

Povijest matematike

Franka Miriam Brückler

PMF-Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu
 Proljeće 2026.



Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

Sadržaj

1	Pramatematika	1
2	Staroegipatska matematika	3
3	Babilonska matematika	9
4	Antička grčka matematika	15
4.1	Jonsko razdoblje	15
4.2	Atensko razdoblje grčke matematike	23
4.3	Helenističko razdoblje grčke matematike	37
4.3.1	Klasični helenizam	37
4.3.2	Postklasični helenizam	57
5	Matematika u Kini i Indiji u stara vremena	63
5.1	Starokineska matematika	63
5.2	Staroindijska matematika	70

Predgovor

Povijest matematike je na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu obavezan kolegij za studente diplomskog studija Matematika, modul nastavnički (i izboran za neke druge studije). To nije iznimka, nego je uobičajeno na studijima matematike na mnogim svjetskim sveučilištima. Poneki student se zasigurno pita: A zašto bih ja trebao učiti povijest matematike? To mi je samo nepotrebno „štrebetanje“, a ne treba mi ni za što osim možda za poneku anegdotu u budućem životu, pa zašto to nije neki lagani kolegij za koji ne trebam puno učiti? Naravno, možemo odgovoriti izbjegavanjem konkretnog odgovora: Očito postoji dobar razlog kad je tako posvuda. Takav odgovor ne bi smio biti zadovoljavajući obrazovanoj osobi, a ponajmanje studentu koji se sprema postati nastavnik matematike i u budućnosti će se često susretati s pitanjima učenika i njihovih roditelja zašto u školi moraju učiti matematiku kad im poslije osim malo aritmetike ništa od toga više neće trebati.

Razlozi zašto je povijest matematike dio kurikuluma većine studija matematike, osobito profesorskog usmjerenja, vrlo su raznoliki. Mnogi znanstveni radovi ukazuju na važnost povijesti matematike za nastavu matematike, primjerice [2, 4, 12, 17, 18, 19, 21, 22, 25, 27, 30, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 45]. Glavni razlozi koji se navode su sljedeći:

- **Kontekst i znanstveni pristup:** Povijest matematike daje kontekst matematičkim rezultatima jer pokazuje kako su mnogi, nerijetko apstraktni, rezultati otkriveni uslijed rješavanja praktičnih problema u stvarnome svijetu i otkriva razloge razvoja mnogih od matematičkih tema. Posebno, kroz proučavanje povijesti matematike postaje očito da matematike nije, kako se često u školi prezentira, skup gotovih nepromjenjivih rezultata, nego da se stalno nadograđuje i razvija.
- **Motivacija i humanizacija:** Kroz povijest matematike lakše je uočiti ljudski element u pozadini često formalne i apstraktne matematike, što indirektno utječe na smanjenje napetosti i povećanje motivacije kod učenika. Kroz povijest matematike matematika iz suhoparne statičke struke i znanosti postaje dinamičnija i ljudska. Također, nastavnici matematike u povijesti mogu naći mnoge zanimljive zadatke za obogaćivanje matematičkih tema koje obrađuju sa svojim učenicima.
- **Poboljšano razumijevanje:** Proučavanje puta do pojedinih rezultata omogućava razumijevanje razloga koji su doveli do danas rutinskih formula, potiče kritičko razmišljanje, produbljuje konceptualno razumijevanje. Učenici i studenti uočavaju kako su se i veliki matematičari mučili i griješili dok nisu zadovoljavajuće osmislili matematičke koncepte. Upoznavanje s greškama i problemima te načinima kako su se matematičari kroz povijest nosili s njima pruža alternativne strategije za rješavanje matematičkih problema.
- **Interdisciplinarnost:** Kroz uvide u povijesni kontekst razvoja matematičkih teorija ne samo da dovijamo poveznicu s općom povijesti, nego i s drugim znanostima. Tako

učenici i studenti mogu bolje razumjeti da matematika nije nešto izvan, već dio stvarnog svijeta. Također, poznavanje glavnih momenata iz povijesti matematike povećava i raspon tema iz vlastite struke o kojima u svakodnevici matematičari mogu razgovarati s drugima te tako doprinosi manjoj izoliranosti matematičara unutar društva.

Ova je skripta prilagođena kolegiju *Povijest matematike* na PMF-Matematičkom odsjeku (jednosemestralni kolegij sa satnicom 45 sati, 5 ECTS-a, no u praksi se održi samo 39 sati, a u skladu s definicijom ECTS-bodova to znači da student za savladavanje kolegija treba utrošiti oko 150 sati). Čak i ako skaliramo tih 150 sati s 39/45, ostaje da očekivano opterećenje pojedinog studenta iznosi oko 130 sati. Zašto ovo navodim? Zato da bude očigledno da studenti u samostalnom radu trebaju (u prosjeku) tjedno potrošiti bar još po nekoliko sati vlastitog rada kako bi uspješno savladali kolegij. Pritom treba uzeti u obzir da se ne radi o kolegiju koji se može „naštrebetati“: To što se navode, primjerice, godine kad se nešto dešavalo ne služi tome da se te godine pamte, nego da se može usporediti što je bilo prije (pa je moglo utjecati na razvoj određene ideje) i što se tada dešavalo u dijelu svijeta o kojem je riječ (pa su društveni, kulturni, politički uvjeti utjecali i na razvoj matematičkih ideja). Posebno to znači da se od studenata očekuje poznavanje osnovnih crta opće povijesti čovječanstva na razini osnovne i srednje škole; za one koji su zaboravili, pri početku svakog odjeljka ugrađena je poveznica na jedan kvalitetni izvor za „brzo ponavljanje“. Naravno, budući da se radi o kolegiju diplomskog studija, podrazumijeva se i poznavanje osnovnih definicija i teorema iz gradiva preddiplomskog studija (i školske matematike).

Od ove akademske godine na početku svakog odjeljka dajem popis matematičkih pojmova čije poznavanje se podrazumijeva u tom odjeljku, a na kraju se daje i sažetak najvažnijih stvari iz pojedinog odjeljka.

Svim studentima kao i svima drugima koji ovu skriptu uzmu u ruke želim zanimljiv i poticajan izlet u prošlost matematike!

Franka Miriam Brückler

Poglavlje 1

Pramatematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

* broj i brojka *

Počeci matematike vezani su uz brojanje, geometrijske uzorke i mjerenje. Točno vrijeme kad su ljudi počeli pokazivati znakove matematičkog razmišljanja nije pouzdano poznato, ali najranije sačuvane tragove matematike možemo naći u obliku zareza u kostima i kamenju (**rovaši**), te kao geometrijske ornamente na glinenim posudama iz kamenog doba [3, 5, 20, 38, 49].

Dva najpoznatija (primarna) izvora pramatematike su rovaši nađeni u Africi:

- kost iz Lebomba: stara oko 43.000 godina, sadrži 29 zareza, no nije sa sigurnošću poznato što se s njima brojalo;
- kost iz Išanga. stara oko 20.000 godina, sadrži nekoliko grupacija zareza i postoje mnoge teorije o njihovom mogućem smislu.

Nešto kasnije su se kao pomagala za bilježenje brojeva pojavili žetoni, te u južnoj Americi užad s čvorovima (*quipu*).

Brojanje i brojke, tj. izrazi i simboli za brojeve, vjerojatno su stari tek nekih 10.000 godina, a čini se da je njihov nastanak vezan za razvoj poljoprivrede i trgovine (razmjene). Prva pomagala za računanje bili su zasigurno prsti (prema Aristotelu, rasprostranjenost brojanja u skupinama po deset nije rezultat izbora, nego više anatomska slučajnost). Računanje se može dokazati tek prije ca. 4000 godina, tj. u doba starih civilizacija u Egiptu i Mezopotamiji [38, 49].



Prvi tragovi ljudskog matematičkog razmišljanja...

... potječu iz kasnog starijeg kamenog doba: Najstariji sačuvani izvori su kosti iz Lebomba i Išanga, koje spadaju u rovaše. Brojke i nazivi za brojeve potječu, čini se, iz mlađeg kamenog doba, dok najstariji pouzdano poznati podaci o računanju potječu iz razdoblja oko 2000. g. pr. Kr.

Poglavlje 2

Staroegipatska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

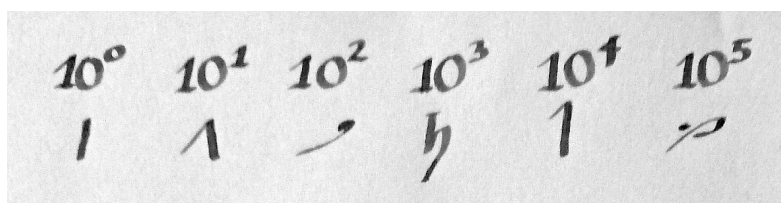
* aritmetika * algebra * geometrija * razlomci * dekadski brojevni sustav * Pitagorin poučak * površine i volumeni * π * linearne jednadžbe

Da bi se moglo pričati o povijesti ikoje ljudske djelatnosti, pa tako i matematike, nužno je razmotriti povijesne izvore. Nadalje, važno je i znati glavne karakteristike razdoblja i kulture u kojoj se proučava određena djelatnost, u našem slučaju matematika. Najstariji sačuvani izvori o staroegipatskoj matematici potječu iz doba tzv. srednjeg carstva (ca. 2040.–1794.) [?, 49]. Dva najvažnija i najpoznatija među njima su Rhindov i Moskovski papirus. **Rhindov papirus**, kojeg je napisao pisar Ahmes oko 1650. pr. Kr., te je to najstariji matematički tekst s poznatim imenom autora. Ime papirusa potječe od škotskog egiptologa A. H. Rhinda, koji ga je 1858. kupio u Luxoru, a danas se ovaj papirus čuva u *British Museum* u Londonu [15]. **Moskovski papirus** potječe iz ca. 1850. g. pr. Kr. Ruski egiptolog V. S. Goleniščev ga je kupio u Tebi u Egiptu 1892. ili 1893. godine, a danas se nalazi u Puškinovom muzeju u Moskvi. Iz moderne perspektive gledano, ta dva papirusa su zbirke zadataka namijenjene školama državnih službenika. Uz njih poznati su i egipatski matematički kožni svitak iz istog doba, te kasniji papirus Kairo. Iz njih saznajemo da je staroegipatska matematika nastala iz praktičnih potreba: mjeriteljstvo, građevina, skladištenje, porezi, ... [32].

No, više stoljeća prije nego su otkrili izradu papirusa, stari su Egipćani osmislili bilježenje brojeva koristeći dekadski, aditivan, nepozicijski **hijeroglifski brojevni sustav**. Znamenke tog sustava, tj. simboli koji su se koristili za zapisivanje brojeva u njemu, prikazane su slikom 2.1. Svaka znamenka piše se onoliko koliko puta je potrebno da bi zbroj vrijednosti svih znamenki u broju odgovarao iznosu broja kojeg prikazujemo. Primjerice, broj sedamnaest bi se u hijeroglifskom brojevnom sustavu mogao zapisati kao $\cap |||||$. No, i bilo koji drugi raspored jednog simbola $\cap$ i sedam simbola $|$ predstavljao bi isti broj — sustav je, kao što smo rekli, bio nepozicijski. Same znamenke hijeroglifskog brojevnog sustava su, kao i svi drugi hijeroglifski znakovi, imale svoje simboličko značenje: Znamenka za 1 je, kao u gotovo svim starim civilizacijama, jednostavno crtica; znamenka za 10 predstavlja omču za vezanje nogu stoci (ili potkovu ili petnu kost); znamenka za 100 predstavlja namotano užje; znamenka za 1000 predstavlja lotos; znamenka za 10.000 predstavlja uzdignuti prst; znamenka za 100.000 predstavlja punoglavca; naposljetku, znamenka za jedan milijun predstavlja egipatsko božanstvo svemira Huha (ili pak čovjeka u klečećem stavu) [16, 38].

1	10	100	1000	10.000	100.000	1.000.000
	∩	∩	⌚	⌚	⌚	⌚

Slika 2.1: Znamenke hijeroglifskog brojevnog sustava.



Slika 2.2: Jedna varijanta znamenki hijeratskog brojevnog sustava.

Prilagođavanjem hijeroglifa pisanju na papirusu razvilo se hijeratsko pismo, kojim su pisani npr. Rhindov i Moskovski papirus. Brojevni sustav je ostao nepromijenjen, ali su znamenke za hijeratske brojke poprimile malo drugačiji, jednostavniji, izgled, prikazan na slici 2.2. Kasnije se iz hijeratskog pisma razvilo demotsko pismo, odnosno iz hijeratskih demotske brojke.

Kao što je jasno iz navedenog, stari Egipćani znali su zapisivati prirodne brojeve. No, znali su i puno više. Uz Mezopotamiju, tu prvi put dokazivo susrećemo osnovne računske operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i uz to drugi korijen, ali njega samo u najjednostavnijim slučajevima). Osim prirodnih brojeva bili su poznati i pozitivni razlomci. No, u starom Egiptu kao i ostalim starim kulturama brojevi se još nisu gledali kao apstraktni objekti. S obzirom na to da je brojevni sustav bio nepozicijski, zbrajanje i oduzimanje bilo je jednostavno, bilo je dovoljno pregrupirati znamenke. Simbola koji bi odgovarali današnjim $+$ i $-$ još nije bilo, bar ne ustaljenih.

Zanimljivija je staroegipatska metoda množenja i dijeljenja [49]. Iz moderne perspektive gledano, množenje i dijeljenje svodilo se na korištenje distributivnosti i binarnog zapisa jednog faktora, odnosno djelitelja. Objasniti ćemo te metode kroz sljedeća dva primjera.

Primjer 1 Pomnožimo $25 \cdot 72$ koristeći suvremene brojke, ali na staroegipatski način. Formira se tablica sa dva stupca, svaki odgovara po jednom od faktora. Prvi red u prvom stupcu sadrži broj 1, a prvi red u drugom stupcu sadrži drugi faktor, ovdje je to 72. Sad se redovi uzastopno udvostručuju sve dok broj u prvom stupcu ne premaši prvi faktor:

1	72
2	144
4	288
8	576
16	1152
32	.

Slijedi niz oduzimanja. Od prvog faktora oduzme se najveći broj u prvom stupcu koji je manji od njega: $25 - 16 = 9$. Pritom označimo (gore podebljano) pripadni broj u

drugom stupcu. Od zadnje razlike oduzimamo sljedeći najveći broj u prvom stupcu, opet označavajući broj pokraj u drugom stupcu. Postupak ponavljamo sve dok razlika ne bude nula: $25 - 16 = 9$, $9 - 8 = 1$, $1 - 1 = 0$. Pritom su označeni brojevi 1152, 576 i 72. Stoga je $25 \cdot 72 = 72 + 576 + 1152 = 1800$. Primijetimo da je ovdje umnožak zapravo računat kao $25 \cdot 72 = (1 + 8 + 16) \cdot 72 = (2^4 + 2^3 + 2^0) \cdot 72 = (11001)_2 \cdot 72 = 1 \cdot 72 + 8 \cdot 72 + 16 \cdot 72$.

Primjer 2 Podijelimo $203 : 16$ na staroegipatski način, ali koristeći suvremene brojke. Opet se ispisuju dva stupca. Prvi odgovara djeljeniku (203), a drugi djelitelju (16). U prvom redu se zapisuju 1 i djelitelj 16. Sad se kao i kod množenja redovi uzastopno udvostručuju dok u drugom stupcu ne premašimo djeljenik, ako djelitelj nije veći od djeljenika, a nakon toga se, ako u drugom stupcu nismo dobili baš točno djeljenik, prvi red i naknadni raspolavljaju (kriterij zaustavljanja ćemo napisati niže):

1	16
2	32
4	64
8	128*
2	8
4	4
8	2
16	1

Na mjestu * stali smo s udvostručavanjem jer bi u sljedećem redu premašili djeljenik 203. Slijedi niz oduzimanja: Od djeljenika se u prvom stupcu zaredom oduzimaju najveći mogući brojevi, sve dok razlika ne padne ispod djelitelja. U našem slučaju to znači oduzimanja $203 - 128 = 75$, $75 - 64 = 11 < 16$. Pri svakom oduzimanju se, kao i kod množenja, označava odgovarajući broj desnog stupca (podebljano). Ti označeni brojevi se zbroje ($8 + 4 = 12$) i to je cjelobrojni dio količnika, tj. $203 : 16 = 12$ i ostatak.

Da bismo dobili razlomljeni dio kvocijenta, slijedi niz raspolavljanja redova počevši od 1 i 16. Pritom smo s $\dot{n}$ označili jedinični razlomak $\frac{1}{n}$. Cilj je da označavanjem odgovarajućih redova zbroj označenih brojeva u drugom stupcu bude jednak djeljeniku, 203. Trenutno je taj zbroj $128 + 64 = 192$. Nakon prvog raspolavljanja pribrojimo dobivenih 8 i dobijemo $200 < 203$, dakle nastavljamo raspolavljanje. Ako bismo sad pribrojili iz sljedećeg reda 4 dobili bismo broj veći od 203, dakle taj red ignoriramo. Pribrajamo iz sljedećeg 2, čime smo na 202 i fali 1, kojeg dobijemo nakon četvrtog raspolavljanja. Stoga je kvocijent jednak zbroju označenih brojeva u prvom stupcu: $4 + 8 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.

Uočimo da opisani postupak dijeljenja raspolavljanjem ne mora biti konačan te se ponekad umjesto raspolavljanja koristilo dijeljenje nekim drugim prikladnim brojem, ovisno o djelitelju, no opis takvih primjera bio bi predug te za njih čitatelje upućujemo na [15]. Ono što je svejedno vidljivo iz gornjeg primjera dijeljenja je egipatski pristup razlomcima. Stari Egipćani poznavali su (pozitivne) razlomke, ali nisu ih kao mi danas opisivali kao kvocijente brojnika i nazivnika. Umjesto toga, razlomci su shvaćani kao zbrojevi (različitih) prirodnih brojeva i jediničnih razlomaka $\dot{n} = \frac{1}{n}$.¹ Razlog takvog shvaćanja razlomaka je najvjerojatnije praktične prirode.

Primjer 3 Želimo li 11 kruhova podijeliti na 16 ljudi, najjednostavnije je prvo sve kruhove prepoloviti, čime smo dobili 22 polovice. Njih 16 damo svakome po jednu, preostalo je

¹Jedina iznimka bio je razlomak $\frac{2}{3}$, prema nekim izvorima i $\frac{3}{4}$.



Slika 2.3: Jedan egipatski razlomak.

6 polovica. Njih opet prepolovimo pa imamo 12 četvertina. Budući je 12 manje od 16, prepolovimo ih još jednom, pa imamo 24 osmine. Njih 16 opet jednu po jednu damo svakome. Preostalo je 8 osmina. Kad njih prepolovimo, dobit ćemo 16 šesnaestina i opet svakom damo po jednu. Dakle, svaka osoba je dobila $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ kruha.

Stoga danas rastav razlomka na zbroj cijelog broja i različitih jediničnih razlomaka nazivamo **egipatskim zapisom razlomka**. U hijeroglifskoj i hijeratskoj notaciji zbrojevi jediničnih razlomaka su se zapisivali jednostavno nadopisivanjem, pri čemu je zapis jediničnog razlomka bio simbol usta ☞ povrh brojke koja predstavlja nazivnik; taj simbol kasnije je postao točka te smo mi zato koristili simboliku $\dot{n}$ [49]. Primjerice, na slici 2.3 je egipatski zapis razlomka $\frac{2}{5}$. Rhindov papirus sadrži tablicu egipatskih zapisa razlomaka tipa $\frac{2}{2n+1}$, koji su među ostalim služili olakšanju dijeljenja za gore spomenute kompliciranije slučajeve dijeljenja.

Iz moderne perspektive prirodno se sad postavljaju pitanja: Može li se svaki pozitivan razlomak zapisati na egipatski način? Kako bismo našli takav zapis? Je li takav zapis jedinstven? Na prva dva pitanja odgovara:

Teorem 1 (Fibonacci) *Svaki pozitivan razlomak posjeduje egipatski zapis.*

Tvrđnju iz teorema uključivo pripadne metode dobivanja egipatskog zapisa razlomka otkrio je te u svom djelu *Liber Abaci* (1202.) opisao i (nesavršeno) dokazao znameniti srednjovjekovni matematičar Fibonacci (Leonardo iz Pise). Za potpun formalni dokaz Fibonaccijevog teorema potrebna je:

Lema 1 (J. J. Sylvester) *Neka je $\frac{p}{q} > 1$ razlomak manji od 1 i $p \neq 1$. Neka je $\frac{1}{n}$ najveći jedinični razlomak manji od $\frac{p}{q}$. Tada je $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{r}{qn}$ razlomak sa svojstvom $r < p$.*

Dokaz Sylvesterove leme. Imamo: $\frac{p}{q} - \frac{1}{n} = \frac{pn-q}{qn}$, tj. $r = pn - q$. Pretpostavimo $r \geq p$, odnosno $p(n-1) \geq q$. Budući da je $n > 1$, slijedi $\frac{p}{q} \geq \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$, što je kontradikcija. 🐥

Dokaz Fibonaccijevog teorema. Ako krenemo od pozitivnog razlomka i uzastopno oduzimamo najveći jedinični razlomak manji od njega, Sylvesterova lema garantira da će se brojnici smanjivati. Zbog dobrog uređaja na skupu $\mathbb{N}$ slijedi da ne možemo nastaviti unedogled, pa je teorem dokazan. 🐥

Primjer 4 *Zapišimo $\frac{3}{7}$ na egipatski način, koristeći Fibonaccijev algoritam:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} > \frac{3}{7} > \frac{1}{3}; \quad \frac{3}{7} - \frac{1}{3} &= \frac{2}{21}; \\ \frac{1}{10} > \frac{2}{21} > \frac{1}{11}; \quad \frac{2}{21} - \frac{1}{11} &= \frac{1}{231}. \end{aligned}$$

Dobili smo jedinični razlomak, dakle je

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}.$$

Zadatak 1 Na egipatski način zapišite rješenje sljedećeg zadatka [33]: Netko je iz riznice uzeo $\frac{1}{13}$ njenog sadržaja. Drugi je uzeo $\frac{1}{17}$ onog što je preostalo. Ostavio je 150 jedinica sadržaja u riznici. Koliko je na početku bilo u riznici?

Teorem 2 Svaki pozitivan razlomak ima beskonačno mnogo egipatskih zapisa.

Dokaz. Egzistencija je dana Fibonaccijevim teoremom. Neka je nađen jedan egipatski zapis razlomka $\frac{p}{q}$:

$$\frac{p}{q} = m + \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i}.$$

Jednakost $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ dijeljenjem s jednim od nazivnika početnog egipatskog zapisa, recimo s k_n , daje $\frac{1}{k_n} = \frac{1}{2k_n} + \frac{1}{3k_n} + \frac{1}{6k_n}$. Ako to supstituiramo na mjesto $\frac{1}{k_n}$ u prvom egipatskom zapisu, dobili smo novi egipatski zapis istog razlomka:

$$\frac{p}{q} = m + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{k_i} \right) + \frac{1}{2k_n} + \frac{1}{3k_n} + \frac{1}{6k_n}.$$

Očigledno se prethodno dijeljenje zapisa broja 1 s nekim od nazivnika trenutnog egipatskog zapisa može ponavljati unedogled, dakle vrijedi tvrdnja teorema. 

U Rhinodovom i Moskovskom papirusu nalazimo i zadatke koje bismo danas ubrojali u jednostavne linearne i čisto kvadratne jednadžbe, dakle u algebru. Tipičan primjer je sljedeći [15].

Primjer 5 (RP31) Hrpa, njene dvije trećine, njena polovina i njena sedmina čine 33. Koliko sadrži hrpa?

Vidimo da termin „hrpa“ odgovara modernom pojmu nepoznanice. Uz zadatke s „hrpama“, česti su i zadaci s omjerima *pe(f)su*, koji su opisivali kvalitetu piva ili kruha (*pe(f)su* je omjer količina dobivenog kruha odnosno piva i utrošenog žita) [15, 49].

Primjer 6 (RP77) Primjer razmjene piva za kruh. Recimo da ti je rečeno da 10 des² pive (s pefsu 2) treba zamijeniti za kruhove (s pefsu 5). Koliko kruhova će biti?

Zadatak 2 Na način koji smatrate što sličniji staroegipatskom, riješite zadatak RP34 [15]: Hrpa, njezina polovina i njezina četvrtina skupa daju 10. Koliko sadrži hrpa?

Rješenja svih zadataka u ovim papirusima, kao i općenito u starim civilizacijama, daju se kao konstatacije, bez objašnjenja i pokušaja generalizacije, a kamoli dokaza. Primjerice, rješenje zadatka RP77 iz prethodnog primjera dano je ovako: Izračunaj količinu brašna u 10 des pive; to je 5 hekata.³ Pomnoži 5 s 5, to je 25. Reci onda da za razmjenu treba 25 kruhova.

Stari su Grci otkriće geometrije pripisivali Egipćanima. Geometrijska znanja starih Egipćana svakako su bila impresivna. Poznavali su specijalni slučaj Pitagorinog poučka. Naime, starim Egipćanima je bila jako važna zemljopisna orijentacija hramova. Smjer sjever-jug utvrđivali su promatranjem točaka na horizontu gdje neka zvijezda izlazi i zalazi, a zatim se pomoću konopa s jednoliko razmaknutih 12 čvorova i pitagorejske trojke

²Tipična staroegipatska posuda za pivo imala je volumen 1 des, to je otprilike 2.4 L.

³Hekat je staroegipatska mjera volumena, iznosi otprilike 4.8 L.

(3, 4, 5) utvrđivao na prvi smjer okomiti smjer istok-zapad. No, tek papirus Kairo (iz ca. 300. pr. Kr., dakle nakon doba pitagorejaca) navodi i pitagorejske trojke (5, 12, 13) i (20, 21, 29). Stari su Egipćani znali računati i razne površine (trokut, pravokutnik, trapez) i volumene (kocka, kvadar). Znali su i da je volumen valjka jednak umnošku površine baze i visine. Posebno je poznat 14. zadatak u Moskovskom papirusu s korektnim pravilom za izračunavanje volumena krnje uspravne kvadratne piramide [49]. Ipak, najzanimljiviji je staroegipatski način računanja površine kruga. Čini se da je u doba kad su nastali Moskovski i Rhindov papirus već bio rasprostranjen postupak kakav je opisan, npr., u sljedećem zadatku [15, 49].

