{\{t+1 \leq \tau_0\}}(U_{t+1} - U_t).$$

Po definiciji je $U_t = \max(Z_t, \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t])$, te na skupu $\{t+1 \leq \tau_0\}$ vrijedi $U_t > Z_t$. Dakle, $U_t = \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]$, pa slijedi

$$U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} = 1_{\{t+1 \leq \tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]).$$

Izračunajmo uvjetno očekivanje obje strane:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} | \mathcal{F}_t] &= \mathbf{E}[1_{\{t+1 \leq \tau_0\}}(U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]) | \mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{t+1 \leq \tau_0\}} \mathbf{E}[U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_t] \\ &= 1_{\{t+1 \leq \tau_0\}} (\mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]) = 0 \end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi zbog $\{t+1 \leq \tau_0\} = \{\tau_0 \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$. Dakle, $\mathbf{E}[U_{t+1}^{\tau_0} - U_t^{\tau_0} | \mathcal{F}_t] = 0$ za sve $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$. $\square$

Označimo sa $\mathcal{T}_{t,T}$ familiju svih vremena zaustavljanja koja primaju vrijednosti u skupu $\{t, t+1, \dots, T\}$. Uočimo da zbog Ω konačan skup slijedi da je i $\mathcal{T}_{t,T}$ također konačan skup.

KOROLAR 1.5.8. *Vrijeme zaustavljanja τ_0 zadovoljava*

$$U_0 = \mathbf{E}[Z_{\tau_0} | \mathcal{F}_0] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_\sigma | \mathcal{F}_0].$$

DOKAZ. Budući da je U^{τ_0} martingal, vrijedi

$$U_0 = U_0^{\tau_0} = \mathbf{E}[U_T^{\tau_0} | \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_{\tau_0} | \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Z_{\tau_0} | \mathcal{F}_0].$$

S druge strane, za sve $\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}$, iz Propozicije 1.5.6 slijedi da je U^σ supermartingal. Dakle,

$$U_0 \geq \mathbf{E}[U_T^\sigma | \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_\sigma | \mathcal{F}_0] \geq \mathbf{E}[Z_\sigma | \mathcal{F}_0].$$

□

Ukoliko o slučajnom procesu Z mislimo kao o dobitku (Z_t je dobitak u trenutku t), tada nam Korolar 1.5.8 kaže da vrijeme zaustavljanja τ_0 maksimizira očekivani dobitak uz dano $\mathcal{F}_0$. Ako je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, tada je

$$U_0 = \mathbf{E}[Z_{\tau_0}] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_{\sigma}].$$

NAPOMENA 1.5.9. Poopćenje Korolara 1.5.8 daje

$$U_t = \mathbf{E}[Z_{\tau_t} | \mathcal{F}_t] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbf{E}[Z_{\sigma} | \mathcal{F}_t],$$

gdje je $\tau_t := \min\{j \geq t, U_j = Z_j\}$.

DEFINICIJA 1.5.10. Vrijeme zaustavljanja τ je **optimalno** za slučajni proces $Z = (Z_t, 0 \leq t \leq T)$ ako vrijedi

$$\mathbf{E}[Z_{\tau} | \mathcal{F}_0] = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_{\sigma} | \mathcal{F}_0].$$

Po Korolaru 1.5.8, τ_0 je optimalno vrijeme zaustavljanja za Z . Sljedeći rezultat nam daje karakterizaciju optimalnih vremena zaustavljanja.

TEOREM 1.5.11. *Vrijeme zaustavljanja τ je optimalno ako i samo ako vrijedi:*

$$Z_{\tau} = U_{\tau} \quad i \quad U^{\tau} \text{ je martingal.} \quad (1.5.2)$$

NAPOMENA 1.5.12. Zbog $\tau_0 = \min\{t \geq 0, U_t = Z_t\}$, slijedi da je τ_0 najmanje optimalno vrijeme.

DOKAZ. Pretpostavimo da vrijedi (1.5.2). Tada je $U_0 = \mathbf{E}[U_{\tau} | \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Z_{\tau} | \mathcal{F}_0]$. Međutim, po Korolaru 1.5.8,

$$U_0 = \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_{\sigma} | \mathcal{F}_0].$$

Dakle, τ je optimalno vrijeme zaustavljanja.