Primjer 7 (RP41) *Koji je volumen valjkastog silosa za žito promjera 9 i visine 10? Oduzmi $\frac{1}{9}$ od 9. Ostaje 8. Pomnoži 8 s 8, dobiješ 64. Pomnoži 64 s 10, to je 640 kubičnih kubita.⁴*

Dakle, stari Egipćani su površinu kruga promjera d računali kao $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$. S obzirom na to da je postupak bio šire poznat, čini se da su donekle implicitno primijetili proporcionalnost površine kruga i površine kvadrata nad polumjerom odnosno promjerom, no staroegipatski pristup još ne dozvoljava da govorimo o poznavanju ni naslućivanju egzistencije konstante koju danas zovemo π . Također, nema naznaka da su bili svijesni da taj postupak ne daje egzaktnu vrijednost površine. Ako staroegipatski postupak usporedimo s modernim, vidimo da staroegipatska procjena površine kruga odgovara aproksimaciji $\pi \approx \frac{32}{9} \approx 3.16$.

Zadatak 3 *Koliko, izraženo u postocima, iznosi greška računanja površine kruga na staroegipatski način u odnosu na točnu vrijednost?*



Matematika u starom Egiptu...

... bila je praktično orijentirana. Hijeroglifski brojevni sustav iz 3. tisućljeća pr. Kr. bio je aditivan i dekadski, a nakon otkrića papirusa hijeroglifske brojke su prilagođene u sklopu hijeratskog pisma. Dva najstarija i najpoznatija izvora staroegipatske matematike su Rhindov i Moskovski papirus, oba iz prve polovice 2. tisućljeća pr. Kr. Oni sadrže aritmetičke, algebarske i geometrijske zadatke za škole državnih službenika, bez simbolike, dokaza, izvoda ili generalizacije pravila. Stari egipćani poznavali su aritmetiku s pozitivnim razlomcima te znali rješavati jednostavnije algebarske i geometrijske zadatke. Zbrajanje i oduzimanje se provodilo pregrupiranjem znamenki, dok se množenje i dijeljenje svodilo na kombinaciju udvostručavanja odnosno prepolavljanja sa zbrajanjem i oduzimanjem. Razlomci (pozitivni) su bili shvaćani kao zbrojevi prirodnih brojeva i različitih jediničnih razlomaka (tzv. egipatski zapis racionalnog broja). Jedan algoritam za dobivanje egipatskog zapisa razlomka potječe iz srednjeg vijeka od fibonaccija. Njegovim preciziranjem može se dokazati da svaki pozitivan racionalan broj posjeduje beskonačno mnogo egipatskih zapisa. Sačuvani su i zadaci riječima, osobito zadaci s hrapama i omjerima pefsu, koji odgovaraju jednostavnim linearnim jednadžbama. Uz računanje jednostavnih površina i volumena, stari Egipćani znali su izračunati volumen krnje kvadratne piramide i valjka. No, za površinu kruga koristili su postupak koji daje samo približnu vrijednost, bez svijesti o postojanju konstante π niti o tome da se zapravo radi o aproksimaciji.

⁴1 kubit $\approx 52,3$ cm.

Poglavlje 3

Babilonska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

* aritmetika * algebra * geometrija * numerička matematika * teorija brojeva * pozicijski brojevni sustav * pitagorejske trojke * Pitagorin poučak * Talesov teorem * površine i volumeni * π * linearne i kvadratne jednadžbe * korjenovanje * iterativne metode

Na području Mezopotamije tijekom prva tri tisućljeća pr. Kr. izmijenili su se različiti dominantni narodi (Sumerani, Akadani, Babilonci, Asirci, Perzijanci), no od ca. 2500. pr. Kr. svi oni su koristili varijante klinastoga pisma te su iz tog razdoblja sačuvane mnoge glinene pločice, od kojih stotinjak imaju matematičke sadržaje (tablice, zadatke) [24, 39, 49]. Najviše takvih potječe iz starobabilonskog carstva (ca. 1900.–1600. pr. Kr.). Nedavno (2016.) je otkrivena i jedna pločica na kojoj se može naći rani oblik primjene trapezne formule. Iz tih sačuvanih pločica saznajemo da je i sumersko-babilonska matematika bila praktično orijentirana (trgovina, građevina, nasljeđivanje, astronomija), a rješenja zadataka su se kao i u starom Egiptu davala se bez argumenata, dokaza ili generalizacije.

Često se čuje ili pročita da su Sumerani odnosno Babilonci koristili sustav s bazom 60, ali to nije sasvim točno. Iz ranijih, arhaičnih piktograma su se, kao uostalom i samo klinasto pismo, razvile klinaste brojke. Sam pripadni brojevni sustav se mijenjao tokom vremena. Uglavnom je bio dekadski ili pak primarno seksagezimalni (sustav s bazom 60) i sekundarno dekadski. Dugo vremena ti sustavi bili su aditivni ili aditivno-multiplikativni, no njihov razvoj postigao je vrhunac u doba treće urske dinastije (potkraj 3. tisućljeća pr. Kr.) u Babilonu [16, 38, 49]. Taj sustav poznat je kao **(klasični) babilonski brojevni sustav**. Bio je to prvi pozicijski brojevni sustav u povijesti. Radilo se o brojevnom sustavu s primarnom bazom 60 i sekundarnom bazom 10. Zbog nedostatka znamenke nula taj sustav nije bio apsolutno pozicijski,¹ ali ga je već sama pozicionalnost učinila najmnocnijim (u pogledu zahtjevnijih izračuna) među starim brojevnim sustavima. Zato je on iznimno dugo ostao u upotrebi u znanosti, posebice astronomiji, a i dan danas ga povremeno koristimo (računanje vremena; iznosi kutova u stupnjevima). Pedeset i devet znamenki tog sustava pisane su pomoću dva klina, horizontalnog $<$ koji ima vrijednost deset i vertikalnog $\uparrow$ koji ima vrijednost jedan, a vrijednost pojedine znamenke se formirala po aditivnom principu. Primjerice, $<<\uparrow\uparrow\uparrow$ bi bila seksagezimalna znamenka 23.

Jedna od prednosti seksagezimalnog sustava u odnosu na moderni pozicijski dekadski sustav je da više razlomaka imaju konačan zapis.

¹Da u modernom dekadskom pozicijskom sustavu nedostaje znamenka 0, ne bismo bez konteksta mogli znati predstavlja li primjerice 12 broj dvanaest, stotinu i dva, stotinu dvadeset, ... — vrijednost znamenke ne bi bila apsolutno određena njenom pozicijom.

Primjer 8 Zapišimo razlomak $\frac{17}{48} = 0,3541\bar{6}$ seksagezimalno:

$$\frac{17}{48} = 0 + \frac{a}{60^1} + \frac{b}{60^2} + \dots,$$

gdje su $a, b, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 59\}$. Množenje sa 60 daje $21\frac{1}{4} = a + \frac{b}{60} + \dots$, dakle je $a = 21$. Oduzmemo li 21, preostaje $\frac{1}{4} = \frac{b}{60} + \dots$, što opet pomnožimo sa 60. Dobijemo $b = 15$, dakle je

$$\frac{17}{48} = \frac{21}{60} + \frac{15}{60^2} = (0; 21; 15)_{60},$$

tj. $\lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll$.²

Uz nedostatak znamenke nula, mana klasičnog babilonskog brojevnog sustava je da je osnovna tablica množenja veličine 60×60 (zapravo, 59×59), no tom su problemu Babilonci doskočili korištenjem tablica kvadratnih brojeva i algebarskim postupcima koji su ekvivalentni modernim formulama:

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}, \quad \text{odnosno} \quad ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Primjer 9 Pomnožimo sto sa sedamnaest na babilonski način. Broj sto u seksagezimalnom sustavu je $1 \cdot 60 + 40 \cdot 1 = \lll \lll \lll$, a sedamnaest je $\lll \lll \lll \lll \lll \lll$.

Recimo da želimo ta dva broja pomnožiti koristeći prvo pravilo. U tom slučaju nam prije korištenja tablice kvadrata treba zbroj ta dva broja: $(1; 40)_{60} + (0; 17)_{60} = (1; 57)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll$. Nakon toga u tablici kvadrata nađemo kvadrat tog broja te kvadratu faktora sto i sedamnaest.

Kvadrat od sto je deset tisuća:

$$10000 = (2; 46; 40)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll.$$

Kvadrat od sedamnaest je dvije stotine osamdeset i devet:

$$289 = (4; 49)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll.$$

Kvadrat zbroja faktora je trinaest tisuća šest stotina osamdeset i devet:

$$13689 = (3; 48; 9)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll.$$

Od posljednjeg oduzmemo prva dva kvadrata:

$$\begin{aligned} (3; 48; 9)_{60} - (2; 46; 40)_{60} - (4; 49)_{60} &= (3; 48; 9)_{60} - (2; 51; 29)_{60} = \\ &= (56; 40)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll. \end{aligned}$$

Na kraju prepolovimo i dobijemo $(28; 20)_{60} = \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll \lll$, što je točan rezultat: $100 \cdot 17 = 1700 = 28 \cdot 60 + 20$.

Zadatak 4 Pomnožite $\lll \lll \lll$ s $\lll \lll \lll \lll \lll \lll$ koristeći drugo pravilo.

²Kod seksagezimalnog zapisa na moderan način znamenke na pojedinim pozicijama razdvajamo točka-zarezom. Također, uobičajeno je prve dvije znamenke iza seksagezimalnog zareza označavati s ' i ', primjerice. $(0;5;2)_{60}$ se obično zapisuje kao $5'2''$.

Dijeljenje se svodilo na množenje s recipročnim brojem ($a/b = a \cdot \frac{1}{b}$), uz korištenje tablice recipročnih brojeva.

Mnoge babilonske pločice sadrže algebarske zadatke, točnije zadatke koji se iz moderne perspektive svode na linearne i kvadratne, pa čak i kubne jednadžbe i njihove sustave [49].

Primjer 10 (BM 13901) Pločica BM 13901 sadrži zadatak koji glasi „Skupio sam površinu i moje nasuprotno: To je 45'." Pod površinom se ovdje misli na površinu kvadrata nepoznate duljine stranice, dok je 'moje nasuprotno' sama ta stranica. Vidimo da se radi o jednažbi koju bismo danas zapisali kao $x^2 + x = \frac{45}{60}$. Postupak rješavanja je, skraćeno prema [31, str. 50–52], sljedeći: Uzmi 'projekciju' (koeficijent uz x) 1 i prepolovi, to je 30'; zbroji 15' (četvrtinu kvadrata 'projekcije') i 45' (slobodni član), to je 1; dakle, rješenje je razlika od 1 (duljine stranice kvadrata površine 1) i 30' (polovinu 'projekcije'), dakle $30' = \frac{1}{2}$. Vidimo da se u osnovi radi o primjeni postupka za rješavanje kvadratne jednadžbe: (Pozitivno) rješenje jednadžbe $x^2 + bx = c$ je $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$.

Zadatak 5 Na pločici BM 13901 nalazimo ovaj zadatak [31, str. 73–74]: „Zbrojio sam površine obiju mojih strana i dobio 25'25". Strana je $\frac{2}{3}$ strane i 5'." Kako biste interpretirali „moje strane"? Zapišite ovaj zadatak modernom simbolikom!

Naravno, geometrija je također bila razvijena u babilonsko doba. Na sačuvanim pločicama nalazimo mnoge geometrijske zadatke, posebice vezano za građevinu (izgradnja nasipa i kanala, često trapeznog presjeka) i astronomiju. Naravno, kao i u isto doba Egipćani, Babilonci su znali računati površine kvadrata, pravokutnika, a znali su i da su obujmi prizme i valjka jednaki umnošku površine baze i visine. Evo jednog primjera geometrijskog zadatka vezanog za izgradnju kanala.

Primjer 11 Na pločici VAT 7528 nalazimo zadatak [39, 49]: „Mali kanal. 6 kuša dug. 2 kuša gornja širina. 1 kuš donja širina. $1\frac{1}{2}$ kuš dubina. $\frac{1}{3}$ sar zemlje radni učinak. 18 ljudi. Dani su što? [...] 11 dana i $\frac{1}{4}$ su dani."

Vidljivo je da je ovdje opisano da je presjek kanala oblika jednakokračnog trapeza. Jedinica sar može biti jedinica površine i volumena, ovdje volumena (kojeg dnevno iskopa jedan čovjek). Pritom je 1 sar = 1 nindan² kuš, gdje je 1 nindan = 12 kuš.³ Volumen kanala ispada $(1,7; 30)_{60}$ sar. S druge strane, 18 ljudi dnevno iskopa 6 sar, dakle se cijeli kanal iskopa za $(11; 15)_{60}$ dana.

Izračuni površine i opsega kruga u babilonsko doba najčešće odgovaraju modernoj aproksimaciji $\pi \approx 3\frac{1}{8}$, ponekad $\pi \approx 3$. Kao i kod starih Egipćana, ovdje ne možemo još govoriti o svijesti o egzistenciji i ulozi broja π niti o njegovoj svjesnoj aproksimaciji.

Primjer 12 Jedna pločica iz razdoblja 1900. – –1600. pr. Kr. interpretira se kao tvrdnja da je opseg pravilnog šesterokuta jednak $\frac{24}{25}$ opsega tom šesterokutu opisane kružnice.

Ako to razmotrimo na suvremen način, budući da je stranica a_6 pravilnog šesterokuta upisanog u kružnicu jednak njezinom polumjeru ($r = a_6$), opseg šesterokuta ($O_6 = 6a_6 = 6r$) je prema toj tablici jednak $\frac{24}{25}O$. Danas znamo da je to $\frac{24}{25} \cdot 2r\pi$. Vidimo da je tvrdnja na pločici ekvivalentna aproksimaciji $\pi \approx \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$.

³Jedinica duljine kuš (ili giš) poznata je i pod nazivom kubit, a nindan se može prevesti sa štap i iznosio je oko 6 m.

Jedna od dvije najznamenitije sačuvane babilonske pločice, Plimpton 322 (ca. 1800. g. pr. Kr.) sadrži tablicu **pitagorejskih trojki**. Zapravo, u toj je tablici su u drugom stupcu kraće katete b pravokutnih trokuta, u trećem odgovarajuće hipotenuze c , ali u prvom stupcu su kvadrati omjerâ $\frac{c}{a}$. Primjerice, u 14. redu te tablice nalaze se brojevi $\frac{c}{a} = (1; 25,48,51,35,6,40)_{60}$, $b = (29,31)_{60}$ i $c = (53,49)_{60}$. Vidimo dakle da taj redak odgovara pitagorejskoj trojci (1771, 2700, 3229) [39, 49]. Prema nekim interpretacijama, ta se tablica može gledati kao rana trigonometrijska tablica. Babilonci su poznavali i opći Pitagorin poučak, bez dokaza, i koristili ga za rješavanje raznih geometrijskih zadataka. Pogledajmo dva primjera.

Primjer 13 *Na jednoj starobabilonskoj pločici pronađenoj 1936. kod Suse nalazimo određivanje polumjera kružnice opisane jednakokračnom trokutu sa stranicama duljina 50, 50 i 60 [49, str. 134–135]. U prvom se koraku računa visina 40 koristeći Pitagorin poučak, a onda se on koristi da bi se dobio polumjer $(31,15)_{60}$. Riješite taj zadatak modernom simbolikom, ali koristeći navedeni postupak!*

Primjer 14 *Na pločici BM 85 196 nalazi se zadatak [49]: „Greda duljine 30' kuš je naslonjena na zid. Gornji kraj je skliznuo za 6' kuš. Koliko je donji kraj udaljen od zida? U rješenju se redom računa: Kvadrat od 30' je 15'. Oduzme se 6' od 30' i dobije 24'. To se kvadrira i dobije 9'36". To se oduzme od 15', ostaje 5'24". Naposljetku je rješenje drugi korijen posljednjeg broja, tj. 18'.*

Babilonci su poznavali i Talesov teorem i koristili ga u kombinaciji s Pitagorinim, npr. za određivanje visine kružnog odsječka nad tetivom poznate duljine u krugu poznatog promjera [49, str. 138–139].

Naposljetku, u babilonsko doba možemo naći i začetke numeričke matematike. konkretno iterativnih metoda za izračunavanje aproksimativnih iznosa raznih jednažbi. Kako sugerira druga od dviju najznamenitiji sačuvanih pločica YBC 7289, za aproksimativno izračunavanje drugih korijena korištena je iterativna metoda danas poznata pod imenom **Heronova metoda**, jer ju je opisao starogrčki matematičar Heron Aleksandrijski u svom djelu *Metrica* (vj. 1. st. AD). Na pločici YBC 7289 nalazimo crtež kvadrata s ucrtanim dijagonalama i tri brojke. Prva brojka je $\lll = 30$, vjerojatno 30', uz stranicu, dakle kvadrat ima duljinu stranice $30' = \frac{1}{2}$. Druga brojka je $\lceil \lll \lceil \lceil \lceil \lceil \lceil \lll \lll \lll \lll \lll \lceil$, tj. $(1; 24,51,10)_{60} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = 1,41421\overline{296}$, što je $\sqrt{2}$ (s greškom reda veličine samo 10^{-7}). Treća brojka je $\lll \lll \lll \lll \lceil \lceil \lll \lceil \lceil \lceil \lceil \lll \lll \lll \lceil \lceil \lceil \lceil \lceil$, tj. $(0,42; 25; 35)_{60} = 0,70710648\overline{1}$, tj. duljina dijagonale nacrtanog kvadrata (opet s greškom reda veličine 10^{-7}) [5, 49]. Tako dobre vrijednosti naravno nisu mogle biti plod slučaja i pomnije istraživanje pokazuje da su $(1; 24,51,10)_{60}$ prve četiri seksagezimalne znamenke trećeg i četvrtog koraka Heronove metode za računanje drugog korijena od 2, iz čega zaključujemo da je Babiloncima bila poznata ta metoda.

Napomena 1 *Podsjetimo se Heronove metode za korjenovanje: Želimo li korjenovati neki broj n , krećemo od neke početne aproksimacije za $\sqrt{n}$. Primjerice, za račun $\sqrt{2}$ mogli bismo krenuti od početne aproksimacije $a_0 = 1$.*

U svakom koraku je nova aproksimacija polovina zbroja prethodne aproksimacije s kvocijentom broja kojeg korjenujemo i prethodne aproksimacije:

$$a_{i+1} = \frac{1}{2} \left(a_i + \frac{n}{a_i} \right).$$

Konkretno, za izračun $\sqrt{2}$ imamo sljedeća prva četiri koraka:

i	a_i	$a_{i+1} \approx \sqrt{n}$	seksagezimalno	dekadski
1	1	$\frac{3}{2}$	1; 30	1.5
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{17}{12}$	1; 25	1.41 $\dot{6}$
3	$\frac{17}{12}$	$\frac{577}{408}$	1; 25,51,10(.35,...) $\approx$ 1; 25,51,11	1.13169642857...
4	$\frac{577}{408}$	$\frac{665857}{470832}$	1; 25,51,10(.7,...) $\approx$ 1; 25,51,10	1.41421356237...

S postupkom stajemo kad se zadovoljavajući broj znamenki počne ponavljati, primjerice ovdje su se počele ponavljati prve četiri seksagezimalne znamenke pa zaključujemo da je $\sqrt{2} \approx (1,25; 51; 10)_{60}$ aproksimacija s greškom reda veličine manjom od 60^{-3} .



Matematika u Mezopotamiji ...

... se kao i u drugim starim kulturama razvila iz praktičnih potreba. Primarni izvori su glinene pločice pisane klinastim pismom, a većina sačuvanih je iz doba starobabilonskog carstva. U to je doba korišten prvi pozicijski sustav u povijesti, koji je bio primarno seksagezimalan, a sekundarno dekadski, no zbog nedostatka znamenke nula nije bio apsolutno pozicijski. Množenje se svodilo na zbrajanje i oduzimanje kvadrata brojeva, a dijeljenje na množenje s recipročnim brojem, pri čemu su sačuvane razne tablice kvadrata i recipročnih brojeva. Babilonci su znali rješavati i neke linearne i kvadratne jednadžbe te njihove sustave, ali bez generalizacije ili dokaza ispravnosti postupaka. Geometrijski zadaci iz babilonskog doba najčešće su vezani za građevinu, a po svom matematičkom sadržaju slični su egipatskima: računanje raznih površina i volumena. Pritom su se za opseg i površinu kruga koristili postupci koji interpretirani na moderan način odgovaraju aproksimacijama broja π s $3\frac{1}{8}$ ili s 3. Babilonci su poznavali iskaz Talesovog teorema te općeg slučaja Pitagorinog poučka, a tablica Plimpton 322 sadrži tablicu pitagorejskih trojki. U babilonsko doba bio je poznat i Heronov postupak za korjenovanje, što zaključujemo iz iznimno dobrih približnih iznosa za $\sqrt{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$ na tablici YBC 7289.

Poglavlje 4

Antička grčka matematika

4.1 Jonsko razdoblje



Matematički pojmovi u ovom odjeljku

dokaz * broj i brojka * prirodni brojevi * parni i neparni brojevi * prosti i složeni brojevi * savršeni brojevi * racionalni i iracionalni brojevi * aritmetika * teorija brojeva * geometrija * kut * pravci i kružnice * mnogokuti * Talesov poučak * Pitagorin poučak i pitagorejske trojke * zajednička mjera * Euklidov algoritam

Dobro je poznato da temelji znanstvenog razmišljanja sežu u doba antičke Grčke, u tzv. arhajsko razdoblje starogrčke povijesti. Tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj **grčki alfabet** s 24 slova:

A, α ; B, β ; Γ , γ ; Δ , δ ; E, ϵ ; Z, ζ ; H, η ; Θ , θ ; I, ι ; K, κ ; Λ , λ ; M, μ ; N, ν ; Ξ , ξ ; O, $\omicron$; Π , π ; P, ρ ; Σ , σ ili ς ; T, τ ; Y, υ ; Φ , φ ; X, χ ; Ψ , ψ ; Ω , ω .

U isto se doba počinju se razvijati i grčki polisi (gradovi-države). Na području Jonije (današnja jugozapadna Turska) se na prijelazu 7./6. st. pr. Kr. pojavljuju temelji filozofije i znanstvenog načina razmišljanja. Pod utjecajem egipatskog i babilonskog nasljeđa, tu se počela razvijati i matematika, te je stoga prvo razdoblje starogrčke matematike (otprilike od početka 6. st. pr. Kr. pa do otprilike početka 5. st. pr. Kr.) poznato kao jonsko razdoblje starogrčke matematike. Iz tog doba nije sačuvan nikoji primarni izvor, no temeljem sekundarnih izvora saznajemo da se u to doba matematika počela formirati u znanost u kojoj se tvrdnje dokazuju. Najvažniji sekundarni izvor za ovo, a kasnija razdoblja je **Proklo** (5. st. A. D.), točnije njegovi komentari Euklidovih *Elemenata* (u nastavku ih označavamo s EE) [28, 49].

Brojevi su se u jonsko doba, pa i dalje do 3. st. pr. Kr., zapisivali koristeći **atički (akrofonski) brojevni sustav**. Taj je sustav primarno dekadski i sekundarno kvinarni, aditivni brojevni sustav (kao i kasniji, poznatiji, rimski brojevni sustav) [38, 16, 49]. Znamenke akrofonskog sustava su:

I = 1 ($\mu\acute{o}\nu\omicron\varsigma$); Π = 5 ($\pi\acute{\epsilon}\nu\tau\epsilon$); Δ = 10 ($\delta\acute{\epsilon}\kappa\alpha$); I^{Δ} = 50; H = 100 ($\acute{\epsilon}\kappa\tau\acute{o}\nu$); I^{H} = 500; X = 1000 ($\chi\acute{\iota}\lambda\iota\omicron\upsilon$); I^{X} = 5000; M = 10000 ($\mu\nu\rho\acute{\iota}\acute{\alpha}\varsigma$); I^{M} = 50000.

Primjerice, broj kojeg danas zapisujemo kao 10539, u antičkom brojevnom sustavu bio bi zapisan kao $\text{M}^{\text{I}^{\Delta}}\Delta\Delta\Delta\Pi\text{IIII}$.

Tradicionalno se prvim „pravim” matematičarem smatra **Tales** iz Mileta (oko 624.–527. pr. Kr.). On je prvi poimence poznat grčki filozof, znanstvenik i inženjer. Tradicija mu pripisuje prve dokaze, ali se zapravo ne zna je li išta dokazao. Štoviše, ne zna se ni je li Tales išta pisao. Talesu pripisani teoremi pripisuju mu se temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius (2./3. st. A. D.) i Proklovih (5. st. A. D.) komentara EE. Prema Proklu, Tales je iz Egipta prenio geometrijska znanja u Grčku. Diogenes Laertius mu pripisuje Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice.¹ Diogenes Laertius spominje i legendu o navodnom Talesovom određivanju visine piramide temeljem koje se Talesu pripisuju Talesovi teoremi o proporcionalnosti. Proklo pak Talesu pripisuje sljedeća četiri teorema: Svaki promjer raspolavlja krug; kutevi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki; vršni kutevi su jednaki; KSK-teorem o sukladnosti trokuta. No, nipošto nije sigurno da je išta od toga Tales stvarno dokazao, moguće je da se kod njega još radilo samo o empirijski utvrđenim činjenicama. Također, postoje i rasprave o točnom smislu tvrdnji (npr. vezano za teorem o kutovima uz osnovicu jednakokračnog trokuta u Proklovom tekstu nalazimo izraze koji su bliži značenju sličan nego jednak) [5, 28, 49].

Najstariji pouzdano poznati matematički dokazi potječu od pitagorejaca, pripadnika škole koju je osnovao **Pitagora sa Samosa** (ca. 570.–490. pr. Kr.). O njegovom životu malo toga pouzdano zna, a nije ni sigurno je li ikoji od njemu pripisanih teorema sam otkrio i(li) dokazao. Rođen je na Samosu kao sin trgovca i s ocem je imao prilike putovati, a bio je i dobro obrazovan. Na njegovo obrazovanje su bitno utjecali filozofi Ferekid, Tales i Talesov učenik Anaksimandar. Oko 535. je otišao u Egipat, gdje je 525. pao u perzijsko zarobljeništvo i odveden u Babilon. Nekoliko godina kasnije vratio se na Samos i tamo osnovao svoju prvu školu („polukrug”). Iz ne pouzdano poznatih razloga je 518. (ili nešto ranije) otišao u južnu Italiju, gdje je u grčkoj koloniji Krotonu osnova znanstveno-vjerski-mističku **pitagorejsku školu**. Njene članove danas nazivamo pitagorejcima, no sami su se nazivali *μάθηματικοί* (*μάθημα* = znanje, ono što se uči). Pitagorejska škola je bila dijelom tajna zajednica pa mnogi podaci o njoj nisu pouzdani, a Pitagori su pripisivana božanska svojstva, te su to glavni razlozi zašto danas ne znamo tko je dokazao koji pitagorejski teorem. No, sigurno je da su pitagorejci počeli deduktivno dokazivati matematičke tvrdnje. Krajem 6. st. pr. Kr. je Pitagora zbog političko-ratnih sukoba u kojima su sudjelovali pitagorejci pobjegao u Metapont i vjerojatno ondje umro, no ne zna se kako i kada [5, 28].

Prema pitagorejskoj filozofiji bit svijeta je u harmoniji brojeva. Pitagorejci su prvi koji su brojeve gledali kao samostalne, apstraktne objekte. No, za njih, a tako i kasnije za sve starogrčke matematičare, broj (*ἀριθμός*) je isključivo prirodan broj.² Brojevima su pridavana mistična značenja, ali su dokazani i prvi rezultati o njima. Aritmetika kakvu su razvijali pitagorejci i ostali klasični starogrčki matematičari poznata je kao **teorijska aritmetika**, a iz moderne perspektive možemo ju smatrati začetkom teorije brojeva. Za razliku od toga, praktično računanje (logistika) u antičkoj Grčkoj nije smatrano matematičkom djelatnošću. Za logistiku su se u jonsko doba kao pomagala koristili kamenčići i prsti [5, 28].

Pitagorejci su razvili četiri discipline kojima je kasnije, početkom srednjeg vijeka, Boethius dao zajednički naziv *quadrivium*. Prva od njih je već spomenuta (teorijska) aritmetika, koja se bavi onim što se može prebrojati (kvantiteta, brojnost). Druga disciplina *quadrivium*-a je **geometrija** (*γεωμετρία*), koja se bavi onim što se može mjeriti

¹Najstariji sačuvani dokaz ovog teorema nalazimo u EE kao (EEIII31).

²Pritom jedinica (monada, *μόνος*) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji VII. knjige EE piše: Broj je skup jedinica.

(veličinama: duljina, površina, volumen, ali i trajanje, masa). Preostale dvije discipline *quadrivium*-a su glazba (harmonija, aritmetika u vremenu) i astronomija (geometrija u vremenu). O pitagorejskoj aritmetici saznajemo ne samo od Prokla, nego i od Aristotela (4. st. pr. Kr.) i Nikomaha iz Geraze (1. st. A. D). Mnogi pitagorejski aritmetički rezultati sačuvani su u VII., VIII. i IX. knjizi EE. Pitagorejci su uveli razne klasifikacije (prirodnih) brojeva. Osnovna je podjela na parne i neparne brojeve: **Parni brojevi** su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a **neparnima** pri dijeljenju popola preostaje jedinica. Razlikovali su i **proste i složene brojeve**.³ Razmatrali su i **savršene brojeve**, tj. brojeve koji su zbrojevi svih svojih pravih djelitelja, te kvadratne i kubne brojeve, tj. brojeve oblika n^2 i n^3 . Kasnije, vjerojatno tek neopitagorejci u postklasično helenističko razdoblje (oko prijelaza era), su razmatrani i razni figurativni brojevi te prijateljski brojevi (dva broja su prijateljska ako je svaki od njih zbroj pravih djelitelja drugog, tj. savršeni su brojevi oni koji su prijateljski sami sebi) [5, 28, 49]. Pitagorejcima se pripisuje sljedeći poznati teorem:⁴

Teorem 3 (EEIX36) *Ako je proizvoljno mnogo brojeva počevši od jedinice razvijeno u dvostrukoj proporciji⁵ sve dok im zbroj ne bude prost, te ako taj zbroj pomnožen sa zadnjim daje broj, taj broj je savršen.*

Suvremenim načinom rečeno: Ako je $p = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^m = 2^{m+1} - 1$ prost broj, onda je $n = 2^m p$ savršen.

Pitagorejci su se vezano za Pitagorin poučak (vidi niže) bavili i pitagorejskim trojkama. Gotovo sigurno su znali ih ima beskonačno mnogo, a pripisuje im se i dokaz sljedećeg teorema (teorem dajemo u suvremenoj formulaciji):

Teorem 4 (EEX29, lema) *Za svaka dva relativno prosta prirodna broja $m > n$, koji nisu oba neparni, $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ je primitivna pitagorejska trojka⁶ i obrnuto, za svaku primitivnu pitagorejsku trojku (a, b, c) postoje dva relativno prosta prirodna broja m i n , koji nisu oba neparni, takvi da je $(a, b, c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.*

Primijetimo da specijalno za $n = 1$ odmah vidimo da postoji beskonačno mnogo pitagorejskih trojki [5]. Napomenimo ovdje da je generalizaciju gornje tvrdnje na općenite pitagorejske trojke dokazao tek 1901. L. Kronecker: Sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $a^2 + b^2 = c^2$ su, do na udvostručavanje, dana kao $(2mnk, (m^2 - n^2)k, (m^2 + n^2)k)$ gdje su k, m, n prirodni brojevi takvi da je $m > n$ i m i n su relativno prosti i nisu oba neparni (**Kroneckerov teorem**) [1].

Iako ne znamo je li Pitagora osobno dokazao Pitagorin poučak, čini se pouzdano da je neki pitagorejca prvi koji je taj teorem dokazao (kako smo vidjeli, teorem je bio poznat još Babiloncima, ali ne i dokaz). Ne znamo točno kakav je bio pitagorejski dokaz tog poučka, ali budući da se većina sadržaja I. knjige EE pripisuje pitagorejcima, razumno je pretpostaviti da je tamo zapisan dokaz zapravo pitagorejski:

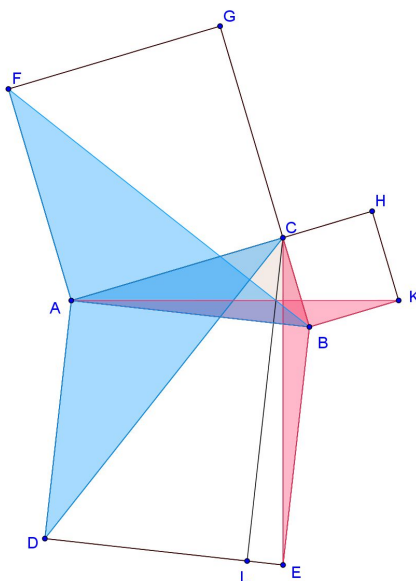
Teorem 5 (EEI47, EEI48) *Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad njegovom najduljom stranicom jednak zbroju kvadrata nad njegovim kraćim stranicama.*

³U VII. knjizi EE 11. i 13. definicija kažu: Prost broj je broj koji se može izmjeriti samo jedinicom. Složen broj je onaj koji se može izmjeriti brojem.

⁴Obrat (da ne postoje drugi parni savršeni brojevi osim onih gornjeg oblika) je dokazao tek Euler u 18. st.

⁵Tj. svaki sljedeći član je dvostruko veći od prethodnog.

⁶Pitagorejska trojka u kojoj su brojevi relativno prosti.



Slika 4.1: Ilustracija uz Euklidov dokaz nužnosti u Pitagorinom poučku (slika izrađena programom Geogebra).

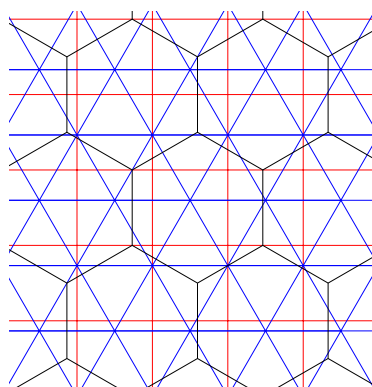
Dokaz nužnosti. Neka je dan pravokutni trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C (slika 4.1). Nad sve tri stranice konstruirani su i kvadrati $ACGF$, $BCHK$ i $ABED$. Nadalje, ucrтана je i visina CL na hipotenuzu, od vrha C do nasuprotne stranice kvadrata nad hipotenuzom. Ta visina dijeli kvadrat nad hipotenuzom na dva pravokutnika. Dokazujemo da je jedan od njih jednak (po površini) kvadratu nad jednom katetom. Zatim se analogno dokaže da je drugi jednak kvadratu nad drugom katetom, iz čega slijedi tvrdnja. Dokažimo recimo da je lijevi pravokutnik $ADLT$ jednak kvadratu $ACGF$: Ucrtajmo trokute ADC i ABF . Ta dva trokuta imaju jednu zajedničku stranicu (AB), zatim još jednu stranicu jednake duljine ($|AF| = |AC|$ jer je $ACGF$ kvadrat), a i kut među tim dvjema stranicama je jednak ($\angle FAB$ je pravi kut uvećan za kut $\angle CAB$, a takav je i $\angle CAD$). Po SKS-teoremu⁷ ta dva trokuta su ne samo u smislu geometrijske algebre jednaka, nego i sukladna. Budući da trokut $\triangle ACD$ ima jednaku jednu stranicu i visinu na nju kao pravokutnik $ADLT$ (stranica AD je zajednička, a visina je DL) slijedi da je taj trokut jednak pola pravokutnika.⁸ S druge strane trokut $\triangle AFB$ ima s kvadratom $ACGF$ zajedničku stranicu AF i visinu AC , dakle je taj trokut jednak pol tog kvadrata. Budući da su trokuti jednaki, slijedi da je kvadrat $ACGF$ jednak pravokutniku $ADLT$, što je i trebalo dokazati. 🦆

Iz ovog se dokaza vidi i osnovni princip tzv. **geometrijske algebre** starih Grka, a to je da su identitete koje danas interpretiramo algebarski antički Grci shvaćali i dokazivali čisto geometrijski, kao jednakost duljina, površina ili volumena. Kad se u geometrijskoj algebri govori o jednakosti, kao npr. ovdje o jednakosti jednog kvadrata s druga dva, misli se na jednakost mjere (ovdje površine), a ne na sukladnost.

Kao što je rečeno, pitagorejcima se pripisuje veći dio sadržaja I. knjige EE, što uključuje razne propozicije iz elementarne planimetrije kao što su konstrukcija paralele i okomice

⁷Ako je ovaj dokaz pitagorejski, to znači da su pitagorejci znali i SKS-teorem. Budući da se i on može naći u I. knjizi EE kao EEI4, to je vrlo vjerojatno.

⁸I ovo se nalazi dokazano u EEI, propozicija 41: Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.



Slika 4.2: Tri pravilna popločenja ravnine.

na pravac, bisekcija kuta i dužine, teoremi o sukladnosti trokuta, odnos površine trokuta i paralelograma,⁹ ... Posebno, pitagorejci su znali da je zbroj kutova u svakom trokutu jednak 2 prava kuta,¹⁰ a vjerojatno su dokazali i generalizaciju: Zbroj kutova u svakom četverokutu je četiri prava kuta, u svakom peterokutu je šest pravih kutova i t. d., tj. suvremenim stilom iskazano: Zbroj kutova u svakom n -terokutu je $2n - 4$ prava kuta. Poznat je pitagorejski interes za pravilne mnogokute i pravilne poliedre. Prilično je sigurno da su poznavali svih pet pravilnih poliedara, s tim da se poznavanje prvih četiriju (kocka, pravilni tetraedar, pravilni oktaedar i pravilni ikozaedar) pripisuje već Pitagori, dok se otkriće pravilnog dodekaedra pripisuje Hipasusu iz Metaponta [1]. Pripisuje im se i poznavanje dokaza sljedećeg teorema [1]:

Teorem 6 *Postoje samo tri pravilna popločenja¹¹ ravnine: popločenje jednakostraničnim trokutima, popločenje kvadratima i popločenje pravilnim šesterokutima (slika 4.2).*

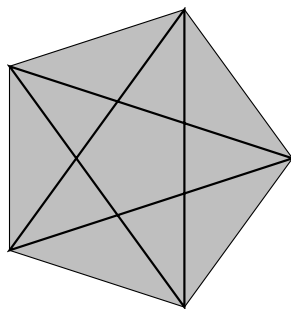
Najstariji sačuvan dokaz gornjeg teorema potječe od Keplera (1619.) [11]: Zbroj kutova u svakom n -terokutu je $2n - 4$ prava kuta, pa je u pravilnom n -terokutu svaki kut jednak $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ pravih kuteva. U svakom vrhu pravilnog popločenja sastaje se isti broj m pravilnih n -terokuta, dakle je $m\alpha$ jednak četiri prava kuta. Slijedi $m = 4 \frac{n}{2n-4} = 2 + \frac{4}{n-2}$. Pritom su m i n prirodni brojevi veći od 1. Ako je $n = 3$ dobije se $m = 6$ (popločavanje jednakostraničnim trokutima), ako je $n = 4$ dobije se $m = 4$ (popločavanje kvadratima), ako je $n = 5$ m nije cijeli, ako je $n = 6$ dobije se $m = 3$ (popločavanje pravilnim šesterokutima). Za $n > 6$ je $\frac{4}{n-2} < 1$, dakle ne može biti cijeli broj. 🐣

Široj matematičkoj i općenito obrazovanoj populaciji je uz Pitagorin poučak vjerojatno najpoznatiji pitagorejski rezultat kojeg danas iskazujemo ovako: $\sqrt{2}$ je iracionalan broj. No, kako smo rekli, za pitagorejce samo prirodni brojevi su brojevi. Razlomci za stare Grke nisu brojevima, nego omjeri dvaju brojeva. Stoga nipošto brojevi koje danas zovemo iracionalnima za njih nisu bili brojevi. Pitagorejci su smatrali da se cijeli svijet može opisati prirodnim brojevima i njihovim odnosima (omjerima). Posebno je to značilo da

⁹EEI41: Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

¹⁰EEI32: U svakom trokutu, ako se jedna strana produlji, vanjski kut jednak je zbroju dvaju unutrašnjih nasuprotnih kutova, a zbroj tri unutrašnja kuta u trokutu je dva prava kuta.

¹¹Popločenje ravnine je prekrivanje ravnine bez rupa i preklapanja kopijama jednog ili više likova ('pločica'). Popločenje je pravilno ako su sve pločice sukladni pravilni mnogokuti koji imaju zajedničke vrhove i ako se u svakom vrhu sastaje isti broj pločica.



Slika 4.3: Pravilni pentagram

im je osnovno uvjerenje bilo da su svake dvije *istovrsne* veličine (dva broja, dvije duljine, dvije površine, dva volumena, ...) **sumjerljive**. Pritom, dvije veličine su sumjerljive ako postoji veličina (zajednička mjera, iste vrste kao polazne dvije veličine) kojom se mogu obje izmjeriti. Dakle, pitagorejska pretpostavka (uvjerenje) o sumjerljivosti znači da su svake dvije istovrsne veličine višekratnici jedne te iste zajedničke mjere („mogu se njome izmjeriti”). Možemo to i ovako iskazati: Postoji jedinica duljine (površine, volumena, vremena, ...) takva da svaka duljina (površina, volumen, vremenski interval, ...) kao mjeru ima racionalan broj.

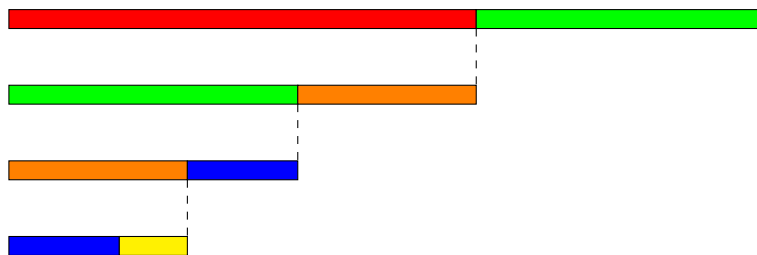
Neki pitagorejci, navodno Hipasus iz Metaponta, je oko 450. g. pr. Kr. dokazao da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva njegovoj stranici. To je naravno ekvivalentno činjenici da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj, ali je konceptualno bitno drugačije. Također, iz već navedenih razloga takav dokaz je zasigurno bio čisto geometrijski, a ne kao današnji algebarsko-simbolički [5, 28, 49]. Druge teorije sugeriraju da je prvi dokaz egzistencije nesumjerljivih veličina bio nesumjerljivost stranice i dijagonale pravilnog peterokuta jer je pravilni pentagram (slika 4.4) bio simbol pitagorejske škole [20]. Omjer duljina dijagonale i stranice pravilnog peterokuta danas je poznat pod nazivom **omjer zlatnog reza**.¹² Pitagorejci su uočili da je taj omjer moguće definirati kao omjer dviju duljina u kojem se dulja prema kraćoj odnosi kao kraća prema njihovoj razlici.

Bilo da je otkriće nesumjerljivih veličina vezano za kvadrat bilo za pravilni peterokut, gotovo sigurno ono je proizašlo iz otkrića **Euklidovog algoritma** [20]. Najkasnije od egipatskog i sumerskog doba bilo je lako usporediti dvije istovrsne veličine (broja, mase, duljine, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge. Primjerice, na sljedećoj slici ilustrirano je kako utvrđujemo da je dulja dužina 5 puta dulja od kraće:

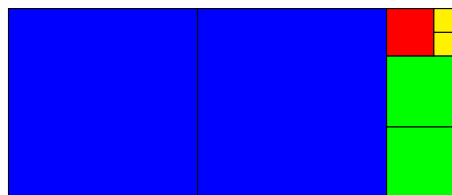


Pitagorejci (a možda već i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom”. Naime, ako veća veličina nije višekratnik prve (veću ne možemo izmjeriti manjom), onda ostatkom mjerimo manju. Ako opet ostane ostatak, onda prvi ostatak mjerimo drugim i t.d., sve dok u nekom trenu ne nađemo zajedničku mjeru dvaju zadnjih ostataka, koja je onda (najveća) zajednička mjera polaznih dviju veličina. Tako je na sljedećoj slici mali žuti kvadratić najveća zajednička mjera za čitav pravokutnik i za plavi kvadrat, odnosno duljina njegove stranice je najveća zajednička mjera za stranice polaznog pravokutnika.

¹²Naziv ‘omjer zlatnog reza’ uveo je tek 1835. godine njemački matematičar Martin Ohm, brat znamenitijeg fizičara Georga Ohma.



Slika 4.4: Nesumjerljivost dijagonale i stranice pravilnog peterokuta.



Temeljna pitagorejska pretpostavka o sumjerljivosti svake dvije istovrsne veličine povlači da za svake dvije istovrsne veličine postupak Euklidovog algoritma staje u konačno mnogo koraka (EEX2). Ako uzmemo dvije dužine (crvenu i zelenu) čije duljine su u omjeru zlatnog reza, imat ćemo niz koraka sa slike 4.4 u Euklidovom algoritmu:¹³ Budući da je u svakom koraku omjer dulje prema kraćoj duljini isti, postupak se nastavlja u beskonačnost — ne postoji zajednička mjera crvene i zelene dužine.

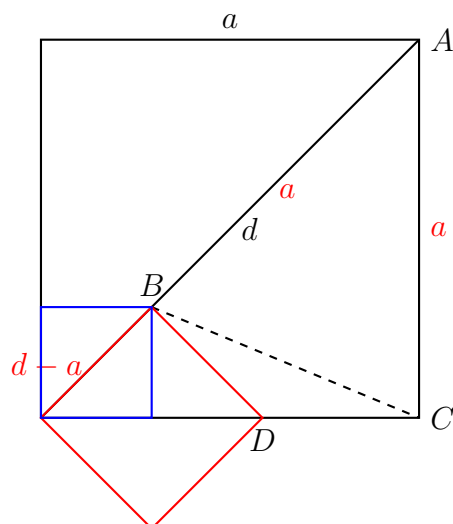
Primijenimo isti način razmišljanja na dokaz nesumjerljivosti dijagonale i stranice kvadrata. Pogledajmo sliku 4.5. Dan je kvadrat (duljinu stranice označili smo s a , a dijagonale s d). Ucrtamo manji kvadrat (crveno) tako da mu stranica leži na dijagonali i da mu je stranica duljine $d - a$. Trokut $\triangle ABC$ je jednakokračan, iz čega (zbog jednakosti kutova s okomitim kracima) slijedi da je i $\triangle DBC$ jednakokračan, tj. $|CD| = d - a$. Stoga je dijagonala crvenog kvadrata duljine $a - (d - a) = 2a - d$. Sad bismo mogli na isti način u crveni kvadrat ucrtati kvadrat kojemu je stranica duljine njegove dijagonale minus njegove stranice, i tako u beskonačnost. Pritom je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Kad bi a i d bile sumjerljive, sa zajedničkom mjerom m , onda bi u svakom koraku a_n i d_n bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od m), što je nemoguće. Zaključujemo da dijagonala i stranica kvadrata ne mogu biti sumjerljive.



Jonsko razdoblje grčke matematike ...

... doba je kad se matematika počela razvijati kao znanost u kojoj se tvrdnje logički dokazuju. Za brojke se koristio antički brojevni sustav. Prema tradiciji, ali nepouzdan, prvi je matematičke (geometrijske) tvrdnje dokazivao Tales iz Mileta u prvoj polovici 6. st. pr. Kr. Prvi koji su sa sigurnošću dokazivali matematičke tvrdnje bili su pitagorejci, pripadnici škole koju je osnovao Pitagora sa Samosa oko 520. g. pr. Kr. Od pitagorejaca nadalje u starogrčkoj matematici pod brojevima se podrazumijevaju isključivo prirodni brojevi. Osim aritmetikom (koja je u pitagorejskom obliku začetak teorije brojeva) pitagorejci su se bavili i geometrijom. Iako su pretpostavljali da su svake dvije istovrsne geometrijske veličine sumjerljive, tj. da im se omjer može izraziti kao omjer prirodnih brojeva, otkrili su da to nije tako (dokazavši, vjerojatno geometrijskom varijantom Euklidovog algoritma, da dijagonale pravilnih četverokuta odnosno peterokuta nisu sumjerljive

¹³Ovo se obično ilustrira tzv. Pitagorinom lutnjom.



Slika 4.5: Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata.

} njihovim stranicama). No, ne možemo reći da su pitagorejci otkrili iracionalne brojeve jer ih oni
 } nikad ne bi prihvatili kao brojeve.

4.2 Atensko razdoblje grčke matematike



Matematički pojmovi u ovom odjeljku

brojka * infinitezimalni račun * limes * niz * konstrukcije ravnalom i šestarom * jednačba * dedukcija * kvadratni i kubni korijeni * omjeri i razmjeri * sinus i kosinus * površina i volumen * krivulja * pravilni poliedri * konike

U prvoj polovici 5. st. pr. Kr. kao centar grčke filozofske i znanstvene djelatnosti pomalo se počinje isticati Atena. Dok se u općoj povijesti ovo razdoblje naziva klasičnim periodom grčke povijesti, u povijesti matematike poznato je i kao atensko razdoblje. Vrhunac (u znanstvenom smislu) atenskog razdoblja predstavlja Platonovo osnivanje Akademije (ca. 387. pr. Kr.). Atensko razdoblje potrajalo je do doba osvajanja Aleksandra Makedonskog, dakle do potkraj 4. st. pr. Kr. U atenskom razdoblju starogrčka matematika u potpunosti je poprimila formu geometrijske algebre, a pojavljuju se i temelji infinitezimalnog načina razmišljanja te matematičke logike.

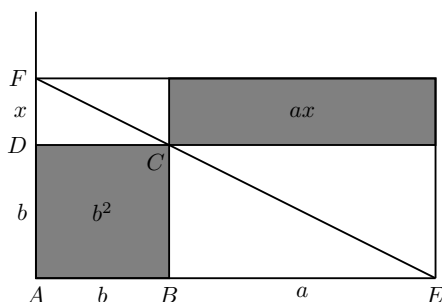
Tijekom atenskog razdoblja atičke brojke postepeno su zamijenjene **alfabetskim (miletskim) brojkama**. Princip tog sustava sličan je brojevnim sustavima koje su koristili Feničani, a kasnije Židovi, Arapi, Hrvati (glagoljske brojke), . . . : Slovima alfabeta, u ovom slučaju grčkog, pridružene su brojevne vrijednosti. Grčki alfabetski sustav je dekadski brojevni sustav sa znamenkama koje odgovaraju brojevima jedan do devet pomnoženim s jedan, deset i sto. Za to je potrebno 27 znamenki, a grčki alfabet ima 24 slova pa su dodatno korištena tri arhaična slova: feničko slovo vau (digama) za 6, kopa za 90 i san (sampi) s vrijednošću 900. Dalje je alfabetski sustav znamenkasto aditivan. Korištenjem crtice (tzv. *hasta*) ispred znamenki za jedinice dobivaju se tisućice, a za desettisućice¹⁴ su se istih tih devet znamenki pisale povrh slova M (veliko μ , od mirijada, tj. deset tisuća). Do kraja atenskog razdoblja znamenke ovog sustava poprimile su formu prikazanu slikom 4.6. Da bi se tekst razlikovao od brojki, alfabetske brojke obično su završavale apostrofom ili bivale natcrtane. Primjerice, $\overline{\rho\iota\alpha}$ ili $\rho\iota\alpha'$ je naš 111 [28, 38, 16].

Začetke **infinitezimalnog računa** susrećemo kod dvaju filozofa atenskog razdoblja. **Zenonu iz Eleje** (ca. 490.–430. pr. Kr.) Aristotel pripisuje četiri paradoksa (dihotomiju, paradoks o Ahilu i kornjači, strijela i stadion) kretanja, u kojima iz beskonačne djeljivosti prostora odnosno vremena Zenon dobiva prividno paradoksalni rezultat nemogućnosti kretanja. Iako sva četiri paradoksa otvaraju pitanje prirode kontinuuma, za povijest matematike su od strijele i stadiona značajnije dihotomija i paradoks o Ahilu i kornjači. *Dihotomija* argumentira nemogućnost kretanja time što se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka i t.d. Prema Zenonu, ma koliko prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja. Sličan je paradoks o *Ahilu i kornjači*: Ahil je puno brži od kornjače, ali dok Ahil dođe do prvotne pozicije kornjače, ona se pomakla, dok Ahil dođe do te pozicije, ona je opet malo odmakla, i t. d. Dakle, prema Zenonu, Ahil neće nikad stići kornjaču. Danas naravno oba paradoksa lako razriješimo koristeći konvergentne redove (u prvom slučaju geometrijski s kvocijentom $\frac{1}{2}$, a u drugom općeniti konvergentni red s pozitivnim članovima) [10]. S druge strane, filozof **Demokrit iz Abdere** (ca. 460.–370. pr. Kr.), poznat po ideji nedjeljivih čestica „atoma“ kao osnovnih jedinica materije, za povijest matematike je zanimljiv po ideji podjele stošca na beskonačno tanke diskove paralelne bazi u svrhu određivanja njegova volumena. Tako je došao do dileme: Ako gledamo jedan takav disk, jesu li njegove osnovice jednake ili ne? Ako jesu, stožac je

¹⁴Vjerojatno tek početkom sljedećeg, helenističkog razdoblja.