Obratno, pretpostavimo da je τ optimalno. Tada je

$$\begin{aligned} U_0 &= \sup_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbf{E}[Z_{\sigma} | \mathcal{F}_0] \quad (\text{po Korolaru 1.5.8}) \\ &= \mathbf{E}[Z_{\tau} | \mathcal{F}_0] \quad (\text{zbog } \tau \text{ optimalno}) \\ &\leq \mathbf{E}[U_{\tau} | \mathcal{F}_0] \\ &\leq U_0 \quad (\text{zbog } U \text{ supermartingal}) \end{aligned}$$

Dakle, $\mathbf{E}[U_{\tau} | \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[Z_{\tau} | \mathcal{F}_0]$, pa zbog $U_{\tau} \geq Z_{\tau}$, slijedi $U_{\tau} = Z_{\tau}$. Nadalje,

$$\mathbf{E}[U_{\tau} | \mathcal{F}_0] = U_0 \geq \mathbf{E}[U_t^{\tau} | \mathcal{F}_0] \geq \mathbf{E}[\mathbf{E}[U_t^{\tau} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_t^{\tau} | \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[U_{\tau} | \mathcal{F}_0],$$

gdje nejednakosti vrijede zbog U supermartingal. Budući da su lijeva i desna strana gore jednake, imamo jednakost

$$\mathbf{E}[U_t^{\tau} | \mathcal{F}_0] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[U_t^{\tau} | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_0].$$

Budući da je $U_t^{\tau} \geq \mathbf{E}[U_t^{\tau} | \mathcal{F}_t]$ (zbog U^{τ} supermartingal), iz gornje jednakosti uvjetnih očekivanja ta dva izraza slijedi $U_t^{\tau} = \mathbf{E}[U_t^{\tau} | \mathcal{F}_t]$. Međutim, to znači da je U^{τ} martingal. □

Sada želimo karakterizirati najveće optimalno vrijeme zaustavljanja. Definicija tog optimalnog vremena zasniva se na Doobovoj dekompoziciji supermartingala. Podsjetimo se definicija neopadajućeg procesa i svojstva Doobove dekompozicije s kolegija *Slučajni procesi*.

DEFINICIJA 1.5.13. Slučajni proces $A = (A_t, 0 \leq t \leq T)$ je *neopadajući* ako za sve $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ vrijedi $A_t \leq A_{t+1}$.

PROPOZICIJA 1.5.14. (*Doobova dekompozicija*) Neka je $U = (U_t, 0 \leq t \leq T)$ supermartingal. Tada postoje martingal $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ i neopadajući, predvidiv proces $A = (A_t, 0 \leq t \leq T)$, $A_0 = 0$, takvi da vrijedi $U = M - A$. Nadalje, gornja dekompozicija je jedinstvena.

DOKAZ. Definiramo $A_0 = 0$ i $M_0 = U_0$, te induktivno za $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$

$$\begin{aligned} M_{t+1} &= M_t + U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ A_{t+1} &= A_t + U_t - \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Tada je

$$\mathbf{E}[M_{t+1} | \mathcal{F}_t] = M_t + \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] - \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] = M_t,$$

što znači da je $M = (M_t, 0 \leq t \leq T)$ martingal. Nadalje, zbog $\mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] \leq U_t$, slijedi da je $A_{t+1} \geq A_t$. Iz definicije je vidljivo da je A_{t+1} izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_t$. Dakle, $A = (A_t, 0 \leq t \leq T)$ je neopadajući predvidiv proces sa $A_0 = 0$.

Očito je $U_0 = M_0 - A_0$. Pretpostavimo $U_t = M_t - A_t$. Tada je

$$\begin{aligned} M_{t+1} - A_{t+1} &= (M_t + U_{t+1} - \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]) - (A_t + U_t - \mathbf{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]) \\ &= M_t + U_{t+1} - A_t - U_t = U_{t+1}. \end{aligned}$$

Time smo dokazali i dekompoziciju.

Jedinstvenost: Pretpostavimo da su $U = M - A = M' - A'$ dvije dekompozicije. Tada je

$$M_t - M'_t = A_t - A'_t, \quad t = 0, 1, \dots, T.$$

Zbog $A_0 = 0 = A'_0$ slijedi $M_0 = M'_0$. Pretpostavimo $A_t = A'_t$, otkud odmah dobivamo $M_t = M'_t$. Zato je

$$0 = M_t - M'_t = \mathbf{E}[M_{t+1} - M'_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}[A_{t+1} - A'_{t+1} | \mathcal{F}_t] = A_{t+1} - A'_{t+1},$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz predvidivosti procesa A i A' . Dakle, $A_{t+1} = A'_{t+1}$. $\square$

Neka je $Z = (Z_t, 0 \leq t \leq T)$ slučajni proces, te neka je $U = (U_t, 0 \leq t \leq T)$ njegov Snellov omotač. Najveće optimalno vrijeme zaustavljanja procesa Z može se karakterizirati pomoću neopadajućeg procesa A iz Doobove dekompozicije supermartingala U .

PROPOZICIJA 1.5.15. *Najveće optimalno vrijeme slučajnog procesa Z dano je formulom*

$$\tau_{\max} = \begin{cases} T & \text{ako je } A_T = 0 \\ \min\{t \geq 0, A_{t+1} \neq 0\} & \text{ako } A_T \neq 0. \end{cases}$$