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A' α'	B' β'	Γ' γ'	Δ' δ'	E' ϵ'	Φ' φ'	Z' ζ'	H' η'	Θ' θ'
10	I' ι'	K' κ'	Λ' λ'	M' μ'	N' ν'	Ξ' ξ'	O' $\omicron'$	Π' π'	Ψ' ρ'
10^2	P' ρ'	Σ' σ'	T' τ'	Υ' υ'	Φ' φ'	X' χ'	Ψ' ψ'	Ω' ω'	Λ' λ'
10^3	A α	B β	Γ γ	Δ δ	E ϵ	Φ φ	Z ζ	H η	Θ θ
10^4	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$	$\tilde{M}$

Slika 4.6: Znamenke klasičnog grčkog alfabetskog brojevnog sustava.



Slika 4.7: Primjer geometrijske algebre (primjer 15).

valjak, ako nisu, stožac je grbav. Naravno, ni tu dileme, znamo danas, nema, ali očigledno ovo njegovo razmatranje možemo smatrati prethodnikom ideje **integrala** [5].

Kao što smo već rekli, **geometrijska algebra** opisuje starogrčke geometrijske rezultate koje danas opisujemo algebarski.¹⁵ Tu, primjerice, kvadrat nije broj odnosno potencija broja, nego geometrijski lik poistovjećen sa svojom mjerom (površinom). Dva objekta su jednaka ako su jednaki po mjeri (iznosu, duljini, površini odnosno volumenu). Dakle, vrlo bitno je istaknuti: Nisu antički Grci jednadžbe rješavali geometrijski (niti je u njih bilo ideje jednadžbe), nego mi danas mnoge njihove rezultate interpretiramo i dokazujemo algebarski. Tijekom 5. st. pr. Kr. starogrčki matematičari su dodatno počeli zahtijevati da se **geometrijske konstrukcije** kojima se dokazuju tvrdnje smiju provoditi isključivo (neoznačenim) ravnalom i šestarom. Stoga se za jednakost (brojeva, duljina, površina, odnosno volumena) tražilo i više od puke jednakosti mjere: Jednakost se mora moći dokazati u konačno mnogo konstrukcijskih koraka ravnalom i šestarom. Kao razlog tog ograničenja mnogi autori navode da su se kao jedine dvije krivulje prisutne u stvarnome svijetu smatrali pravci i kružnice, koje su smatrane „savršenim” krivuljama jer „svaka dva njihova dijela“ izgledaju podjednako [?].

¹⁵Naziv potječe iz 19. st.

Primjer 15 Zadan je kvadrat $ABCD$ i potrebno je na starogrčki način konstruirati njemu jednak pravokutnik kojemu je zadana jedna stranica. Zadana stranica se postavi kao nastavak $\overline{BE}$ stranice $\overline{AB}$ kao na slici 4.7. Zatim se konstruiraju pravci AD i EC te odredi njihovo sjecište F . Naposljetku se EAF dopuni do pravokutnika (konstruirajući paralele) i produlje dužine $\overline{CD}$ i $\overline{BC}$ do rubova tog pravokutnika. Budući da je $\overline{EF}$ dijagonala tog pravokutnika, ona ga raspolavlja. Također, vidljiva su dva para sukladnih trokuta. Stoga su sive površine jednake, tj. pravokutnik je jednak (po površini) kvadratu. Uočimo li da su svi koraci izvedivi ravnalom i šestarom, zaključujemo da je zadatak korektno riješen. Pritom se stvarno radi o primjeru geometrijske algebre, jer bi opisanu konstrukciju danas bilo prirodnije gledati kao ilustraciju rješavanja linearne jednadžbe $ax = b^2$.

U prethodnom primjeru ste se možda zapitali zašto smo na kraju linearnu jednadžbu zapisali kao $ax = b^2$, a ne kao $ax = b$. Razlog je u **principu homogenosti**, koji je ne samo u duhu antičkih shvaćanja, nego je sve do modernog doba zadržan u pristupima jednadžbama, a i danas je bitan u primjenama: Izjednačavati (te zbrajati i oduzimati) se mogu samo istovrsne veličine (ovdje su to površine kvadratqa i pravokutnika).

Vjerojatno najpoznatija matematička tema koja potječe iz atenskog razdoblja antičke grčke matematike su **tri klasična problema**. Zašto su ta tri problema toliko važna? Danas znamo da oni nisu rješivi (naravno, poštujući uvjet konstrukcije rješenja ravnalom i šestarom), ali su pokušaji rješenja tih problema, posebno u antičko grčko doba, doveli do mnogih novih matematičkih otkrića. Ta su se tri problema vjerojatno pojavila pokušajem generalizacije konstrukcija bisekcije kuta, podjele dužine na proizvoljan broj jednakih dijelova i udvostručenja kvadrata koje su bile dobro poznate matematičarima potkraj jonskog i početkom atenskog razdoblja. Tri klasična problema su:

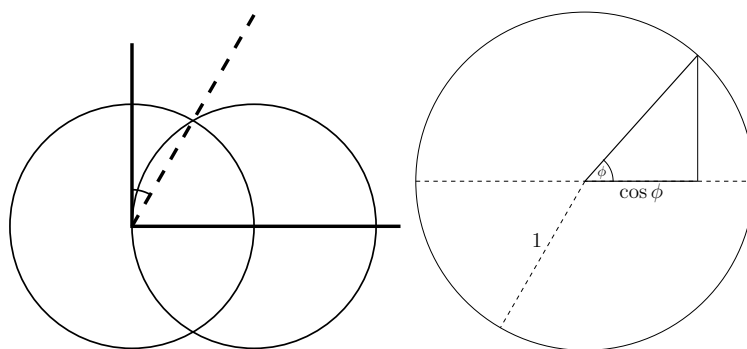
1. **Problem udvostručenja (duplikacije) kocke:** Za danu kocku treba ravnalom i šestarom konstruirati brid kocke dvostrukog volumena.
2. **Problem trisekcije kuta:** Dani kut treba ravnalom i šestarom podijeliti na trećine.
3. **Problem kvadrature kruga:** Ravnalom i šestarom treba konstruirati stranicu kvadrata iste površine kao dani krug.

Problem udvostručenja kocke danas formuliramo ovako: Za zadani $a > 0$ zadatak je ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je

$$x^3 = 2a^3.$$

O njegovoj prvoj pojavi govore dvije poznate legende. Jednu, po kojoj je ovaj problem poznat i kao delijski problem, navodi Teon iz Smirne (ca. 70.–130.) citirajući Eratostena, a to je da su građani Delosa u doba jedne epidemije potražili savjet proročišta u Delfima kako da se riješe jedne epidemije te im je rečeno da konstruiraju dvostruko veći oltar od postojećeg kockastog oltara posvećenog bogu Apolonu. Drugu pak navodi Eutokije Askalonski (ca. 480.–540.) u komentaru Arhimedova teksta *O kugli i valjku*, a to je da je kretske kralj Minos htio udvostručiti grob pjesnika Glaukusa [28, 49].

Za razliku od toga, o problemu trisekcije kuta nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o njegovom nastanku. Bio je manje popularan od druga dva klasična problema, vjerojatno zato što je za neke kutove rješiv ravnalom i šestarom. Kako se on uklapa u našu definiciju geometrijske algebre? Uočimo prvo da ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove, jer se pravi kut može trisektirati ravnalom i šestarom koristeći konstrukciju



Slika 4.8: Pravi kut se može trisektirati ravnalom i šestarom, a konstrukcija kuta ekvivalentna je konstrukciji njegova kosinusa.

jednakostraničnog trokuta (slika 4.8 lijevo). Nadalje, šiljasti kut ϕ (primjerice, trećina zadanog kuta α) može se konstruirati ako i samo ako se može konstruirati $\cos \phi$ (slika 4.8 desno).¹⁶ To se lako vidi iz definicije sinusa i kosinusa u jediničnoj kružnici. Ako je zadan α , iz $\cos(3\phi) = 4\cos^3 \phi - 3\cos \phi$ uz supstitucije $3\phi = \alpha$ i $x = \cos \phi$ vidimo da je problem trisekcije kuta ekvivalentan konstrukciji rješenja kubne jednadžbe

$$4x^3 - 3x = \cos \alpha.$$

Zadatak 6 *Koja jednadžba odgovara trisekciji kuta od 60° ?*

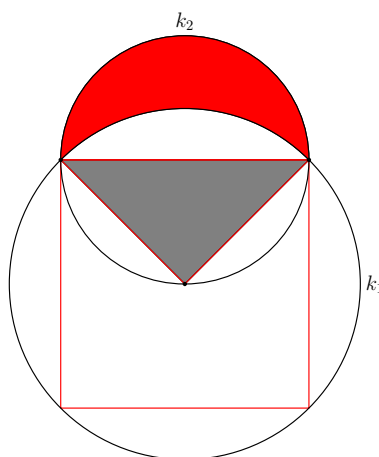
Naposlijetku, problem kvadrature kruga danas interpretiramo ovako: Za zadani $r > 0$ treba ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je

$$x^2 = r^2 \pi.$$

Za ovaj problem postoji konkretno ime uz koje se veže njegova prva pojava. Bio je to navodno **Anaksagora iz Klazomena** (ca. 499.–428. pr. Kr.), Periklov prijatelj koji je završio u zatvoru zbog tvrdnje da Sunce nije bog te se navodno u zatvoru počeo baviti ovim problemom. Prvi važniji pokušaj rješavanja ovog problema pripisuje se sofistu **Antifontu** (ca. 480.–411. pr. Kr.). On je navodno predložio upisivanje pravilnih mnogokuta u krug, počevši od kvadrata, preko osmerokuta redom uz udvostručavanje broja stranica. Smatrao je da će se ostatak do površine kruga iscrpsti kad dođemo do dovoljno velikog broja stranica. Naravno, tu je počinio matematičku grešku, koju danas izražavamo ovako: Ako se svaki član nekog niza može konstruirati ravnalom i šestarom, to ne znači da se i limes tog niza može konstruirati. U svakom slučaju ovaj problem je brzo postao iznimno popularan, na što primjerice ukazuje činjenica da ga Aristofan spominje u komediji *Ptice* (414. pr. Kr.) [5, 28, 49].

Zadatak 7 *Nadite primjer konvergentnog niza takvog da se svaki njegov član može konstruirati ravnalom i šestarom, ali da se njegov limes ne može konstruirati ravnalom i šestarom. Pritom iskoristite činjenicu da se broj može konstruirati ravnalom i šestarom ako i samo ako se može izračunati iz cijelih brojeva koristeći konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i drugih korijena.*

¹⁶Alternativno $\sin \phi$. Oprez: U ovo doba još nije postojala trigonometrija, tako da je ovo moderna analiza problema, a ne starogrčki pristup.



Slika 4.9: Prvi Hipokratov mjesec.

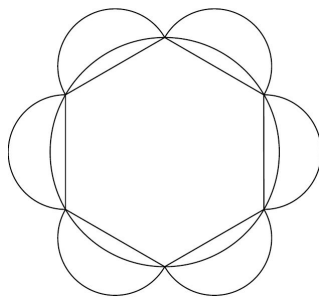
Sa sva tri klasična problema se bavio prvi značajni matematičar atenskog razdoblja bio je **Hipokrat s Hiosa** (ca. 470.–410. pr. Kr.). On je navodno bio trgovac brodovima iz Jonije, ali je izgubio imovinu (jedni navode gusare, drugi nepoštene carinike) te je dvadesetak godina, otprilike 450.–430. pr. Kr., proveo u Ateni čekajući odštetu. Za to je vrijeme učio filozofiju i matematiku, te je postao najznačajniji matematičar u 5. st. pr. Kr.¹⁷ Napisao je danas izgubljeno djelo *Elementi geometrije*, koje je vjerojatno bilo osnova za prve četiri knjige EE. Znao je, a možda i dokazao, da se površine krugova odnose se kao kvadrati nad njihovim polumjerima¹⁸ Hipokratu se pripisuje i uvođenje slova kao oznaka u geometrijskim dijagramima [5, 28, 49].

Hipokrat je prva osoba koja je točno odredila kvadraturu (koristimo ovaj izraz jer se ne radi o računanju površine, nego o tome ekvivalentnoj geometrijskoj konstrukciji) nekog lika obrubljenog krivuljama. Pri pokušaju rješavanja problema kvadrature kruga Hipokrat je naime otkrio da se određeni mjesecoliki likovi omeđeni dvjema kružnicama mogu kvadrirati ravnalom i šestarom. Ti se likovi danas nazivaju **Hipokratovi mjeseci**. Geometrijski gledano, mjesec je lik omeđen lukovima dviju ekscentričnih kružnica različitih polumjera, a ako se mjesec može kvadrirati ravnalom i šestarom, nazivamo ga Hipokratovim. Sam Hipokrat je otkrio, do na sličnost, tri tipa takvih mjeseca, a danas je poznato da ih ima pet.¹⁹ Mi ćemo ovdje opisati samo prvi tip, a za preostale i dokaz da ih ima točno pet upućujemo na ovaj [link](#). Prvi Hipokratov mjesec je mjesec omeđen kružnicom k_1 kojoj je polumjer kateta pravokutnog jednakokračnog trokuta, a središte u vrhu s pravim kutom, te kružnicom k_2 čiji promjer je hipotenuza tog trokuta, tj. kružnicom opisanom tom trokutu (slika 4.9). Kvadrat nad hipotenuzom (promjerom od k_2) je prema Pitagorinom poučku dvostruki kvadrat nad katetom trokuta (polumjerom od k_1). Budući da je polumjer pola promjera, to znači da je kvadrat nad hipotenuzom pola kvadrata nad promjerom kruga omeđenog s k_1 . Budući da se površine krugova odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima, što je, kako smo rekli, Hipokrat znao, slijedi da se površina kruga nad hipotenuzom prema površini kruga omeđenog s k_1 isto odnosi kao 1 : 2, pa se tako odnose i odgovarajući polukrugovi. Stoga polukrug nad hipotenuzom ima jednaku

¹⁷Ne valja ga miješati sa suvremenikom i imenjacom, liječnikom Hipokratom s Kosa.

¹⁸Najstariji sačuvani dokaz nalazimo u EE.

¹⁹Preostala dva su otkrivena u 18. st. (M. J. Wallenius), a u 20. st. je dokazano da nema drugih (N. G. Čebotarev, A. V. Dorodnov).



Slika 4.10: Veza mjesecâ i kvadrature kruga.

površinu kao isječak koji je četvrtina kruga omeđenog s k_1 . Površina mjeseca (crveno na slici 4.9) je očito zbroj površina trokuta i polukruga nad hipotenuzom umanjena za spomenuti isječak u krugu omeđenom s k_1 , pa slijedi da prvi Hipokratov mjesec ima istu površinu kao trokut kojim je određen. Budući da se trokut (kao i svaki drugi uglati lik, što ćemo kasnije i pokazati) može kvadrirati ravnalom i šestarom, opisani mjesec je stvarno Hipokratov mjesec.

Prema više izvora, Hipokrat je bio svijestan da svojim otkrićem mjeseca koji se mogu kvadrirati ravnalom i šestarom nije riješio problem kvadrature kruga. No, neki navode sljedeće krivo zaključivanje kao, možda, njegovo. Pogledajmo pravilni šesterokut s opisanom kružnicom i ucrtanim polukružnicama nad svim njegovim stranicama (slika 4.10). Polumjer kružnice jednako je dug kao stranice pravilnog šesterokuta (tj. promjeri malih polukružnica), pa se površine malih i velikih krugova se odnose 4 : 1. Stoga vrijedi sljedeći „geometrijski račun”: Prvo uočimo da je

$$\text{mjesec} = \text{šesterokut} + 6 \cdot \text{polukružnica} = \text{krug} + 6 \cdot \text{polukružnica}.$$

Stoga je

$$4 \cdot \text{krug} = \text{krug} = \text{šesterokut} + 6 \cdot \text{polukružnica} - 6 \cdot \text{polukružnica} = \text{šesterokut} + 3 \cdot \text{krug} - 6 \cdot \text{polukružnica},$$

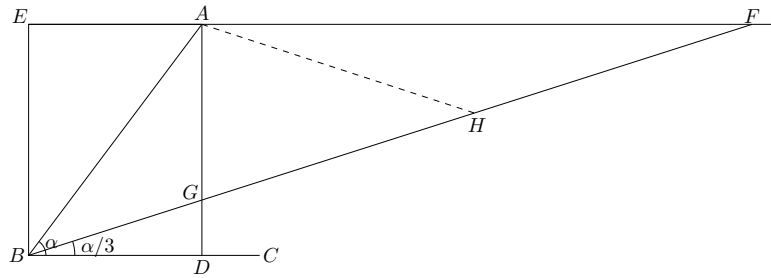
pa je

$$\text{krug} = \text{šesterokut} - 6 \cdot \text{polukružnica}.$$

Dakle, kad bi se mjeseci sa slike 4.10 mogli kvadrirati, mogao bi se kvadrirati i (mali) krug.

Zadatak 8 Osmislite još jedan primjer mjeseca koji nije Hipokratov.

Vezano za trisekciju kuta, Hipokrat je otkrio sljedeću u praksi lako provedivu „mehaničku” trisekciju kuta. Neka je zadan kut $\alpha = \angle ABC$ kojeg treba podijeliti na trećine (slika 4.11). Prvo konstruiramo okomicu iz A na krak BC , neka joj je nožište D . Zatim ADB dopunimo do pravokutnika $ADBE$ i produljimo dužinu $\overline{EA}$ na strani od A . Sljedeći korak nije provediv ravnalom i šestarom, ali u praksi jest izvediv: Na tom produljenju AE nađete se točka F takva da je $|FG| = 2|AB|$, gdje je $G = BF \cap AD$. U tom slučaju je $\angle FBC = \frac{\alpha}{3}$.



Slika 4.11: Hipokratova trisekcija kuta.

Naime, po konstrukciji je $|AB| = |HF| = |HG|$, dakle je $\triangle AFH$ jednakokračan (AH je težišnička u pravokutnom trokutu $\triangle GAF$ pa ga dijeli na dva jednakokračna trokuta) i posljedično $\triangle ABH$ jednakokračni trokut. Stoga je $\angle FAH = \angle AFH = \phi$ te je kao vanjski kut trokuta $\triangle AFH$ kut $\angle AHB = 2\phi$, ali je i $\angle ABF = \angle AHB = 2\phi$. Naposljetku, uočimo da je AB transversala (presječnica) paralelnih pravaca EA i BC . Stoga je $\angle FBC = \angle AFB = \phi$. Dakle, $\alpha = \angle ABC = \angle ABF + \angle FBC = 2\phi + \phi = 3\phi$, dakle je ϕ rješenje problema.

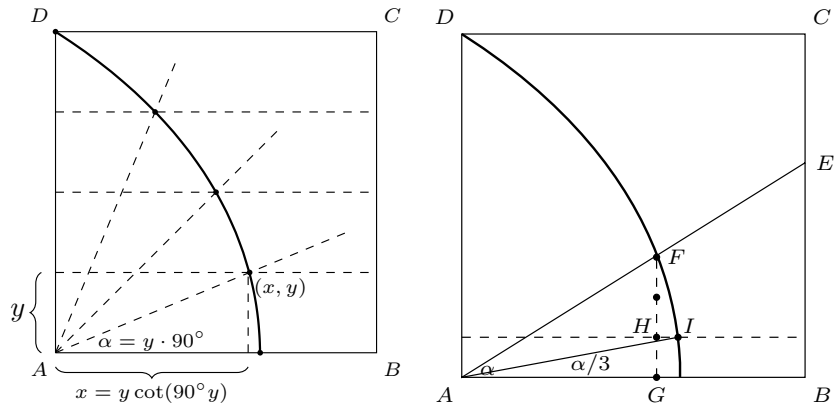
Hipokratov doprinos problemu udvostručenja kocke možda se čini najjednostavnijim od njegovih doprinosa trima klasičnim problemima, no pokazao se najvažnijim. Prvo definirajmo: **Srednje geometrijske proporcionalne** između *istovrsnih* veličina a i b su njima istovrsne veličine x i y takve da je

$$a : x = x : y = y : b.$$

Hipokrat je uočio da se kocka brida a može udvostručiti točno ako se mogu konstruirati srednje geometrijske proporcionalne između a i $2a$. Mi to danas lako algebarski potvrđujemo: Iz $a : x = x : y = y : (2a)$ slijedi $2ax = y^2$ i $ay = x^2$ pa je $x^3 = 2a^3$. Nakon Hipokrata svi pokušaji rješenja ovog problema usmjereni su na određivanje srednjih geometrijskih proporcionala između a i $2a$.

Istaknimo još trojicu grčkih matematičara iz 5. st. pr. Kr. Prvi od njih zapravo nije bio matematičar, nego državnik i filozof sofist **Hipija iz Elide** (ca. 460.–400. pr. Kr.). Za život je zarađivao putujući i držeći predavanja iz poezije, gramatike, povijesti, politike, arheologije, matematike i astronomije. Platon ga je kasnije opisao kao umišljenog i arogantnog čovjeka širokog, ali površnog znanja. Jedini bitni matematički doprinos mu je otkriće krivulje **kvadratiske (trisektrise)**, koja se može iskoristiti i za kvadraturu kruga i trisekciju kuta (zapravo, za podjelu kuta na bilo koji broj jednakih dijelova), ali se sama ne može konstruirati ravnalom i šestarom. Prema Papusu Aleksandrijskom, Hipijina kvadratisa nastaje dinamički. Polazište je kvadrat $\square ABCD$ (slika 4.12 lijevo). Zamislimo da u stranica $\overline{DC}$ pada jednoliko (stalnom brzinom) na stranicu $\overline{AB}$. U istom trenutku kad stranica $\overline{DC}$ počne padati, stranica $\overline{AD}$ počinje jednoliko rotirati oko A do pozicije $\overline{AB}$, u koju stiže u istom trenutku kad i $\overline{DC}$. U tom slučaju se u svakom trenutku pozicije stranica $\overline{DC}$ i $\overline{AD}$ sijeku u po jednoj točki (na slici 4.12 lijevo istaknute su pozicije nakon četvrtine, polovine i tri četvrtine ukupnog vremena gibanja stranica). Dobivene točke čine krivulju kvadratisu (trisektrisu).²⁰

²⁰Ako bismo ju gledali iz moderne perspektive, kao smještenu u Kartezijev koordinatni sustav s ishodištem u točki A i koordinatnim osima na pravcima AB i AD , onda se dio krivulje u prvom kvadrantu sastoji od točaka $(x, y) = (y \operatorname{ctg}(90^\circ y), y)$.



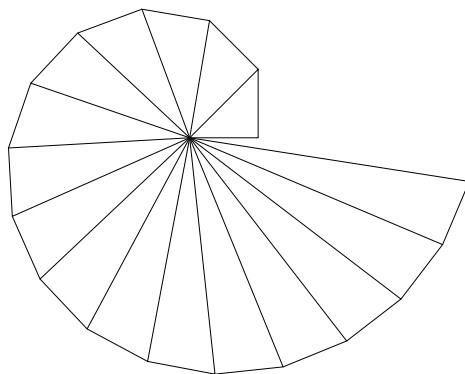
Slika 4.12: Hipijina kvadratisa (trisektrisa).

Opišimo kako iskoristiti kvadratisu, tj. trisektrisu, za trisekciju kuta. Neka je zadan kut α , kojeg unesemo u kvadrat kao $\angle BAE$ (slika 4.12 desno). Neka je F presjek kvadratisa i kraka AE (tu točku ne možemo konstruirati ravnalom i šestarom). Iz F povučemo okomicu na AB , njeno nožište neka je G . Duzinu $\overline{FG}$ podijelimo na tri jednaka dijela, neka je $|FH| : |HG| = 2 : 1$. Kroz točku H povučemo paralelu s AB i odredimo njeno sjecište I s kvadratisom (ni točku I ne možemo konstruirati ravnalom i šestarom). Onda je $\angle IAB = \frac{\alpha}{3}$, što slijedi direktno iz definicije kvadratisa (u istom vremenu padajuća stranica prijeđe trećinu puta kao rotirajuća trećinu kuta).

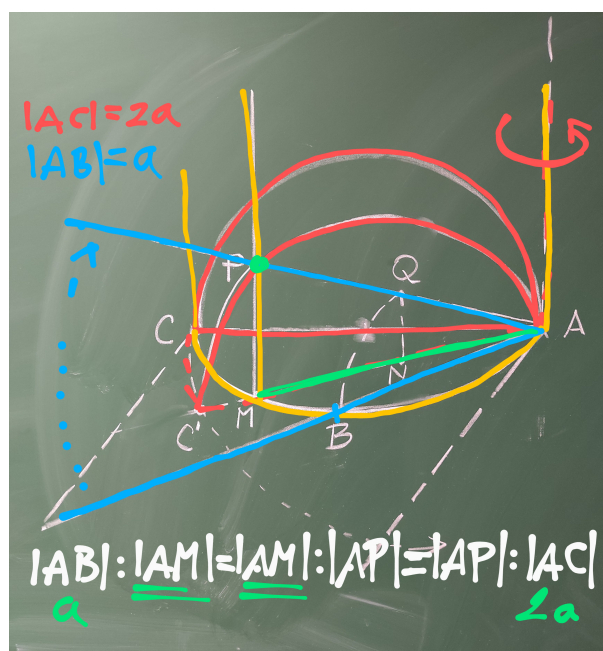
Hipijin suvremenik bio je **Teodor iz Kirene** (ca. 465.–398. pr. Kr.). Poznat je po tome što je bio učitelj Platona i Teeteta. Iz Platonovog dijaloga *Teetet* saznajemo da je Teodor dokazao o „*stranicama kvadrata od tri kvadratne jedinice i od pet kvadratnih jedinica, da one nisu izmjerive jediničnom duljinom. Tako je prošao sve kvadratne korijene pojedinačno do kvadrata od sedamnaest kvadratnih jedinica, na kojem je stao.*” Vidimo dakle da iz moderne perspektive Platon Teodoru pripisuje dokaz iracionalnosti $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ i $\sqrt{17}$. Uočljivo je da ne spominje kvadrat površine dvije kvadratne jedinice — očigledno je nesumjerljivost stranice i dijagonale kvadrata u to doba već bila opće poznata.²¹ Razlog zašto je stao na kvadratu sa 17 kvadratnih jedinica nije poznat, ali jedna od popularnijih teorija je da je u pozadini **Teodorova spirala**. Ona nastaje tako da krenemo jednakokračnog pravokutnog trokuta koji je pola jediničnog kvadrata (dakle, hipotenuza mu je duljine $\sqrt{2}$). Sad se iterativno konstruiraju pravokutni trokuti tako da hipotenuza prethodnog postaje dulja kateta sljedećeg, a kraća kateta im je svima 1 (dakle, hipotenuze su redom duljina $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ...), kao na slici 4.13. Pravokutni trokut hipotenuze duljine $\sqrt{17}$ je u takvoj konstrukciji zadnji koji se još ne preklapa ni s kojim od ranijih.

Spomenuti treba i **Arhitu iz Tarenta** (ca. 428.–350. pr. Kr.). On je bio vođa ostatka pitagorejske škole svog doba, koja je nakon ranijih političkih sukoba smanjena i svedena na zajednicu u gradu Tarentu. Arhita je bio Platonov prijatelj te je utjecao na Platona. Najpoznatiji je po doprinosu problemu udvostručenja kocke na temelju Hipokratove ideje. Arhita je našao srednje geometrijske proporcionalne između a i $2a$ korištenjem presjeka cilindra, konusa i torusa. Budući da u to doba koordinatni sustavi još nisu postojali

²¹Primijetimo da je stranica kvadrata površine dvije kvadratne jedinice isto što i dijagonala kvadrata površine jedne kvadratne jedinice.



Slika 4.13: Teodorova spirala.



Slika 4.14: Arhitina duplikacija kocke.

(uvedeni su tek u 17. st., o tome kasnije), njegova je konstrukcija čisto geometrijska i vrlo impresivna te ćemo ju ukratko opisati.

Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ dužine između kojih želimo naći srednje geometrijske proporcionalne (dakle, duljine su im a i $2a$, slika 4.14). Arhita zamišlja tri plohe opisane na sljedeći način. Prva je polucilindar promjera $\overline{AC}$ (žuto na slici 4.14). Nad $\overline{AC}$ (u ravnini okomitoj na osnovicu cilindra) konstruira se polukružnica, a njenom rotacijom oko izvodnice cilindra koja prolazi kroz A dobije se druga ploha, polutorus (crveno na slici 4.14). Naposljetku, ako je B odabrana na kružnici koja je osnovica cilindra (a tako da je $|AB| = \frac{1}{2}|AC|$) i ako je D presjek tangente na tu kružnicu povučene u C s pravcem AB , rotacijom trokuta $\triangle ACD$ oko pravca AC dobije se konus (plavo na slici 4.14).²² Neka je P točka presjeka tih triju ploha. Ona postoji jer polutorus siječe polucilindar duž neke krivulja

²²Koristeći suvremenu analitičku geometriju, ako je A ishodište Kartezijevog koordinatnog sustava, x -os je pravac AC i z -os okomita na ravninu polukružnice ABC , jednadžbe tih triju ploha su redom $y = \sqrt{2ax - x^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4x^2$. Rješavanjem tog sustava lako se pokaže



Slika 4.15: Pet Platonovih, zapravo Teetetovih, tijela.

onda negdje probada konus. Točka P se nalazi istovremeno na nekoj rotiranoj poziciji crvene polukružnice koja je generirala polutorus (neka je $\overline{AC'}$ odgovarajući promjer i M ortogonalna projekcija P na ravninu osnovice cilindra) i na nekoj rotiranoj poziciji plave izvodnice čijom rotacijom je nastao konus (neka je Q točka na toj izvodnici u kojoj se našla točka B i N njezina ortogonalna projekcija na ravninu osnovice cilindra). Iz te konstrukcije Arhita dalje razmatranjem geometrijskih odnosa izvodi da je

$$|AB| : |AM| = |AM| : |AP| = |AP| : |AC|,$$

tj. $|AM|$ je rješenje problema duplikacije kocke brida $|AB|$.

Spomenuli smo Platonov dijalog *Teetet*. On nosi ime po matematičaru **Teetetu Atenskom** (ca. 415.–369. pr. Kr.) koji je, koliko je poznato, bio prvi koji je konstruirao svih pet pravilnih poliedara (slika 4.15). Danas ih nazivamo i **Platonovim tijelima** jer ih je Platon opisao u dijalogu *Timej*, u kojem ih je povezao s četiri „elementa” (kocka — zemlja, oktaedar — zrak, tetraedar — vatra, ikozaedar — voda) i svemirom (dodekaedar).

Platon je bio centralna figura znanosti atenskog razdoblja. Iako nije, koliko znamo, dokazao nikoji bitan matematički rezultat, on je iznimno značajan za povijest matematike. **Platon** (ca. 427.–347. pr. Kr.) je oko 387. pr. Kr. osnovao znamenitu Akademiju, na čijem je ulazu navodno pisao moto:

Neka nitko tko ne zna geometriju ovamo ne ulazi.

Možda ste taj moto čuli s rječju matematika na mjestu geometrije, no tu se radi o moderniziranom smislu: Kao što ste zasigurno već primijetili, starogrčka matematika je u biti geometrija. Platonova idealistička filozofija bitna je u povijesti matematike i dan danas mnogi matematičari imaju platonistički pogled na matematiku. Platon razlikuje, primjerice, kvadrat (pravi, idejni) i kvadrat (nacrtani, postojeći u realnom svijetu). Platonistički pristup matematici podrazumijeva da matematičke istine postoje neovisno o tome jesmo li ih već otkrili, odnosno platonistički je stav da se matematika ne stvara, nego otkriva. Platon je također (čini se prvi) eksplicitno iskazao da se u geometriji treba koristiti što manje fizičkih pomagala — dozvoljeni su samo šestar i neoznačeno ravnalo.

Stanimo na trenutak u napretku kroz stoljeća i osvrnimo se. Kao što smo vidjeli, prva kultura u kojoj su se matematičke tvrdnje počele dokazivati deduktivno, iz definicija,

da je $|AM| = \sqrt{x^2 + y^2}$, tj. prva koordinata presjecišta P ploha u standardno postavljenom cilindričkom koordinatnom sustavu, rješenje problema udvostručenja kocke brida a .

aksioma i već dokazanih tvrdnji, bila je antička Grčka. Prvi dokazi možda potječu još od Talesa, a zasigurno najkasnije od pitagorejaca. U taj razvoj uključio se Platon, koji je prvi jasno iskazao zahtjev strogih definicija i dokaza u matematici (geometriji) [5, 28, 49].

Platonov učenik (i učitelj Aleksandra Makedonskog) **Aristotel** (384.–322. pr. Kr.), iako ne posebno zainteresiran za matematiku, kroz temelje opće logike postavio je i temelje matematičke logike. Također, Aristotel je pojmu matematika dao moderno značenje. Osvrnimo se na osnovne za matematiku bitne crte Aristotelove logike. Aristotel je razlikovao dvije vrste logičkog zaključivanja: indukciju i dedukciju. Indukcija je zaključivanje s pojedinačnog na opće i Aristotel je uočio da ona bez dodatnih logičkih uvjeta ne mora dati istinit zaključak. S druge strane, za Aristotela je dedukcija (kod njega pod nazivom silogizam) argument kojim se iz određenih *istinitih* premisa (pretpostavki) logičkom nužnošću dobiva istinit zaključak (konkluziju) različit od premisa. Uočimo da je to različito od modernog pojma dedukcije, u kojem nije nužna istinitost premisa (a ima i drugih razlika). Premise i konkluzija u silogizmu su kategorički sudovi: iskazi koji se sastoje od *kvantora* (svaki, nikoji, neki) i *subjekta* S, koji je s *predikatom* P povezan *kopulom*, te eventualno negacije kopule. Aristotel razlikuje četiri tipa kategoričkih sudova: „Svaki S je P” (univerzalno afirmativni), „Nikoji S nije P” (univerzalno negativni), „Neki S su P” (partikularno afirmativni) i „Neki S nisu P” (partikularno negativni). Primijetio je da kategorički sudovi ne moraju imati jednoznačnu istinitosnu vrijednost, već da to ovisi o konkretnom smislu subjekta i predikata. **Tautologija** je kategorički sud koji je uvijek istinit, npr. „Svaki S je S”, a **kontradikcija** je kategorički sud koji nikad nije istinit, npr. „Nikoji S nije S”. **Silogizam** se sastoji od tri kategorička suda (dvije istinite *premise* i jedne *konkluzije*) uz uvjet u ta tri suda među njihovih šest subjekata i predikata imamo ukupno samo tri pojma, raspoređenih u jednu tri logičke figure silogizma:

1. (A B), (B C), (A C);
2. (A C), (B C), (A B);
3. (A B), (A C), (B C).

Primjer 16 Neka je prva premisa „Nikoja *ptica* nema *četiri noge*.” Druga neka je „Nikoja *patka* nema *četiri noge*.” Ta dva suda su tipa (A C) i (B C) te se silogizmom dobiva korektna konkluzija (A B): „Svaka *patka* je *ptica*.”

Spomenimo još i Aristotelove **zakone klasične logike**:

- Svaki S je S (princip identiteta).
- Svaki sud je istinit ili lažan (princip isključenja trećega).
- Nikoji sud ne može istovremeno biti istinit i lažan (princip isključenja proturječja).

Klasična aristotelovska logika je do modernog doba dominirala znanstvenim metodama dokazivanja, a i danas je temelj većine škola logike [5, 49].

Uz Hipokrata najznačajniji matematičar atenskog razdoblja bio je **Eudoks s Knida** (ca. 408.–355. pr. Kr.). Bio je filozof, matematičar, astronom i liječnik. Matematiku je studirao kod Arhite iz Tarenta. Najznačajniji matematički doprinosi su mu utemeljenje opće teoriju omjera i razmjera i metode ekshaustije (koja se temelji na Antifontovim indejama, ali ju je Eudoks precizirao). Obje metode predstavljaju starogrčki način „nošenja s limesima”, tj. spadaju i u prethodnike modernog infinitezimalnog računa.

Eudoksova **teorija omjera i razmjera** opisana je u V. knjizi EE (cijeli njen sadržaj se pripisuje Eudoksu). i bila je posebno važna jer je omogućila uključivanje (bar nekih) iracionalnih veličina u geometrijske analize, odnosno postalo je moguće proširiti argumentaciju i ne neke međusobno nesumjerljive veličine. Primjerice, drugi korijeni $x = \sqrt{ab}$ se mogu analizirati kroz dvostruke omjere, tj. razmjere

$$a : x = x : b,$$

a treći korijeni $x = \sqrt[3]{a^2 b}$ kroz trostruke omjere, tj. razmjere

$$a : x = x : y = y : b.$$

Primjer 17 *Već smo vidjeli da je rješenje problema duplikacije kocke, tj. ono što danas zapisujemo kao $\sqrt[3]{2}$, opisano trostrukim omjerom $1 : x = x : y = y : 2$ kojeg trebaju zadovoljavati srednje geometrijske proporcionalne.*

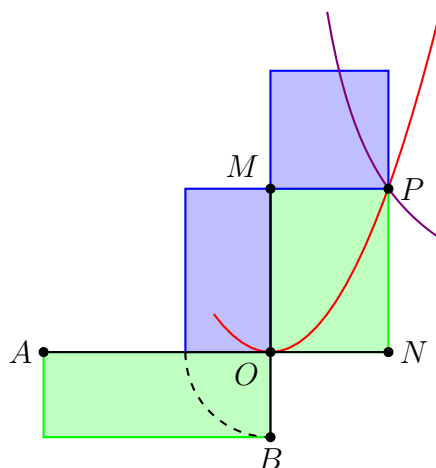
U 3.–6. definiciji u EEV vidimo kako je Eudoks definirao osnovne pojmove svoje teorije: **Omjer** (*lógos*) je odnos među iznosima dviju *istovrsnih* veličina. Za dvije veličine kažemo da imaju omjer ako je višekratnik jedne veći od druge (ovo je u biti ono što danas nazivamo Arhimedovim aksiomom), tj. $a, b > 0$ imaju omjer $a : b$ ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $nb > a$. Za veličine (uočimo da se ne zahtijeva sumjerljivost!) kažemo da su u istom omjeru, prva prema drugoj i treća prema četvrtoj ako kojim god brojem pomnožimo prvu i treću i bilo kojim drugu i četvrtu, prva dva višekratnika podjednako nadilaze, jednaki su ili su manji od druga dva, u odgovarajućem redosljedu.²³ Veličine koje su u istom omjeru zovemo razmjernim (proporcionalnim). Pritom razmjer, tj. jednakost dvaju omjera, naziva *analogía* (logično je da nije koristio izraz *proportio*, zašto?). Propozicije u Eudoksove teorije omjera i razmjera, tj. propozicije u EEV, uključuju rezultate o aritmetici s veličinama, svojstva omjera i manipulacije razmjerima. Dok se prije Eudoksa moglo samo dokazati da neke dvije istovrsne veličine nisu sumjerljive te se eventualno moglo (tako primjerice Teetet analizira tzv. kvadratne iracionalnosti) uspoređivati njihove kvadrate ili kubove, koristeći Eudoksove produljene razmjere postalo je moguće direktno izvođenje zaključaka o veličinama koje bismo danas zvali n -tim korijenima [5, 28, 49].

Eudoksova **metoda ekshaustije** generalizira teoriju omjera i razmjera. Naziv je dobila u 17. st., a temelji se na

Teorem 7 (Eudoksov princip ekshaustije EEX1) *Ako su zadane dvije različite (istovrsne) veličine i od veće oduzmemo više od njene polovine, od ostatka više od njegove polovine itd., onda će, ako se postupak ponovi dovoljan broj puta, ostatak biti manji od manje zadane veličine.*

Suvremenim stilom zapisano: Ako su zadani brojevi $a > \varepsilon > 0$, te ako je niz pozitivnih brojeva (a_n) definiran tako da je $a_0 = a$ i $a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n$, onda postoji n_0 takav da $\varepsilon > a_{n_0}$ (tj. $\lim a_n = 0$). Lako je uočiti da se princip ekshaustije temelji na spomenutoj definiciji kad dvije veličine imaju omjer, tj. Eudoksovoj izvornoj formulaciji kasnijeg Arhimedovog aksioma, koji je naziv dobio po tome što ga je u 3. st. pr. Kr. u svoje pretpostavke na početku djela *O kugli i valjku* uvrstio Arhimed iz Sirakuze. On ga je izrekao ovako: „Kod

²³Tj. $a : b = c : d$ znači da za sve m i n : ako $ma < nb$, onda $mc < nd$; ako $ma = nb$, onda $mc = nd$; ako $ma > nb$, onda $mc > nd$.



Slika 4.16: Prvo Menehmovo rješenje problema duplikacije kocke pomoću konika.

*nejednakih linija, nejednakih ploha, nejednakih tijela*²⁴ *veća nadmašuje manju za veličinu, za koju se kad se one sebi pribraja može postići da nadmaši svaku određenu veličinu od onih koje su usporedive (s njom i međusobno)*". To bi pak danas izgledalo ovako: Za svaka dva realna broja $0 < b < a$ i za svaki $M > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n(a - b) > M$. Ta tvrdnja slijedi iz Eudoksove definicije (dokaz se može naći u sklopu dokaza EEV8), a i sâm Arhimed navodi da su njegovu pretpostavku, koju danas zovemo Arhimedovim aksiomom, koristili i raniji geometri, konkretno Eudoks. Zanimljivo je i da iako je Eudoks autor metode ekshaustije, Arhimed je bio matematičar koji ju se najviše i najpreciznije koristio i pomoću nje dokazao mnoge važne teoreme [5, 9, 28, 49]. O tome više kasnije.

U ovom odjeljku spomenut ćemo još samo jednog matematičara atenskog razdoblja, jer se njemu pripisuje otkriće jednog od standardnih školskih matematičkih sadržaja: konika. Bio je to **Menehmo** (ca. 380.–320. pr. Kr.). Prema Proklu, bio je Platonov prijatelj i Eudoksov učenik. Neki izvori ga navode kao učitelja Aleksandra Velikog, koji je Aleksandru na pitanje postoji li neki prečac za učenje geometrije navodno rekao: „O kralju, za putovanje zemljom postoje kraljevski putevi i putevi za običan puk, ali u geometriji postoji samo jedan put za sve". Menehmo je otkrio **konike**, presjeke stošca ravninama, pokušavajući odrediti srednje geometrijske proporcionalne između dvije duljine, tj. pokušavajući riješiti problem udvostručenja kocke. Tražene proporcionalne uspio je naći u presjecima uspravnih kružnih stožaca s ravninama neparalelnim bazi. Za razliku od danas, kad sva tri tipa konika dobivamo presijecanjem jednog (ne nužno uspravnog) stošca ovisno o kutu ravnine prema osnovici, Menhemo je gledao isključivo normalne presjeke uspravnih stožaca (presjeke ravninama okomitim na jednu izvodnicu stošca) pa je tipove konika dobio ovisno o kutu pri vrhu stošca: parabolu za pravokutni stožac, elipsu za šiljastokutni, a hiperbolu za tupokutni. Menehmo im (vjerojatno) još nije dao nazive, ali mi ćemo koristiti nazive elipsa, parabola i hiperbola, koji su od Menehma mlađi nekih 100–150 godina (ime im je dao Apolonije iz Perge). Menhmo je ponudio dva načina nalaženja srednjih geometrijskih proporcionala, jedno pomoću presjeka parabole i hiperbole, a drugo pomoću presjeka dviju parabola. Oba rješenja su, naravno, opisana geometrijskom algebrom, a mi ćemo detaljno opisati samo prvo (drugo je stilski slično).

²⁴Kako vidimo, Arhimed je u klasičnom stilu geometrijske algebre geometrijske objekte poistovjećivao s njihovom mjerom, tj. ove nejednakosti se odnose na duljinu, površinu odnosno volumen.

Za prvo Menehmovo rješenje uzmimo (vidi sliku 4.16) međusobno okomite dužine $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$, prva neka je dulja od druge. Pretpostavimo da je problem riješen, tj. da su nađene srednje geometrijske proporcionalne između $|OA|$ i $|OB|$ i da su te proporcionalne nanese kao $\overline{OM}$ na pravcu OB i kao $\overline{ON}$ na pravcu OA , dakle vrijedi $|OB| : |ON| = |ON| : |OM| = |OM| : |OA|$ (ako je $|OA| = 2|OB|$, duljinom $|ON|$ je riješen problem duplikacije kocke čiji brid je duljine $|OB|$). Neka je P četvrti vrh pravokutnika $ONPM$. Teorija omjera i razmjera ($a : b = b : c \Leftrightarrow ac = b^2$) povlači da je pravokutnik sa stranicama duljina $|OM|$ i $|OB|$ jednak kvadratu nad $\overline{ON}$, a taj je pak jednak kvadratu (plavo na slici) nad $\overline{PM}$. Iz toga Menehmo temeljem uočenih svojstava presjeka pravokutnog stošca ravninom paralelnoj jednoj izvodnici zaključuje da je P točka parabole (crveno na slici) kojoj je O tjeme, os joj je MB , a $|OB|$ joj je ono što se kasnije stoljećima nazivalo *latus rectum*, tj. duljina tetive parabole okomite na os koja prolazi fokusom.²⁵ Nadalje, iz istog razmjera slijedi i da je $|OA| \cdot |OB| = |OM| \cdot |ON| = |PM| \cdot |PN|$ (jednakost zelenih pravokutnika na slici), pa Menehmo zaključuje da je P ujedno i na hiperboli (ljubičasto na slici) sa središtem u O i asimptotama OM i ON [5].²⁶

Dakle, problem udvostručenja kocke bi se mogao riješiti ako bi se mogle konstruirati (ravnalom i šestarom) parabola (kojoj je *latus rectum* jednak duljini brida kocke koju želimo udvostručiti) te istostrana hiperbola (sa svojstvom da je za svaku njenu točku pravokutnik $ONPM$, tj. moderni xy , jednak dvostrukom kvadratu nad zadanim bridom kocke, jer je kod duplikacije kocke $|OA| = 2|OB|$). U tom slučaju samo bi trebalo odrediti točku P presjeka tih dviju krivulja, projicirati ju na pravac OA da dobijemo točku N i $|ON|$ bi bila tražena duljina brida kocke dvostrukog volumena.



Atensko razdoblje grčke matematike ...

... je doba kad su postavljani temelji matematike kao znanstvene discipline u kojoj se zaključci izvode deduktivno. Pritom je matematika ovog razdoblja čista geometrija, većinom u formi tzv. geometrijske algebre. Geometrijska algebra je moderni naziv za skup starogrčkih geometrijskih rezultata i problema koje je u suvremenoj matematici prirodnije opisivati algebarski. Pritom su se među mnoštvom problema istakla tri klasična problema (kvadratura kruga, duplikacija kocke i trisekcija kuta), koja su kako danas znamo nerješiva, ali čiji pokušaji rješavanja su dali niz novih matematičkih rezultata. Najznačajniji matematičari ovog razdoblja su Hipokrat s Hiosa, koji se bavio sa sva tri klasična problema i sveo problem duplikacije kocke na traženje srednjih geometrijskih proporcionala, te Eudoks s Knida, koji je utemeljio teoriju omjera i razmjera te metodu ekshaustije. Zanimljive i važne prijedloge rješenja za neke od triju klasičnih problema dali su Hipija iz Elide (kvadratura kruga), Arhita iz Tarenta (konstrukcija srednjih geometrijskih proporcionala presjekom konusa, cilindra i torusa) i Menehmo (koji je pokušavajući konstruirati srednje geometrijske proporcionalne otkrio konike). Ostvaren je napredak i na analizi nesumjerljivih veličina (Teodor iz Kirene, Eudoks s Knida), osobito koristeći Eudoksovu teoriju omjera i razmjera. Platon je pak prvi jasno istaknuo važnost preciznih definicija i logičkih dokaza, a vjerojatno je i prvi koji je jasno iskazao zahtjev da konstrukcije budu izvedive šestarom i neoznačenim ravnalom, a Aristotel je pak postavio temelje pravilnog logičkog zaključivanja kroz svoj silogizam (dedukciju) i zakone klasične logike. Također, u ovom su se razdoblju pojavila prva razmatranja infinitezimalnih veličina (Zenon, Demokrit, ali i Eudoks, osobito njegova metoda ekshaustije). U atenskom razdoblju stariji atički brojevni sustav postepeno je zamijenjen alfabetskim.

²⁵Za parabolu koju danas opisujemo jednadžbom $x^2 = 2py$ je $2p$ njezin *latus rectum*. Ako je $|OA| = a$, ovdje se radi o paraboli $x^2 = ay$, tj. *latus rectum* je a .

²⁶To je istostrana hiperbola koju bismo danas opisali jednadžbom $xy = ab$, gdje je $a = |OA|$ i $b = |OB|$.

4.3 Helenističko razdoblje grčke matematike

4.3.1 Klasični helenizam



Matematički pojmovi u ovom odjeljku

definicije i aksiomi * dedukcija * konstrukcije ravnalom i šestarom * planimetrija i stereometrija * pravac * mnogokut * krug i kružnica * ravnina * poliedar * kugla, valjak i stožac * proporcionalnost * sličnost * duljina, površina i volumen * omjeri i razmjeri * prirodni brojevi * teorija brojeva * djeljivost * prosti i složeni brojevi * iracionalni brojevi * geometrijski red

U razdoblju 336.–323. pr. Kr., Aleksandar Veliki (Makedonski) osvojio je velike teritorije. Budući da mu je učitelj bio Aristotel, bio je pod jakim utjecajem grčke kulture, te je na područjima njegova carstva došlo do znatnog utjecaja grčke znanosti i kulture. Nakon njegove smrti carstvo se raspalo na manja carstva njegovih dijadoha, no sva s jakim utjecajem grčke kulture. Aleksandar je 331. pr. Kr. osnovao **Aleksandriju**, grad koji je do kraja antike postao i ostao glavni centar znanosti. Prvo razdoblje od njena osnutka do rimskih osvajanja (obično se uzima do osvajanja Egipta 30. g. pr. Kr.) poznato je kao klasični helenizam, dok nakon toga do pada Zapadnog Rimskog Carstva 476. govorimo o postklasičnom (ili rimskom) helenizmu.

Glavni znanstveni centar cijelog helenizma bila je Aleksandrija. Za to je ključan bio **mouseion** („sjedište muza”), vrsta sveučilišta koje je sadržavalo znamenitu aleksandrijsku knjižnicu, koji je osnovan u Aleksandriji oko 300. g. pr. Kr., a čiji sadržaj je većim dijelom uništen u požaru pri rimskoj opsadi 48. pr. Kr. Prvi značajni matematičar koji je djelovao u *museion*-u bio je **Euklid Aleksandrijski** (ca. 325.–265. pr. Kr.). O njegovom se životu gotovo ništa pouzdano ne zna.²⁷ Iza sebe je ostavio više djela no najznačajnije Euklidovo djelo su njegovi **Elementi** (EE), u originalu *Στοιχεία*, djelo koje je zauvijek promijenilo matematiku.

Euklidov cilj bio je sistematizirati tada poznatu matematiku u 13 knjiga (veličine poglavlja).²⁸ No, iako u EE zapravo ne možemo naći svu matematiku jonskog i atenskog razdoblja (primjerice, nedostaju konike) te iako gotovo sigurno nijedan rezultat u EE nije izvorno Euklidov, ovo djelo je puno važnije zbog originalne kompozicije odnosno stila teksta, kojom je Euklid postavio temelj matematike kao egzaktne znanosti: Teoremi (propozicije) su u [EE] logički poredani tako da svaki slijedi *isključivo* iz već dokazanih, ili pak iz osnovnih tvrdnji i definicija danih na početku, a zaključci se izvode strogo deduktivno. Euklidova ideja bila je izvesti svu matematiku iz malog broja početnih pretpostavki, aksioma i postulata (aksiomi su za Euklida više općematematičke, a postulati čisto geometrijske pretpostavke). U tome je bio toliko uspješan da su sve do 20. st. EE ostali apsolutni uzor matematičkog djela. Što se samog sadržaja tiče, on se pripisuje Euklidovim prethodnicima. Prve četiri knjige pripisuju se jonskom periodu, posebice pitagorejcima, te Hipokratu.. Sadržaj pete i šeste te dvanaeste knjige se pripisuje Eudoksu,. Sedma, osma i deveta knjiga se sadržajno pripisuju pitagorejcima. Jedanaesta knjiga također uglavnom sadrži rezultate iz jonskog perioda, a sadržaji desete i trinaeste knjige pripisuju se Teetetu [1, 5, 28, 49].

Prva knjiga EE, EEI, započinje s 23 definicije te po pet aksioma i postulata. Dodatne definicije nalaze se i na počecima većine ostalih knjiga. Prva Euklidova definicija glasi:

²⁷Neki povjesničari su čak argumentirali da nije postojao, već da su *Elementi* djelo grupe autora. To se ipak smatra nevjerojatnim, jer se radi o iznimno ujednačenom i originalnom djelu.

²⁸U postklasičnom razdoblju dodane su im još dvije knjige, ali bez stvarnog matematičkog značaja.

Točka je ono što nema dijela.

Vidljivo je da Euklidove definicije još nisu precizne definicije u modernom smislu riječi, već su više opisi pojmova s kojima se dalje bavi. Dalje se u te prve 23 definicije definiraju dužine, pravci, razne vrste likova, kutovi, krugovi, te naposljetku u 23. definiciji **paralelni pravci**:

Paralelni pravci su pravci u istoj ravnini koji se, ako ih u oba smjera neograničeno produljimo, nikad ne susreću.

Slijedi pet Euklidovih **postulata**:

1. Od jedne točke k drugoj povući dužinu.
2. Proizvoljno produljiti dužinu.
3. Oko proizvoljne točke nacrtati kružnicu proizvoljnog polumjera.
4. Svi pravi kutovi²⁹ su jednaki.
5. Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj unutrašnjih kuteva s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produljee) na toj strani sijeku.

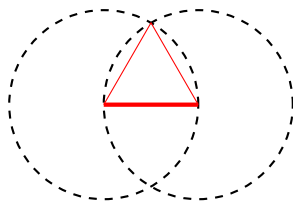
Uočimo da prva tri Euklidova postulata *de facto* definiraju što je dopustivo u konstrukcijama ravnalom i šestarom. Četvrti postulat je temelj mjerenja kutova, jer se kod Euklida svi kutovi opisuju uspoređivanjem s pravim kutem. Peti postulat, poznat kao **postulat o paralelama**, je vidno bitno kompliciraniji od ostalih postulata i aksioma, a uz to se jedini odnosi na neograničeno, potencijalno nedostupno, područje ravnine. To, a uz to i činjenica da se taj postulat koristi tek u dokazu EEI29, već je u Euklidovo doba izazvala pozornost i mnogi su se matematičari od tada pa sve do 19. stoljeća pitali je li taj postulat možda ipak teorem, dokaziv iz definicija i ostalih postulata i aksioma. Tek se u 19. stoljeću, s otkrićem neeuklidskih geometrija (o čemu ćemo kasnije više reći), pokazati da se stvarno radi o postulatu, koji se doduše može zamijeniti raznim ekvivalentnim formulacijama, a zamjena njegovom negacijom dovodi do drugačijih, ali smislenih geometrija. Primijetimo također da ovaj postulat u svojoj izvornoj formulaciji *ne* tvrdi da paralele postoje, odnosno on je ekvivalentan postojanju najviše (a ne točno) jedne paralele s danim pravcem kroz danu točku. Stoga je taj izvorni oblik postulata o paralelama konzistentan ne samo s uobičajenom euklidskom geometrijom, već i sa sfernom, čiji će temelji biti postavljeni u postklasičnom razdoblju helenizma.

Zatim dolazi pet Euklidovih **aksioma**:

1. Dvije stvari koje su jednake³⁰ trećoj su i međusobno jednake.
2. Ako jednakom dodamo jednako, dobit ćemo jednako.
3. Ako jednakom oduzmemo jednako, dobit ćemo jednako.
4. Ono što se podudara je jednako.

²⁹Euklid pravi kut u 10. definiciji definira ovako: Ako pravac upada na drugi pravac čineći susjedne kutove jednaki, svaki od ta dva kuta je pravi.

³⁰Podsjetnik: Misli se na jednakost po mjeri, a ne na sukladnost!



Slika 4.17: Konstrukcija jednakostraničnog trokuta prema EEI1

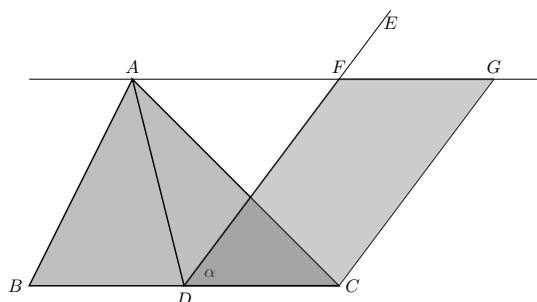
5. Cjelina je veća od dijela.

Pregled sadržaja EE po knjigama je sljedeći (u zagradama su navedeni brojevi definicija plus brojevi propozicija u pojedinoj knjizi):

1. EEI: elementarna planimetrija (23+48);
2. EEII: geometrijska algebra (2+14);
3. EEIII: planimetrija kružnice i kruga (11+37);
4. EEIV: pravilni mnogokuti (7+16);
5. EEV: teorija omjera i razmjera (18+23);
6. EEVI: sličnost i geometrijski omjeri (4+33);
7. EEVII: djeljivost u $\mathbb{N}$ (22+39);
8. EEVIII: proporcije s prirodnim brojevima (0+27),
9. EEIX: parni i neparni, prosti i složeni brojevi (0+36);
10. EEX: kvadratne iracionalnosti (16+115);
11. EEXI: elementarna stereometrija (28+39)
12. EEXII: primjena ekshaustije u geometriji (0+18)
13. EEXIII: pravilni poliedri (0+18)

U nastavku ćemo predstaviti neke odabrane definicije i propozicije iz tih knjiga, no naravno podsjećamo da smo se s nekima već susreli u prethodnom dijelu gradiva. Prva propozicija u EE, EEI1, glasi „Konstrukcija jednakostraničnog trokuta zadane duljine stranice“. U dokazu, Euklid (koristeći 1. aksiom, 1. i 3. postulat i 15. i 20. definiciju) argumentira da konstrukcija sa slike 4.17 stvarno daje jednakostranični trokut. U propozicijama EEI9 i EEI10 Euklid opisuje standardne konstrukcije bisekcije (raspolavljanja) kuta i dužine, u EEI11 i EEI12 opisuje konstrukcije okomice na pravac kroz zadanu točku (na odnosno izvan pravca), a u EEI31 je dana konstrukcija paralele kroz zadanu točku izvan pravca. Prva propozicija koja zahtijeva korištenje postulata o paralelama je, kako smo već spomenuli, EEI29: „Ako pravac siječe dva paralelna pravca, onda on s njima tvori jednake izmjenične kutove, vanjski kut odgovara unutrašnjem s iste strane i dva unutrašnja kuta s iste strane su³¹ jednaka dvama pravim kutovima“. Potkraj EE1

³¹Misli se: zbrojena.



Slika 4.18: Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu (EEI42).

nalazimo propozicije temeljem kojih (u kombinaciji s EEII14) slijedi da se svaki uglati lik u ravnini može kvadrirati ravnalom i šestarom. Pogledajmo te propozicije malo detaljnije.

Propozicija 1 (**EEI42**) *Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu.*

U ovoj propoziciji dokazana je korektnost sljedeće konstrukcije. Neka je zadan $\triangle ABC$ te ravninski kut α (slika 4.18). Odredimo polovište D stranice $\overline{BC}$ trokuta i nanesimo kut α kao kut $\angle CDE$. Kroz A povucimo paralelu s BC , neka ona krak DE siječe u točki F . U C povucimo paralelu s DF , neka ona AF siječe u G . Tada je $CDFG$ paralelogram iste visine kao trokut $\triangle ABC$ i upola kraće osnovice, dakle taj paralelogram je jednak (po površini) danom trokutu. 🐤

Primijetimo da ako je α pravi kut EEI42 omogućuje pretvaranje (ravnalom i šestarom) svakog trokuta u pravokutnik iste površine.

Na tu propoziciju se nadostavlja EEI43, u kojoj se dokazuje jednakost (površina) sivih paralelograma na slici 4.19, ako je HI dijagonala paralelograma $JIGH$. Slijedi:

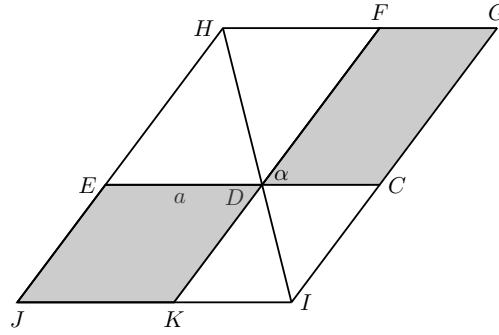
Propozicija 2 (**EEI44**) *Konstrukcija paralelograma jednakog zadanom trokutu ako mu je zadan kut i jedna stranica.*

Odgovarajuća konstrukcija je sljedeća. Prvo se pomoću EEI42 dani trokut pretvori u paralelogram $CDFG$ zadanog kuta. Sve njegove stranice produljimo u pravce (slika 4.19). Nanesimo zadanu duljinu stranice na pravac FG kao $\overline{FH}$. Povucimo pravac HD , neka je njegovo sjecište s pravcem CG točka I . Kroz nju povučemo paralelu s CD , a kroz H paralelu s DF , neka se one sijeku u J . Ako je E presjek CD s HJ , a K presjek DF s IJ , onda je prema EEI43 paralelogram $JKDE$ traženi paralelogram. 🐤

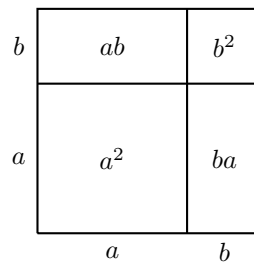
Propozicija 3 (**EEI45**) *Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom mnogokutu.*

Naime, očito se svaki mnogokut može rastaviti na trokute. Prvi od tih trokuta pretvorimo u paralelogram koristeći EEI42, te odaberemo jednu njegovu stranicu kao zadanu duljinu a . Sve ostale trokute pretvaramo u paralelograme s istim kutem kao prvi i jednom stranicom a koristeći EEI44. Sad imamo neki broj paralelograma koji imaju zajednički jedan kut i jednu stranicu, pa se mogu spojiti u jedan veći paralelogram zadanog kuta. 🐤

Uočimo dakle da sad znamo: Svaki mnogokut se može pretvoriti u pravokutnik. Propozicija koja omogućuje kvadraturu nalazi se u sljedećoj knjizi, EEII. **EEII** sadrži više



Slika 4.19: Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu i zadane duljine stranice (EEI44).



Slika 4.20: Kvadrat binoma: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (EEII4).

zanimljivih propozicija. Primjerice, EEII4 je geometrijsko-algebarski ekvivalent moderne formule za kvadrat binoma (slika 4.20), a EEII5 je geometrijsko-algebarski ekvivalent moderne formule za razliku kvadrata (slika 4.21). Kao EEII11 nalazimo konstrukciju dijeljenja dužine u omjeru zlatnog reza (slika 4.22: $|BF|$ je duljina koja duljinu $|AB|$ dijeli u omjeru zlatnog reza).

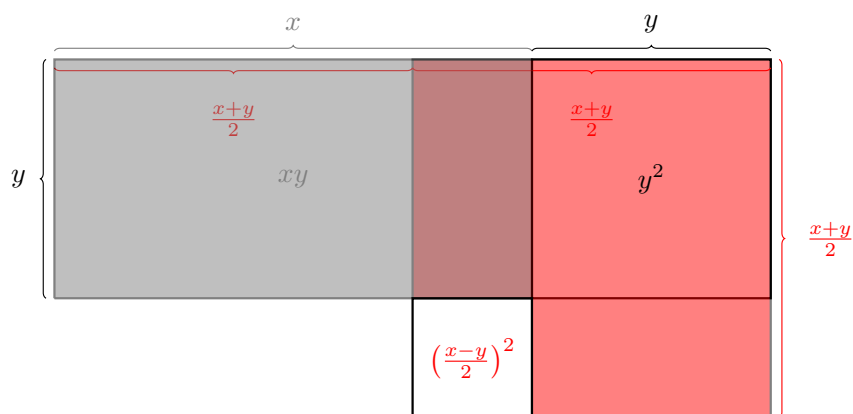
EEII12 i EEII13 u biti iskazuju kosinsov poučak bez (tada još nepoznate) trigonometrije — tamo gdje bismo danas pisali umnožak jedne stranice s kosinusom kuta, Euklid koristi površinu pravokutnika određenog tom stranicom i njenom projekcijom na drugu, tom kutu susjednu stranicu. Naposljetku imamo:

Propozicija 4 (**EEII14**) *Kvadratura proizvoljnog mnogokuta.*

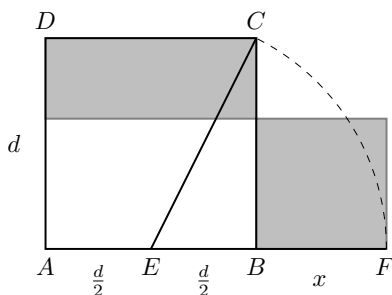
Prvo se kako je opisano u EEI44 mnogokut pretvori u pravokutnik $ABCD$ (slika 4.23). Zatim se konstruira kvadrat jednak tom pravokutniku: Produlji se dulja stranica pravokutnika (DC) na jednu stranu i na to produljenje se šestarom prenese kraća stranica (dakle, $|CB| = |CX|$). Zatim se nacrti polukružnica nad $\overline{DX}$. Produljimo BC do sjecišta F s tom polukružnicom. Tada je $\overline{CF}$ stranica kvadrata jednakog pravokutniku $ABCD$,³² dakle i polaznom mnogokutu. 🐤

Iz **EEIII** ističemo samo dvije propozicije. Prva je EEIII1 u kojoj se konstruira središte zadane kružnice. Euklid polazi od proizvoljne tetive kružnice, konstruira njezinu simetralu koja siječe kružnicu u dvije točke (krajevima jednog promjera) te je središte kružnice polovište tog promjera. Druga zanimljiva propozicija je EEIII17 u kojoj Euklid daje konstrukciju tangenti na danu kružnicu (središta M) iz točke P izvan nje (slika 4.24).

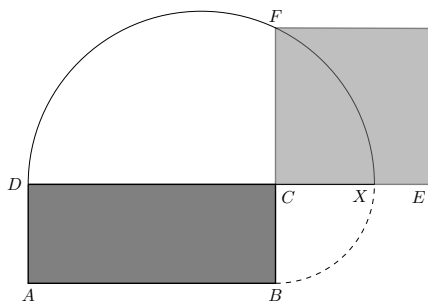
³²To se lako pokaže pomoću EEII5 i Pitagorinog poučka, tj. EEI47.



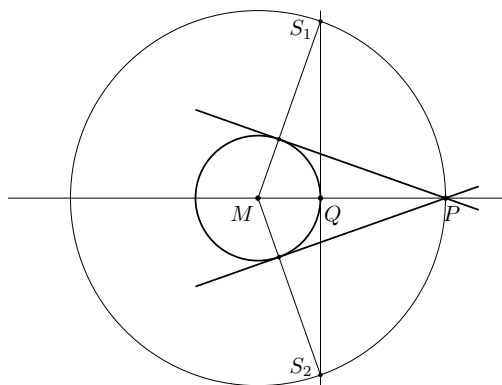
Slika 4.21: Razlika kvadrata: $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ (EEII5).



Slika 4.22: Dijeljenje dužine u omjeru zlatnog reza (EEII11).



Slika 4.23: Kvadratura pravokutnika (EEII14).



Slika 4.24: Konstrukcija tangenti na kružnicu iz točke izvan kružnice (EEIII17).

Prvo se povuče pravac MP , on siječe kružnicu u točki Q . Zatim se nacrtava kružnica središta M i polumjera $|MP|$. U Q se povuče okomica na MP , koja u prethodnom koraku nacrtanu kružnicu siječe u S_1 i S_2 . Te dvije točke spojimo s M , sjecišta tih spojnica s polaznom kružnicom su dirališta traženih tangenti.

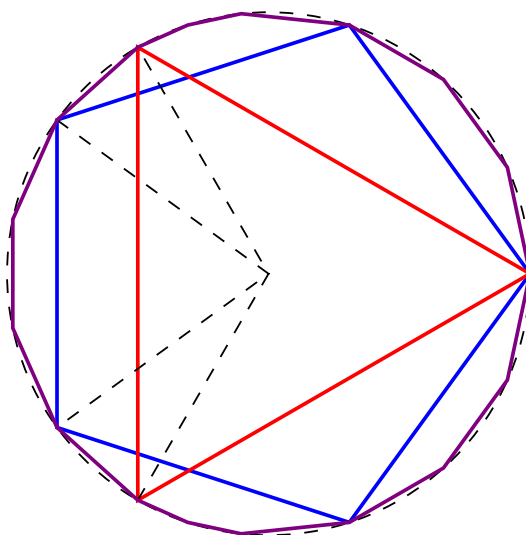
U **EEIV** nalazimo standardne konstrukcije pravilnih mnogokuta, većinom iste kakve i danas znamo.³³ Ovdje se ipak ističe sljedeća propozicija, koja je bila vrhunac u konstrukcijama pravilnih mnogokuta sve do Gaußa, koji je 1796. otkrio konstrukciju pravilnog 17-erokuta.

Propozicija 5 (EEIV16) *Konstrukcija pravilnog 15-erokuta upisanog kružnici.*

Prvo se konstruiraju pravilni trokut i peterokut upisani u kružnicu, ali tako da im je jedan vrh zajednički (crveno i plavo na slici 4.25). Tada je spojnica jednog od druga dva vrha trokuta s njemu najbližim vrhom peterokuta stranica pravilnog 15-erokuta (ljubičasto na slici 4.25). Naime, ako ucrtao odgovarajuće polumjere na obje strane (crtkano na slici 4.25), dobijemo dva jednaka kuta koji su u zbroju očigledno razlika središnjih kutova pravilnog trokuta i peterokuta, tj. zbroj ta dva kuta je razlika trećine i petine četverostrukog pravog (tj. punog) kuta, što je točno $\frac{2}{15}$ punog kuta, dakle je središnji kut koji odgovara opisanoj ljubičastoj stranici točno središnji kut pravilnog 15-erokuta. 🦆

Glavne crte sadržaja **EEV** već smo opisali kod Eudoksa, pa prelazimo na **EEVI**. Ovdje ističemo 1. definiciju: Dva uglasta lika zovemo **sličnima** ako su im odgovarajući unutrašnji kutovi jednaki i odgovarajuće stranice razmjerne. Propozicija EEVI2 je u biti Talesov poučak o proporcionalnosti: Ako se povuče paralela s jednom stranicom trokuta, onda ona stranice trokuta siječe proporcionalno; i, ako su dvije stranice trokuta podijeljene proporcionalno, spojnica točaka podjele je paralelna trećoj stranici trokuta. Ta se propozicija koristi za konstrukciju podjele dužine na bilo koji određeni broj jednakih dijelova (EEVI9) te za konstrukciju dužine duljine x takve da je $a : b = c : x$ (tzv. četvrte proporcionala triju dužina, EEVI12). U EEVI13 je dana konstrukcija srednje proporcionalne dviju dužina, tj. duljine x takve da je $a : x = x : b$ ako su zadane duljine a, b, c (to je u biti konstrukcija iz EEII14). René Descartes je u 17. st. uočio da se navedene propozicije mogu koristiti za množenje, dijeljenje i korjenovanje duljina (tako da rezultat oper bude duljina). Drugim riječima: Nakon Descartesa je poznato da se iz zadanih duljina a i b

³³Euklidova konstrukcija pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu je kompliciranija je od danas uobičajene, koju je osmislio H. W. Richmond, 1893.



Slika 4.25: Konstrukcija pravilnog 15-erokuta (EEIV16).

mogu ravnalom i šestarom konstruirati duljine $a + b$, $a - b$, ab , a/b i $\sqrt{a}$. O tome više kasnije.

Među, vjerojatno pitagorejskim, sadržajima iz teorije brojeva u **EEVII**, **EEVIII**, **EEIX**, ističemo sljedeće. U 11., 12. i 13. definiciji u **EEVII** Euklid definira: **Prost broj** je broj koji se može izmjeriti samo *jedinicom*. Dva broja su **relativno prosta** ako je jedinica jedina njihova zajednička mjera. **Složen broj** je broj koji se može izmjeriti³⁴ drugim brojem. U **EEVII2** opisan je Euklidov algoritam za određivanje najveće zajedničke mjere dva broja. Kao korolar Euklid iskazuje: Ako neki broj mjeri dva broja, onda mjeri i njihov zajednički djelitelj. U **EEVIII** nalazimo razne propozicije o omjerima i razmjerima prirodnih brojeva, a u **EEIX** mnoge klasične propozicije teorije brojeva, primjerice **EEIX14** je parcijalni osnovni teorem aritmetike:³⁵ Najmanji zajednički višekratnik nekih prostih brojeva nije djeljiv ni s kojim drugim prostim brojem osim njih. Posebno je poznat **Euklidov teorem (o prostim brojevima)**

Propozicija 6 (EEIX20) *Prostih brojeva ima više nego u bilo kojem zadanom skupu (nabrojanih) prostih brojeva.*

Euklidov dokaz je u biti isti kao moderni. Ako imamo neke proste brojeve (Euklid ih uzima tri), uzmemo njihov najmanji zajednički višekratnik, dodamo mu 1. Tako smo dobili prost ili složen broj. Ako je prost, očito je veći od svih prostih brojeva od kojih smo krenuli, dakle imamo novi. Ako je složen, onda ima neki djelitelj, ali taj ne može biti nikoji od polaznih prostih brojeva jer bi onda taj morao mjeriti i jedinicu, dakle smo opet našli novi prosti broj. 🐥

Ugrubo rečeno, **EEX** se bavi preoblikovanjem **kvadratnih iracionalnosti**,³⁶ tj. veličina koje bismo danas opisivali kao brojeve oblika $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ s $a, b \in \mathbb{Q}$.³⁷ U ovoj knjizi

³⁴Podsjećamo na već kod pitagorejaca opisan smisao izraza 'izmjeriti', koji danas obično zamjenjujemo s 'podijeliti'.

³⁵U punoj općenitosti taj teorem dokazat će tek 1801. Gauß.

³⁶Podsjećamo da **EEX1** sadrži Eudoksovu lemu o ekshaustiji. Ta se propozicija dalje ne koristi u ovoj knjizi, nego tek u **EEXII**.

³⁷Podsjećamo, korijeni nisu smatrani brojevima. No, x kojeg danas bilježimo kao $\sqrt{a} = \sqrt{1a}$ ekvivalentno je definiran tzv. dvostrukim razmjerom $1 : x = x : a$.

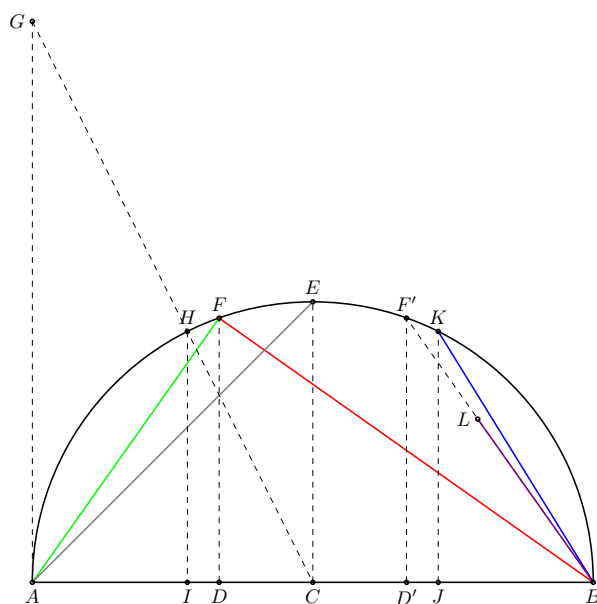
definicije ne nalazimo samo na početku, nego i uz mnoge kasnije propozicije. Sadržaj ove knjige je jako teško izložiti, a o smislu mnogih propozicija i razlozima velikog opsega ove knjiga postoje i razilaženja. Ipak, vrijedi istaknuti definicije vezane za **sumjerljivost** i nesumjerljivost. U prve četiri definicije EEX Euklid definira: Dvije su veličine sumjerljive ako posjeduju zajedničku mjeru, inače su nesumjerljive; dvije duljine su kvadratno sumjerljive ako su kvadrati nad njima sumjerljivi; ako je zadana duljina, sve duljine koje su s njom sumjerljive ili kvadratno sumjerljive zovu se racionalne, a ostale iracionalne; ako je zadan kvadrat, sve njemu sumjerljive površine zovu se racionalne, a ostale iracionalne. Kako vidimo, Euklid je ovdje razlikovao racionalne duljine (to bi bile one čiji omjer prema jediničnoj duljini bismo danas izrazili razlomkom ili drugim korijenom razlomka) i racionalne površine (to bi bile one čiji omjer prema jediničnoj površini bismo danas izrazili razlomkom, dakle tu se pojam racionalnosti podudara s modernim smislom). U EEX2 Euklid karakterizira nesumjerljive veličine (usporedite s dijelom o pitagorejskom otkriću nesumjerljivih veličina): Ako dvije veličine nisu sumjerljive, onda u Euklidovom algoritmu nijedan dobiveni ostatak ne dijeli manju (tj. onu s kojom se u dotičnom koraku dijeli).

U **EEXI** izlažu se temelji stereometrije. Sfera je u 14. definiciji definirana kao rotaciona ploha polukružnice oko njezina promjera. Među propozicijama nalazimo sve standardne temeljne stereometrijske rezultate, primjerice dokazano je da je presjek dvije ravnine pravac, da su dva pravca okomita na istu ravninu paralelni, da su dvije ravnine okomite na isti pravac paralelne, ... Dokazano je i da je svaki prostorni kut sadržan u ravninskim kutovima čiji zbroj je manji od četiri prava kuta, te da se paralelepipedu iste visine (tj. njihovi volumeni) odnose kao njihove osnovice. U **EEXII** se na geometriju primjenjuje metoda ekshaustije. Istaknimo primjerice

Propozicija 7 (EEXII) *Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.*

Već smo spomenuli da je ova propozicija bar sadržajno vjerojatno bila poznata još Hipokratu s Hiosa. Uočimo i da je ona ekvivalentna postojanju konstante proporcionalnosti između površine kruga i površine kvadrata nad njegovim promjerom (a stoga i polumjerom). Ovdje navodimo njen skraćeni dokaz, koristeći modernu notaciju. Neka su K_1 i K_2 krugovi s promjerima d_1 odnosno d_2 . Pretpostavimo suprotno, tj. da kvadrati nad promjerima nisu u omjeru jednakom omjeru krugova (tj. njihovih površina): $P(K_1) : P(K_2) \neq d_1^2 : d_2^2$. Tada je omjer $d_1^2 : d_2^2$ jednak omjeru površine kruga K_1 i neke površine P koja je ili manja ili veća od površine kruga K_2 . Ako je manja, onda je razlika $P(K_2) - P$ neka (pozitivna) površina. Sad Euklid u krug K_2 upisuje redom kvadrat, pravilni osmerokut, pravilni šesnaesterokut i t.d., gledajući razliku površina upisanog lika i kruga (uniju kružnih odsječaka). Koristeći Eudoksovu lemu zaključuje da će nakon dovoljno mnogo koraka ta razlika površina biti manja od $P(K_2) - P$. To znači da je odgovarajući upisani mnogokut površine veće od P . Pravilni mnogokut s istim brojem stranica upisuje u krug K_1 . Tada su ta dva pravilna mnogokuta slična pa im se (prema prethodno dokazanoj propoziciji EEXII1) površine P_1 i P_2 odnose kao kvadrati nad dijagonalama (tj. promjerima krugova). No, $P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2 = P(K_1) : P$, pa je $P(K_1) : P_1 = P : P_2$. Budući da je K_1 veći od u njega upisanog mnogokuta, imamo $P > P_2$ i istovremeno bi moralo biti $P < P_2$, što je nemoguće. Analogno se isključi mogućnost da je $P > P(K_2)$. 

Dalje u EEXII imamo dokazano primjerice da se piramide istih visina odnose kao njihove baze, da se trostrana prizma može podijeliti na tri trostrane piramide istih volumena, da je stožac (po volumenu) trećina valjka iste baze i visine te da se valjci odnosno stošci jednakih baza odnose (po volumenu) kao njihove visine. Posljednja propozicija je **EEXII18**: Kugle se međusobno odnose kao trostruki omjeri njihovih



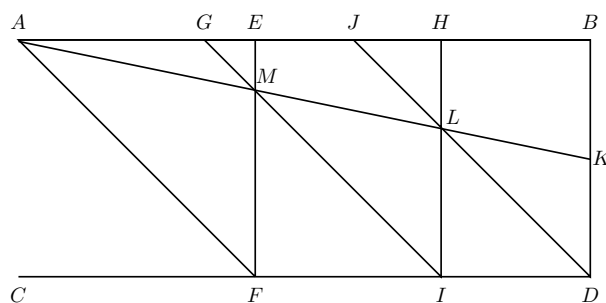
Slika 4.26: Konstrukcija bridova pet pravilnih poliedara upisanih u istu sferu (EEXIII).

dijametara. Dakle, Euklid je dokazao da postoji i proporcionalnost volumena kugle s volumenom kocke čiji brid je jednak promjeru (odnosno polumjeru) kugle. Naime, trostruki omjer od $A : B$ je u EEV definiran kao omjer $A : D$ ako je $A : B = B : C = C : D$ za neki C (usporedite sa srednjim geometrijskim proporcionalama između A i D !). Suvremenom algebrom lako vidimo da je $A : D$ trostruki omjer od $A : B$ ako je $A^2 D = B^3$.

Naposlijetku, **EEXIII** sadrži konstrukcije bridova svih Platonovih tijela upisanih u istu sferu, te dokaz da nema drugih pravilnih poliedara. Ovdje navodimo konstrukciju (pojednostavljenu u odnosu na onu danu u EEXIII) bridova pravilnog³⁸ tetraedra, kocke, pravilnog oktaedra, pravilnog dodekaedra i pravilnog ikozaedra. Neka je dan promjer sfere $\overline{AB}$ (slika 4.26). Ucrtajmo polukružnicu nad tim polumjerom, odredimo središte C te ucrtamo polumjer $\overline{CE}$ okomit na promjer $\overline{AB}$. Tada je $\overline{EA}$, alternativno $\overline{EB}$ (sivo na slici) brid pravilnog oktaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$. Za bridove kocke i pravilnog tetraedra potrebno je $\overline{AB}$ podijeliti na tri jednaka dijela (točkama D i D'). Iz jedne od njih, recimo D , povuče se okomica na $\overline{AB}$ i odredi sjecište F te okomice s polukružnicom. Tada je $\overline{FA}$ (zeleno na slici) brid kocke, a $\overline{FB}$ (crveno na slici) brid pravilnog tetraedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$. Za konstrukciju brida pravilnog ikozaedra potrebno je prvo konstruirati okomicu na $\overline{AB}$ u jednom od krajeva, recimo u A , te na nju nanijeti duljinu promjera da dobijemo točku G . Tu točku spojimo sa središtem C , ta spojnica siječe polukružnicu u točki H . Tada je $\overline{HA}$, odnosno, što je ekvivalentno, $\overline{KB}$ (plavo na slici) uz K osno simetričnu točki H s obzirom na CE , brid pravilnog ikozaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$. Naposljetku, za pravilni dodekadar potrebno je točkom L u omjeru zlatnog reza podijeliti brid kocke ($\overline{F'B}$) te je $\overline{BL}$ (ljubičasto na slici) brid pravilnog dodekaedra upisanog u sferu promjera $\overline{AB}$ [1, 5, 28, 46, 49].

Prvi značajni matematičar nakon Euklida bio je **Eratosten iz Kirene** (ca. 275.–195. pr. Kr.). Osim matematikom i filozofijom, bavio se i poezijom, geografijom, astronomijom i teorijom glazbe. Oko 240. g. pr. Kr. postao je glavni knjižničar u *mouseionu*. Znamenito **Eratostenovo sito** za proste brojeve pripisao mu je neopitagorejac Nikomah iz Geraze

³⁸Naglašavamo 'pravilnog' jer je tetraedar poliedar s četiri strane, oktaedar tijelo s osam strana i t.d.



Slika 4.27: Eratostenov mezolabij

početkom 2. st. A. D. Uz to, Eratostenu se pripisuju dva druga značajna matematička rezultata. Prvi od njih je iz područja matematičke geografije, a radi se o metodi određivanja opsega Zemlje. U to doba je kuglasti oblik Zemlje već bio opće poznat u grčkim znanstvenim krugovima. Eratosten je svoju metodu opisao u jednom danas izgubljenom djelu, koje je citiralo više kasnoantičkih autora. Eratosten je znao da na dan ljetnog solsticija u Syeni (današnji Aswan u Egiptu) Sunčeve zrake upadaju direktno u jedan bunar, dakle okomito na Syenu. Pretpostavio je da zbog velike udaljenosti Sunca od Zemlje možemo uzeti da Sunčeve zrake na Zemlju upadaju međusobno paralelno te je koristeći u zemlju zataknut ššta izmjerio kut pod kojim na isti dan Sunčeve zrake upadaju u Aleksandriju. Njegovo je mjerenje dalo da je taj kut $\frac{1}{50}$ punog kuta. Znajući da je Syene 5000 stadija južno od Aleksandrije, koristeći proporcionalnost središnje kuta u krugu s pripadnim lukom kružnice zaključio je da je

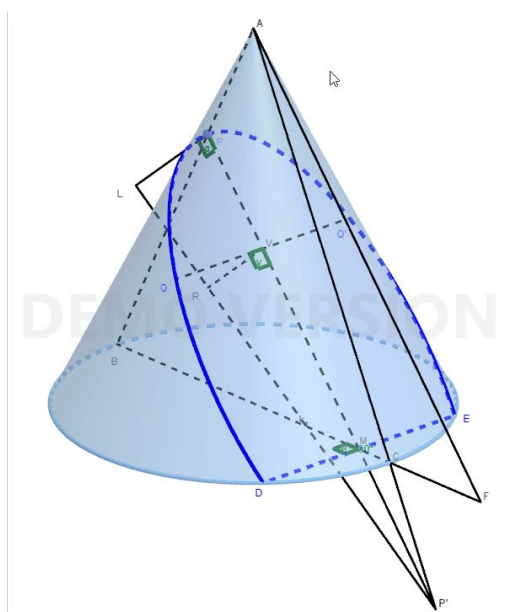
$$5000 \text{ stadij} : \text{opseg} = \frac{1}{50} : 1,$$

tj. da je opseg zemlje 250000 stadija. Koliko je to zapravo točno, danas je teško reći, jer se u Eratostenovo doba koristilo više tipova jedinice duljine stadij, pa ovisno o tome koji stadij uzmemo greška u odnosu na danas poznatu vrijednost prosječnog opsega Zemlje iznosi između 1 % i 16 %. Drugi znameniti matematički doprinos Eratostena bio je njegov mehanizam za određivanje srednjih geometrijskih proporcionala, tj. za rješavanje problema duplikacije kocke. Taj mehanizam, poznat pod imenom mezolabij, pripisan mu je temeljem jednog krivotvorenog Eratostenovog pisma za koje je utvrđeno da ipak neki njegovi dijelovi potječu iz Eratostenovih spisa. Mezolabij se sastojao od dvije paralelne jednako duge prečke AB i CD (slika 4.27) između kojih su postavljena tri sukladna jednakokračna pravokutna trokuta AEF , GHI i JBD . Prva dva mogu slobodno kliziti između prečki, dok je posljednji, JBD , učvršćen. Neka je K polovište $\overline{BD}$. Ako se trokuti dovedu u položaj u kojem su A , presjek M vertikalne katete prvog i hipotenuze drugog trokuta, presjek L vertikalne katete drugog i hipotenuze trećeg trokuta te K na istom pravcu, onda očito vrijedi

$$|DK| : |IL| = |IL| : |FM| = |FM| : (2|DK|)$$

pa je $|IL|$ stranica kocke dvostrukog volumena od kocke brida duljine $|DK|$ [5, 29, 49].

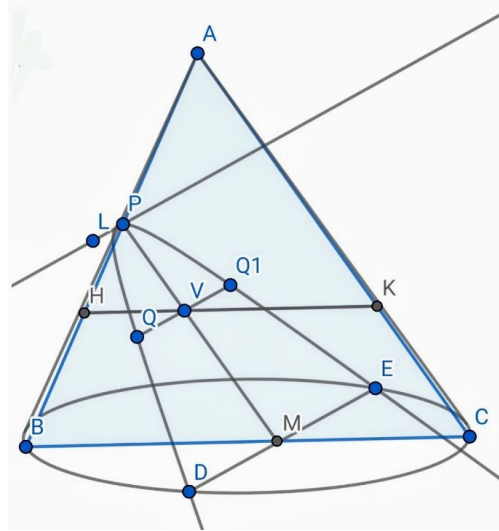
Eratostenov suvremenik bio je znameniti **Apolonije iz Perge** (ca. 262.–190. pr. Kr.). Bio je matematičar i astronom, a poznat je i pod nadimkom „veliki geometar”. Jedno vrijeme je boravio (studirao i predavao) u Aleksandriji. Najvažniji mu je doprinos prva potpuna teorija konika. Podsjetimo se: Konike je prvi razmatrao Menehmo, pokušavajući



Slika 4.28: Apolonijeva karakterizacija konika, osnovni pristup (slika izrađena programom Geogebra)

riješiti problem udvostručenja kocke. Za razliku od Menehma koji je razmatrao samo normalne presjeke uspravnih stožaca, Apolonije je razmatrao presjeke ne samo uspravnih, već i kosih stožaca, i to proizvoljnom ravninom. Apolonije je tako dobio sva tri tipa konika presijecanjem samo jednog stošca, a on im je i dao imena **elipsa**, **parabola** i **hiperbola**. Apolonijevo glavno djelo nosi naslov *Konike*. Sastojalo se od osam knjiga, od kojih su četiri sačuvane na grčkom jeziku, tri u arapskom prijevodu, a zadnja je izgubljena. Apolonije je u tim knjigama starije rezultate (Menehmove, Aristejeve, Euklidove) nadopunio vlastitim. U prvoj se knjizi opisuje generiranje konika i njihova osnovna svojstva, u drugoj osi, tangente i asimptote, u trećoj fokusi, pol i polara, u četvrtoj presjeci dvije konike, u petoj normale i središta zakrivljenosti, u šestoj sličnost konika, u sedmoj svojstva konjugiranih promjera. Sve tvrdnje dokazao je pomoću geometrijske algebre, što mnoge dokaze čini teško razumljivima za suvremenog čitatelja. Naravno, problem je bio u tome što u to doba još nije bilo analitičke geometrije. Ipak, mnogi Apolonijevi dokazi mogu se interpretirati kao korištenje specijalnih kosokutnih koordinatnih sustava (biranih relativno prema konici). Ovdje ćemo opisati samo način na koji je Apolonije razlikovao tri tipa konika, kako je opisao u prvoj knjizi *Konika* [5, 29].

Apolonije kreće od dvostrukog kosog stošca s vrhom A presječenog ravninom koja osnovicu siječe u $\overline{DE}$. Neka je $\overline{BC} \perp \overline{DE}$ promjer osnovice (slika 4.28). Dalje, neka je P probodište izvodnice AB s ravninom i $M = \overline{DE} \cap \overline{BC}$. U nastavku Apolonije izvodi karakteristike triju tipova konika s obzirom na njihov 'promjer' $\overline{PM}$. Za proizvoljnu tetivu konike $\overline{QQ'}$ paralelnu s $\overline{DE}$ Apolonije prvo dokazuje da ju PM raspolavlja (polovište označimo s V). Nadalje, kroz P u ravnini presjeka povlači paralelu s DE i na njoj bira točku L tako da zadovoljava određeni razmjer (ovisan o tome je li PM paralelna s AC ili ne, vidi niže). Nadalje, Apolonije povlači paralelu s BC kroz V (slike 4.29 i 4.30), njena sjecišta sa stočcem neka su H i K . Tada H , Q , K i Q' leže na kružnici paralelnoj osnovici kojoj je $\overline{HK}$ promjer, a $\overline{QQ'}$ tetiva okomita na promjer koja ga siječe u V . Stoga je po



Slika 4.29: Apolonijeva karakterizacija parabole

Talesovom teoremu $\triangle H Q K$ pravokutan i visina na hipotenuzu mu je $\overline{QV}$ pa vrijedi

$$|QV|^2 = |HV| \cdot |VK|. \quad (4.1)$$

Za slučaj parabole (slika 4.29), tj. ako je $PM \parallel AC$, L se bira tako da zadovoljava razmjer

$$|PL| : |PA| = |BC|^2 : (|BA| \cdot |AC|). \quad (4.2)$$

U tom je slučaju $\triangle PHV \sim \triangle ABC$ pa je

$$|HV| : |PV| = |BC| : |AC|. \quad (4.3)$$

Nadalje, pravci PM i AC su paralelni i sijeku krakove kuta $\angle ABC$, pa vrijedi

$$|VK| : |PA| = |BC| : |BA|. \quad (4.4)$$

Sad imamo redom:

$$\begin{aligned} |QV|^2 : (|PV| \cdot |PA|) &= 4.1 = (|HV| \cdot |VK|) : (|PV| \cdot |PA|) = 4.3 \& 4.4 \\ &= |BC|^2 : (|AB| \cdot |AC|) = 4.2 = |PL| : |PA| = (|PL| \cdot |PV|) : (|PA| \cdot |PV|), \end{aligned}$$

dakle za svaku točku Q na paraboli vrijedi

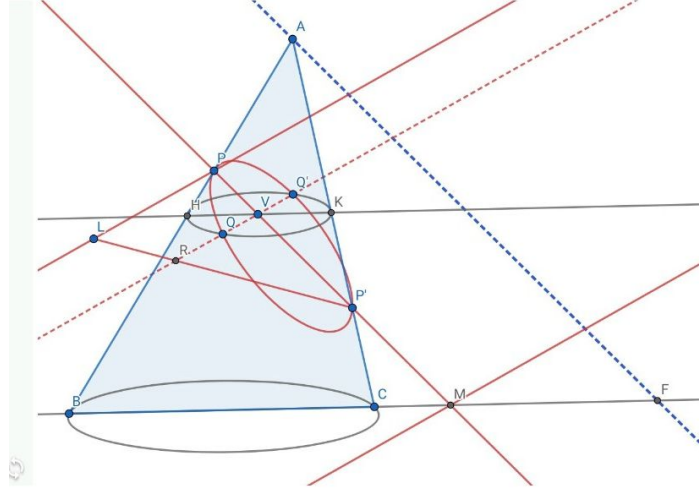
$$|QV|^2 = |PL| \cdot |PV|,$$

odnosno kvadrat nad $\overline{QV}$ jednak je pravokutniku određenom s $\overline{PL}$ i $\overline{PV}$,³⁹ što je uzrok naziva $\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\eta$ (u slobodnom prijevodu 'biti poravnan').

Slučaj elipse i hiperbole dobivamo kad PM nije paralelno s AC , tj. kad PM siječe stožac u još jednoj točki P' (na izvodnici AC , slika 4.30). U tom slučaju se L bira tako da zadovoljava razmjer

$$|PL| : |PP'| = (|BF| \cdot |FC|) : |AF|^2. \quad (4.5)$$

³⁹Uočimo da ako bismo postavili pravokutni Kartezijev sustav s ishodištem u P , y -osi na pravcu PL i x -osi na pravcu PM , onda ova jednakost postaje jednadžba $y^2 = ax$.



Slika 4.30: Apolonijeva karakterizacija elipse i hiperbole

U ovom je slučaju $\triangle PHV \sim \triangle ABF$ pa je

$$|HV| : |PV| = |BF| : |AF|. \quad (4.6)$$

Također, $\triangle P'KV \sim \triangle ACF$ pa vrijedi

$$|VK| : |P'V| = |FC| : |FA|. \quad (4.7)$$

Sad imamo redom:

$$\begin{aligned} |QV|^2 : (|PV| \cdot |P'V|) &= 4.1 = (|HV| \cdot |VK|) : (|PV| \cdot |P'V|) = 4.6 \& 4.7 \\ &= (|BF| \cdot |FC|) : |FA|^2 = 4.2 = |PL| : |PP'| = (\triangle PLP' \sim \triangle VRP') = \\ &= |RV| : |P'V| = (|RV| \cdot |PV|) : (|P'V| \cdot |PV|), \end{aligned}$$

dakle za svaku točku Q na elipsi odnosno hiperboli vrijedi

$$|QV|^2 = |RV| \cdot |PV|,$$

odnosno kvadrat nad $\overline{QV}$ je manji ili veći od pravokutnika određenog s $\overline{PL}$ i $\overline{PV}$. Zbog tog su ove krivulje dobile nazive $\acute{\epsilon}\lambda\lambda\epsilon\iota\psi\iota\varsigma$ (u slobodnom prijevodu 'ono s manjkom') i $\acute{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta\omicron\lambda\acute{\eta}$ (u slobodnom prijevodu 'ono s viškom') [29].

Po Apoloniju nosi ime i znameniti **Apolonijev problem**. Iskazao ga je u danas izgubljenom tekstu *O dodirima*, a glasi: Za dane tri kružnice u ravnini treba konstruirati kružnice koje ih sve tri diraju. Pritom kružnice mogu biti i degenerirane (točke, tj. polumjera 0, ili pravci, tj. polumjera $+\infty$). O Svaka od tri zadane kružnice može biti točka, „prava“ kružnica ili pravac pa dobivamo deset mogućih slučajeva Apolonijevog problema. Najjednostavnija dva imamo kad su sve tri zadane kružnice točke ili kad su sve tri pravci. U prvom od njih rješenje je kružnica kroz tri točke (kružnica opisana trokutu), a u drugom je kružnica koja dira tri pravca (kružnica upisana trokutu). Ta dva slučaja znao je riješiti još Euklid (EEIV4 i EEIV5). Za slučaj triju „pravih“ kružnica rješenja se često nazivaju Apolonijevim kružnicama, no taj naziv ima i druga značenja

(vidi niže). Apolonijevo rješenje pokušao je rekonstruirati krajem 16. st. F. Viète, koristeći konstrukcije ravnalom i šestarom (objavljeno 1600.), a njegov suvremenik i prijatelj A. van Roomen prvi je 1596. predložio novo rješenje u kom je središta rješenja našao presijecajući dvije hiperbole [48].

Kao što smo upravo rekli, pojam **kružnice**, **Apolonijeve** nije jednoznačan. Uz navedeno značenje kao rješenja Apolonijevog problema, pojavljuju se još tri. Jedno se odnosi na Apolonijevu definiciju kružnice: Ako su dane dvije točke A i B u ravnini, onda je geometrijsko mjesto svih točaka T u toj ravnini za koje je omjer $k = |AP| : |BP|$ konstantan kružnica sa središtem na pravcu AB .

Zadatak 9 *Dokažite da je Apolonijeva definicija kružnice ekvivalentna uobičajenoj. Ako je fiksiran iznos k , koliki je polumjer te kružnice?*

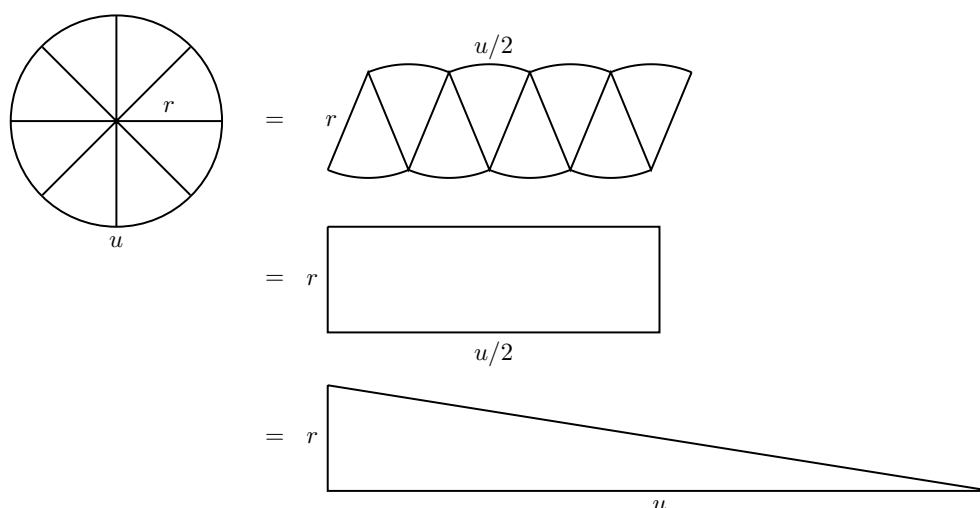
Ako promatramo familiju svih kružnica određenih gornjom definicijom za fiksne A i B , ali različite omjere k , te uz nju drugu familiju svih kružnica koje prolaze kroz A i B , može se dokazati da su te dvije familije međusobno ortogonalne i naziv Apolonijeve kružnice ponekad se odnosi upravo na te dvije familije kružnica. Posljednje, četvrto značenje naziva Apolonijeva kružnica odnosi se na kružnicu koja izvana dodiruje sve tri pripisane kružnice trokuta [5].

Posljednji veliki matematičar klasičnog helenizma, po mišljenju mnogih ujedno i najveći primijenjeni matematičar prije Newtona, bio je **Arhimed iz Sirakuze** (ca. 287.–212. pr. Kr.). Poznate su mnoge anegdote o njemu i vezano za njih navodni citati: „Heureka!”, „Ne dirajte moje krugove!”, „Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu i pomaknut ću Zemlju!”, ... Jedno je vrijeme boravio u Aleksandriji i tamo upoznao Eratostena, s kojim se kasnije nastavio dopisivati. Za vrijeme rimske opsade Sirakuze konstruirao je obrambena sredstva, ali je i ubijen kad su Rimljani zauzeli Sirakuzu. Mnoga Arhimedova djela sačuvana su bilo u grčkom originalu, bilo u arapskom prijevodu: *O mjerenju kruga*, *O kugli i valjku*, *O spiralama*, *O kvadraturi parabole*, *O ravnoteži ravninskih likova*, *O plovećim tijelima*, *O konoidama i sferoidama*, *Metoda mehaničkih teorema*, *Stomahion*, *Pješčanik* te Arhimedov problem goveda.

Jeste li čuli za Arhimedov *Palimpsest*? Radi se o 1906. otkrivenom Arhimedovom tekstu „skrivenom” ispod srednjovjekovnog crkvenog teksta. Tu nalazimo njegov tekst *Metoda mehaničkih teorema*, iz kojeg saznajemo da je Arhimed prvo svoje teoreme naslućivao fizikalno-eksperimentalnim pristupom, a zatim ih matematički (metodom ekshaustije) dokazivao, te *Stomahion*, opis matematičke slagalice slične tangramu kod koje je zadatak složiti kvadrat na različite načine. U *Pješčaniku*, Arhimed je opisao imenovanje velikih prirodnih brojeva, s ciljem da može imenovati broj čestica pijeska u svemiru. Osnovna jedinica mu je mirijada, 10^4 , a brojevi manji od nje su u Arhimedovo doba imali standardne nazive. Brojeve do mirijade mirijada (10^8) Arhimed naziva brojevima prvog reda, a 10^8 je jedinica drugog reda. Mirijada mirijada tih jedinica je jedinica trećeg reda i t.d. Tako je imenovao sve brojeve „prve periode”, tj. brojeve do $(10^8)^{(10^8)}$. Taj je pak broj jedinica druge periode i Arhimed je analogno nastavio imenovati brojeve sve do $((10^8)^{(10^8)})^{(10^8)} = 10^{8 \cdot 10^{64}}$.⁴⁰ Arhimedov problem goveda iskazan je pjesmicom pronađenom u jednom grčkom rukopisu tek 1773., a koja se pripisuje Arhimedu. Traži se broj goveda, koja su raspodijeljena u četiri stada raznih boja: bijela, crna, šarena i žuta. U svakom stadu je mnogo bikova i krava.⁴¹ Bijelih bikova je koliko $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ crnih i žutih

⁴⁰Za usporedbu, danas se broj svih čestica u svemiru procjenjuje u rasponu 10^{78} – 10^{82} .

⁴¹Uočimo korištenje egipatskog zapisa razlomaka.



Slika 4.31: Arhimedov teorem o krugu

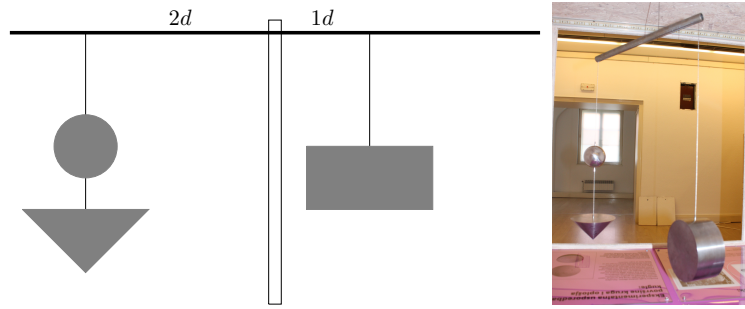
zajedno, crnih bikova je koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ šarenih i žutih zajedno, šarenih bikova je koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ bijelih i žutih zajedno, bijelih krava je koliko $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ cijelog crnog stada, crnih krava je koliko $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ cijelog šarenog stada, šarenih krava je koliko $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ cijelog žutog stada, a žutih krava je koliko $\frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ cijelog bijelog stada. Dodatno se zahtijeva da ukupni broj bijelih i crnih bikova bude kvadratni broj te da je ukupni broj žutih i šarenih bikova trokutni broj. Ovaj se problem svodi na Pellovu jednačbu $x^2 - 4729494y^2 = 1$, s najmanjim rješenjem reda veličine 10^5 [5, 29, 49].

U djelu *O ravnoteži ravninskih likova* Arhimed je iskazao svoj princip poluge: Poluga na čijim krajevima su pozicionirane mase m_1 i m_2 je u ravnoteži ako uporište postavljeno tako da je $m_1 r_1 = m_2 r_2$, gdje je r_i udaljenost mase m_i od uporišta. Koristeći taj princip dokazao je, među ostalim, da je težište paralelograma sjecište njegovih dijagonala i da je težište trokuta sjecište njegovih težišnica [1, 29]. Posebno poznati su Arhimedovi dokazi metodom ekshaustije, koju je on u potpunosti usavršio. Njegovi su dokazi izuzetno precizni, čak i precizniji od ekvivalentnih kasnijih Newtonovih i Leibnizovih. Pritom se Arhimed eksplicitno poziva na Eudoksa, a njegovu definiciju omjera je preoblikovao u lemu koja je postala poznata kao Arhimedov aksiom, kako smo već opisali. Među rezultatima koje je dokazao metodom ekshaustije ističu se Arhimedov teorem o krugu, određivanje volumena kugle, kvadratura Arhimedove spirale i kvadratura segmenta parabole.

Teorem 8 (Arhimedov teorem o krugu, iz *O kružnici i krugu*) *Svaki krug ima istu površinu kao pravokutni trokut čija jedna kateta ima duljinu kao polumjer kruga, a druga kao opseg.*

Uočimo da ovaj teorem povlači da je omjer površine kruga i kvadrata nad njegovim polumjerom jednak omjeru opsega i promjera kruga, tj. da zapravo tek od Arhimeda ima smisla govoriti o broju π kao omjeru vezanom i za opseg i za površinu kruga. Oznaku π u današnjem smislu koristio je prvi 1706. Englez William Jones, a popularizirao ju je od 1736. nadalje L. Euler. Kako je Arhimed naslutio teorem o krugu? Smatra se da je koristio razmišljanje ilustrirano slikom 4.31 [5, 29, 49].

Slijedi modernizirani Arhimedov dokaz teorema o krugu. Slično kao i kod Euklidovog dokaza propozicije EEXII2, dokaz se svodi na „princip isključenja trećeg”: Arhimed prvo



Slika 4.32: Arhimedovo otkriće odnosa volumena kugle, valjka i stošca (desna slika je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.)

dokazuje da površina kruga nije veća od površine navedenog trokuta, pa da nije manja, te preostaje da su jednake. Neka je K oznaka za krug i T oznaka za pravokutni trokut, čija jedna kateta ima duljinu kao polumjer kruga, a druga kao opseg. Pretpostavimo prvo da je $P(K) > P(T)$, dakle $P(K) - P(T) > 0$. U tom slučaju u krug se upisuju pravilni n -terokuti P_n i očito za svaki n imamo da je zbroj površina kružnih odsječaka između n -terokuta i kružnice $\delta_n = P(K) - P(P_n) > 0$. Može se dokazati (to je dio EEX2) da za sve n vrijedi i $\delta_{2n} < \frac{\delta_n}{2}$, dakle se pri udvostručenju broja stranica upisanog mnogokuta površina odsječaka smanjuje više od dva puta. Sad se Arhimed ograničava na n -ove koji su potencije od 2, tj. gleda upisane pravilne 2^k -terokute $P_4, P_8, P_{16}, \dots$. Eudoksova lema o ekshaustiji (EEX1) primijenjena na $P(K) - P(T)$ i δ_{2^k} -ove povlači da za dovoljno velik k imamo $0 < \delta_{2^k} < P(K) - P(T)$ pa je

$$P(P_{2^k}) > P(T).$$

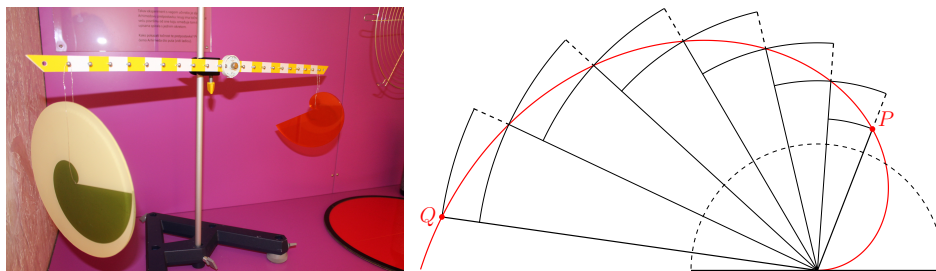
S druge strane, za svaki upisani pravilni n -terokut njegova površina je

$$P(P_n) = n \cdot \frac{|ON| \cdot a_n}{2} < n \cdot \frac{r \cdot |AB|}{2} = \frac{r}{2} o(P_n) < \frac{r}{2} o = P(T),$$

gdje je a_n duljina stranice pravilnog n -terokuta, r i o su polumjer odnosno opseg kruga K , O njegovo središte, a N nožište okomice iz O na jednu stranicu pravilnog n -terokuta. Stoga za sve k vrijedi $P(P_{2^k}) - P(T) < 0$, što je kontradikcija s gore dokazanom nejednakosti.

Dokaz da je i druga nejednakost površina, $P(K) < P(T)$, nemoguća je sličan, s tim da se koriste opisani pravilni n -terokuti i gledaju viškovi Δ_n površina tih opisanih n -terokuta u odnosu na površinu kruga. Dokaz ovog dijela prepuštamo čitatelju, uz napomenu da se u njemu koristi (naravno, dokaziva) tvrdnja $\Delta_{2n} < \frac{\Delta_n}{2}$. 

U svojem djelu *O kugli i valjku* Arhimed je dokazao da je **volumen kugle** jednak $\frac{2}{3}$ volumena valjka istog polumjera i visine (odnosno 4 volumena stošca istog polumjera i visine jednake polumjeru) te da je **oplošje kugle** 4 puta veće od površine kruga istog polumjera, odnosno oplošje kugle $\frac{2}{3}$ je oplošja opisanog joj valjka. Uočimo da su tvrdnje teorema ekvivalentne modernim formulama: Ako s r označimo polumjer kugle, volumen valjka istog polumjera i visine kao kugla je $r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$, pa je $\frac{2}{3}$ od toga točno $\frac{4}{3}r^3\pi$, tj. volumen kugle. Površina kruga istog polumjera kao kugla je $r^2\pi$, a $4r^2\pi$ je naravno odgovarajuće oplošje kugle. Odnos volumena kugle, valjka i stošca Arhimed je otkrio koristeći svoj princip poluge, kako je ilustrirano slikom 4.32, a dokaz obje tvrdnje je proveden metodom ekshaustije.



Slika 4.33: Površina jednog okreta Arhimedove spirale (lijeva slika je snimljena tijekom izložbe *Volim matematiku* u Zagrebu 2015.)

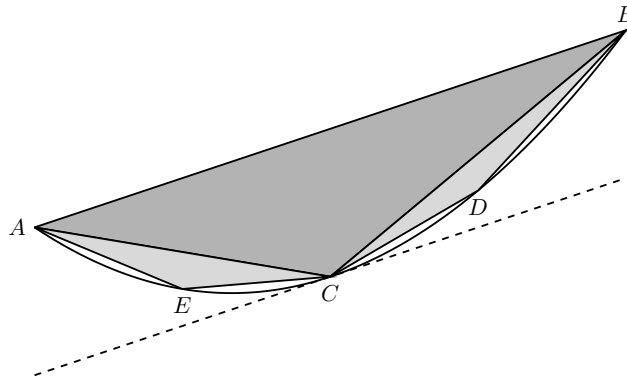
U *O spiralama*, Arhimed je opisao po njemu nazvanu spiralu: **Arhimedova spirala** je putanja točke koja se jednoliko giba po polupravcu koji jednoliko rotira oko polazne točke.⁴² Arhimed je dokazao karakterizaciju tangente u proizvoljnoj točki Arhimedove spirale, koja omogućuje konstrukciju iste te je nakon kružnice (EE) i konika (Apolonije) ovo bila prva krivulja za koju je bilo poznato kako konstruirati tangentu na nju.⁴³ Pokusom vjerojatno sličnim onome prikazanom na slici 4.33 lijevo, Arhimed je uočio da vrijedi: Isječak Arhimedove spirale između dva radij-vektora jednak je razlici kubova njihovih duljina podijeljenoj sa $6a$. Posebno, površina jednog okreta Arhimedove spirale je trećina površine opisanog kruga. Dokaz je proveo metodom ekshauštije, dijeleći isječak spirale na isječke s jednakim središnjim kutovima (slika 4.33 desno). Primijetio je da tako dobiveni r -ovi čine aritmetički niz. Zatim je gledao tim isječcima upisane i opisane kružne isječke i dobio figuru manje i figuru veće površine. Naposljetku se pozvao na Eudoksovu lemu, mi bismo rekli izračunao je limes, i tako dokazao tvrdnju [5, 29].

Među Arhimedovim rezultatima dokazanim metodom ekshauštije ističemo još njegovu kvadraturu segmenta parabole, koja je za razliku od kvadrature segmenta (odsječka) kruga provediva ravnalom i šestarom. Arhimed je dokazao da je površina segmenta parabole jednaka $\frac{4}{3}$ površine trokuta kojemu je jedna stranica tetiva tog segmenta, a treći vrh je točka parabole u kojoj je tangenta paralelna s tom tetivom (trokut $\triangle ABC$ na slici 4.34) [9]. Uklanjanjem trokuta $\triangle ABC$ dobiju se dva nova odsječka u koje se analogno mogu upisati trokuti $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$ i tako u beskonačnost. Arhimed je dokazao da je $T = P(\triangle ABC)$ točno 4 puta veća od zbroja površina $\triangle ACE$ i $\triangle BCD$. Stoga se u svakom koraku uklanjanjem trokuta površina ostatka segmenta smanjuje točno 4 puta, što je naravno više od 2 puta. Eudoksova lema sad povlači da će ostatak površine segmenta nakon uklanjanja dovoljno mnogo trokuta na opisani način postati po volji mali, odnosno da će zbroj površina svih uklonjenih trokuta nakon dovoljno broja koraka po volji dobro aproksimirati površinu segmenta, dakle je površina segmenta zbroj svih beskonačno mnogo takvih površina. No, prema EEIX35⁴⁴ je $T + \frac{1}{4}T + \frac{1}{16}T + \dots + \frac{1}{4^n}T = T \cdot \frac{\frac{1}{4^{n+1}} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{4}{3}T \cdot \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$. Opet po Eudoksovoj lemi, $\frac{1}{4^{n+1}}$ postaje proizvoljno mali s porastom n , dakle je površina

⁴²To je ekvivalentno modernoj jednadžbi u polarnim koordinatama: $r = a\varphi$. Polarne koordinate su uvedene su tek krajem 17. st. (I. Newton, Jacob Bernoulli).

⁴³Za zadanu Arhimedovu spiralu s ishodištem O , neka je P točka na spirali i T sjecište tangente na spiralu u P s okomicom na OP koja prolazi kroz O . Dužina $\overline{OT}$ zove se suptangenta. Omjer njene duljine s i razmaka $r = |OP|$ je za svaku P jednak $r : a$.

⁴⁴Ako se bilo koji broj brojeva nalazi u produljenoj proporciji, onda se razlika drugog i prvog broja prema prvom odnosi kao razlika zadnjeg i prvog prema zbroju svih osim zadnjeg. Suvremenije rečeno: Ako $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ čine geometrijski niz, onda je $(a_2 - a_1) : a_1 = (a_{n+1} - a_1) : (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.



Slika 4.34: Arhimedova kvadratura segmenta parabole

segmenta parabole $\frac{4}{3}T$. Kako vidimo, Arhimed je ovdje u biti dokazao je ono što danas zapisujemo kao konvergentan geometrijski red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}.$$

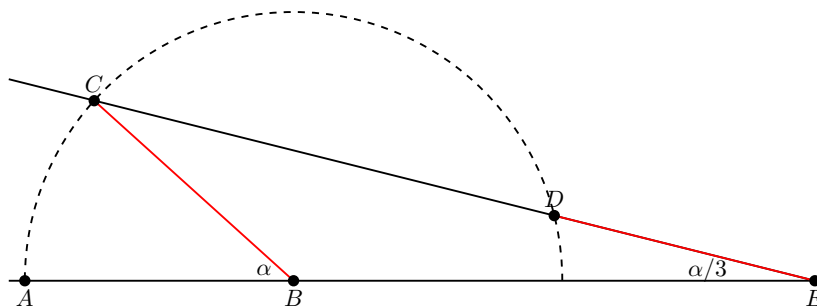
Od ostalih Arhimedovih rezultata istaknut ćemo još tri. Prvi je posebno poznat. Naime, Arhimed je iterativnom metodom⁴⁵ pokazao da je opseg kruga je u odnosu na trostruki promjer istog kruga veći za dio koji je manji od $\frac{1}{7}$ i veći od $\frac{10}{71}$ promjera. Drugim riječima, dokazao je ono što danas zapisujemo kao

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7},$$

tj. mogli bismo reći da je dobio aproksimaciju broja π točnu na točnu na dvije decimale (3.14). Arhimed je čak znao da bi nastavkom svoje metode mogao dobiti i točniju procjenu. Njegova je metoda sljedeća (do doba otkrića računa s redovima, tj. do 17. st., sve procjene iznosa π su se temeljile na Arhimedovoj metodi) [6, 7]:

1. Krugu upišemo i opišemo pravilni šesterokut ($n = 0$).
2. Neka je o_n opseg upisanog, a O_n opseg opisanog $6 \cdot 2^n$ -erokuta (u svakom koraku se udvostručuje broj stranica).
3. Dakle, ako bi polumjer kruga bio 1, početne su vrijednosti $o_0 = 6$, $O_0 = 4\sqrt{3}$.
4. Za opseg o kruga i za svaki n vrijedi: $o_0 < o_1 < \dots < o_n < \dots < o < \dots < O_n < \dots < O_1 < O_0$.
5. Arhimed je otkrio rekursivnu vezu među opsezima u dva uzastopna koraka: Svaki sljedeći opseg opisanog mnogokuta je harmonijska sredina opsega upisanog i opisanog mnogokuta iz prethodnog koraka, $O_{n+1} = \frac{2O_n o_n}{O_n + o_n}$. Također, svaki sljedeći opseg upisanog mnogokuta je geometrijska sredina opsega opisanog mnogokuta iz istog koraka i opsega prethodnog upisanog mnogokuta, $o_{n+1} = \sqrt{o_n O_{n+1}}$.
6. Arhimed je u $n = 4$ koraka došao do opsega upisanog i opisanog 96-erokuta (o_4 i O_4) i tako dobio navedenu procjenu.

⁴⁵Ovo nije dokaz metodom ekshaustije!



Slika 4.35: Arhimedova trisekcija kuta

Zasigurno ste čuli i za **Arhimedova tijela**, tj. polupravilne poliedre. Njih je Arhimedu pripisao Pappus. Pappus je naveo da je Arhimed napisao tekst u kojem je opisao svih 13 tipova tih polupravilnih tijela. Taj tekst nije sačuvan i Arhimedova su tijela kasnije zaboravljena, sve do renesanse kad ih je ponovno otkrio Kepler, nabrojao ih i primijetio da definiciju također zadovoljavaju i pravilne prizme i antiprizme.

Naposlijetku, geometrijski zanimljiva je i Arhimedova „mehanička” trisekcija kuta. Kao i Hipokratova, ova metoda je doduše egzaktna, ali zahtijeva ravnalo s jednom oznakom duljine na njemu. Neka je zadan kut $\alpha = \angle ABC$ (slika 4.35). Produlji se dužina $\overline{AB}$ i nacrtaj polukružnica proizvoljnog polumjera oko B . Na ravnalu se označi njen polumjer kao $\overline{DE}$. Nađi se pozicija ravnala u kojoj E leži na pravcu AB , D leži na polukružnici, tako da pritom pravac (ravnalo) DE prolazi kroz C . Tada je $\angle AED = \alpha/3$.

Zadatak 10 Dokažite točnost Arhimedove trisekcije kuta.



Helenističko razdoblje grčke matematike ...

... U klasičnom helenizmu starogrčka matematika je postigla svoj vrhunac. Glavni znanstveni centar helenizma bila je Aleksandrija. Stariji pristupi i rezultati kulminirali su oko 300. g. pr. Kr. u Euklidovim Elementima, djelu za koje se uzima da je matematiku pretvorilo u egzaktnu znanost u kojoj se tvrdnje izvode deduktivno iz definicija i aksioma. Među Euklidovih pet aksioma i postulata ističe se peti postulat o paralelama, za koji se već u Euklidovo doba i još dugo kroz povijest postavilo pitanje je li to možda ipak teorem dokaziv iz ostalih definicija, postulata i aksioma. U 13 knjiga (poglavlja) Elemenata, sadržaj kojih se uglavnom pripisuje ranijim autorima, nalazimo standardne „školske” propozicije i konstrukcije iz planimetrije i stereometrije, ali i rezultate iz teorije brojeva (primjerice Euklidov teorem o prostim brojevima i Euklidov algoritam) te razne propozicije geometrijske algebre, uključivo dokaza da se svaki mnogokut može kvadrirati ravnalom i šestarom. Uz Euklida, glavni matematičari klasičnog helenizma bili su Eratosten iz Kirene (poznat po svom situ, određivanju opsega Zemlje i mezolabiju), Apolonije iz Perge (autor prve potpune teorije konika) i Arhimed iz Sirakuze. Vrhunac starogrčke matematike predstavljaju rezultati Arhimeda iz Sirakuze u 3. st. pr. Kr. Posebno su poznati njegovi rezultati koje je nashučivao eksperimentalno, a zatim egzaktno dokazao metodom ekshaustije — teorem o krugu, određivanje volumena kugle, kvadratura parabole i Arhimedove spirale. Uz to je iterativnim postupkom dobio procjenu od (najviše) $22/7$ za omjer opsega i promjera kruga, opisao i u dokazima vezanim za određivanje težišta raznih figura koristio princip poluge, osmislio rani način imenovanja velikih brojeva, ...

4.3.2 Postklasični helenizam



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

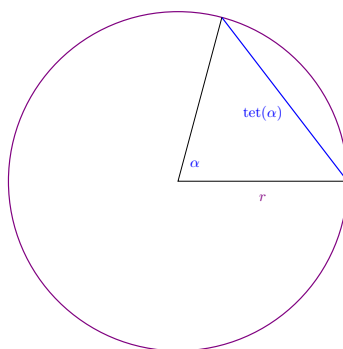
* trigonometrija * kutovi * sinus * tetive u kružnicama * sferna geometrija * razlomak * seksagezimalni brojevni sustav *

Poslije pada Sirakuze (212. pr. Kr.), Rimljani su nastavili s osvajanjem grčkih teritorija. Tako su do 146. pr. Kr. osvojili gotovo cijelo grčko kopno i pri tom mnogo toga uništili. Ostatak antike, od otprilike 150.–50. pr. Kr. pa do pada Zapadnog Rimskog Carstva 476. A. D. naziva se **postklasičnim helenizmom**. Godine 31. pr. Kr. Rimljani su zauzeli Aleksandriju i pritom je u požaru uništen velik dio biblioteke u *mouseion*-u. Tijekom postklasičnog helenizma znanstveni rad je u odnosu na prethodna razdoblja bitno reduciran, među ostalim i jer više praktično orijentirani Rimljani nisu baš cijenili znanost. Novi matematički rezultati u ovom periodu bili su uglavnom rješenja pojedinačnih problema ili upotpunjavanje djela ranijih matematičara. Jedina značajna iznimka je matematička astronomija, za potrebe koje se u ovom razdoblju razvila trigonometrija i sferna geometrija.

Trigonometrija kao geometrijska poddisciplina u kojoj se kutovi proučavaju kroz za njih vezane omjere duljina (iz čega su se s vremenom razvile suvremene trigonometrijske funkcije) svoje korijene vuče još iz babilonskog doba (primjerice, tablica pitagorejskih trojki na tablici Plimpton 322 može se interpretirati kao rana trigonometrijska tablica), a i klasičnog helenizma, kad su primjerice pri promatranju sjena štapova uočeni određeni karakteristični omjeri. No, u pravom smislu ona je zasnovana tek u 2. st. pr. Kr., kad su za potrebe astronomije prvi puta tabelirani kutovi s jednom vrstom za njih karakterističnih duljina unutar danog kruga. No, to nisu bile tablice sinusa ni kosinusa ni tangensa kutova u jediničnoj kružnici, kako bi to mogao pomisliti suvremeni čitatelj. Ocem trigonometrija smatra se astronom i matematičar Hiparh iz Niceje (danas Iznik u Turskoj), no prije njegovog doprinosa potrebno je kao neposrednog prethodnika spomenuti jednog od znanstvenika iz klasičnog helenizma. **Aristarh sa Samosa** (ca. 310.–230. pr. Kr.) je bio matematičar i astronom. Prvi je, u danas izgubljenom djelu, predložio heliocentrički model svemira, što u *Pješčaniku* spominje Arhimed. U povijesti matematike ističe se usporedbom udaljenosti Zemlje do Sunca i do Mjeseca te usporedbom veličina Zemlje i Mjeseca. U svojim je (matematički korektnim, ali zbog krivih početnih pretpostavki i grešaka mjerenja u konačnici netočnim) izračunima koristio određene omjere duljina koji odgovaraju danas uobičajenim trigonometrijskim funkcijama određenih kutova [5, 29, 49].

No, sustavno razmatranje iznosa određenog omjera duljina za različite kutove prvi je proveo **Hiparh iz Niceje** (oko 190.–120. pr. Kr.). U povijesti astronomije poznat je po tome što je izračunao trajanje godine s točnošću do na 6 minuta, odredio kut između ekliptike i ekvatora, otkrio precesiju ekvinocija i izračunao koordinate mnogih zvijezda. U matematici je zapamćen kao autor prve trigonometrijske tablice, ali i po prvim rezultatima iz sferne geometrije i po prvoj analizi stereografske projekcije. Njegova su djela izgubljena te njihov sadržaj saznajemo iz sekundarnih izvora. Hiparhova prva trigonometrijska tablica bila je tablica središnjih kutova u fiksiranoj kružnici i pripadnih tetiva. **Tablice tetiva** ostat će karakteristika trigonometrije sve do kraja antike. Mi ćemo tetivu koja odgovara središnjem kutu α označavati s $\text{tet } \alpha$. Pogledamo li sliku 4.36, vidimo da je veza starogrčke tetive s danas uobičajenim trigonometrijskim omjerima dana formulom

$$\text{tet } \alpha = 2r \sin \frac{\alpha}{2},$$

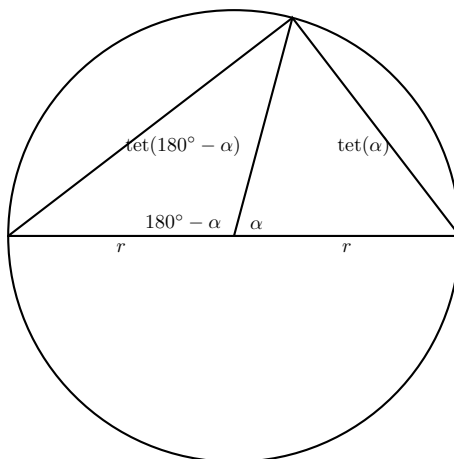


Slika 4.36: Tetive i središnji kutovi

tj. (do na polumjer kružnice) tetive su dvostruki sinusi polukuta. U tablicama navodile su se aproksimativne racionalne vrijednosti tetiva pa je ovdje važno spomenuti nešto o starogrčkom zapisu razlomaka. Oni se i dalje strogo matematički nisu smatrali brojevima, ali su naravno bili nužni u raznim praktičnim, ovdje astronomskim, proračunima. U Hiparhovo doba standardni brojevi sustav bio je alfabetski i on se koristio za zapisivanje svih prirodnih brojeva. Dok se u starije doba za zapis razlomaka koristio egipatski zapis te bi se primjerice $\frac{1}{5}$ pisala jednostavno kao ε'' (dakle, nazivnik s dva apostrofa), u ovom razdoblju pojavljuju se dva nova stila zapisa razlomaka. Jedan je koristio brojnik i nazivnik (Heron i Diofant su koristili takav zapis), s tim da se jednostavno pisao nazivnik *iznad* brojnika, npr. $\frac{\kappa\beta}{\zeta}$ je naš $\frac{7}{22}$. U astronomiji se pak za zapisivanje razlomaka koristio alfabetski brojevi sustav u kombinaciji s babilonskim seksagezimalnim (pri čemu se seksagezimalno zapisivao samo razlomljeni dio broja). Primjerice, Hiparhových $7^{\circ}30'$ bilo je pisano kao $\zeta\bar{\lambda}$. Pritom je postojao, kao i u Mezopotamiji od ca. 3. st. pr. Kr., poseban simbol za nedostajuću potenciju od 60, tj. znamenka koja odgovara današnjoj znamenki 0 kad se nalazi 'usred' broja. Hiparhova tablica tetiva sadržavala je kutove u koracima od po $7^{\circ}30'$ u rasponu od 0 do 180° . Primjerice, za kut od 60° (ξ) Hiparh je naveo iznos tetive $57^{\circ}18'$ ($\nu\zeta\bar{\eta}$). Budući da se za središnji kut od 60° polumjer i tetiva podudaraju, vidimo da je polumjer kruga u kojem je Hiparh gledao središnje kutove i tetive bio $57 + \frac{18}{60} = 57.3$. Pomnija analiza tablice (jer naravno da svako zaokruživanje nosi grešku) pokazuje da je zapravo gledao krug opsega 360, što naravno odgovara jednostavnoj podjeli punog kuta na stupnjeve [5, 26, 29, 38, 49].

Do kraja helenizma u trigonometriji su se istakla još dva znamenita znanstvenika. Prvi je bio **Menelaj Aleksandrijski** (ca. 70.–130. A.D.), koji je također izradio tablicu tetiva (u šest knjiga), no ona nije sačuvana. Najpoznatije Menelajevo djelo je *Sphaerica*, sačuvana u arapskom prijevodu, u kojem se bavi sfernom geometrijom i sfernom trigonometrijom. *Sphaerica* je najstarije djelo u kojem je definiran **sferni trokut**: To je trokut koji je omeđen lukovima triju velikih kružnica na danoj sferi. U ovoj se knjizi nalazi i znameniti Menelajev teorem za ravninske i sferne trokute [5, 49].⁴⁶ Konačnu sintezu trigonometrijskog znanja antičkog doba postigao je znameniti **Klaudije Ptolemej** (ca. 85.–165.), najutjecajniji antički astronom i geograf. Djelovao je u Aleksandriji, a bavio se i

⁴⁶Zadan je trokut ABC i pravac koji siječe pravce AB , BC , CA redom u točkama D , E , F . Tada je $|AD| \cdot |BE| \cdot |CF| = |BD| \cdot |CE| \cdot |AF|$ ako je trokut ravninski, odnosno $\sin \widehat{AD} \cdot \sin \widehat{BE} \cdot \sin \widehat{CF} = \sin \widehat{BD} \cdot \sin \widehat{CE} \cdot \sin \widehat{AF}$ ako je trokut sferni. Pritom se kod sfernih trukuta duljine njihovih stranica poistovjećuju s mjerama odgovarajućih središnjih kutova.

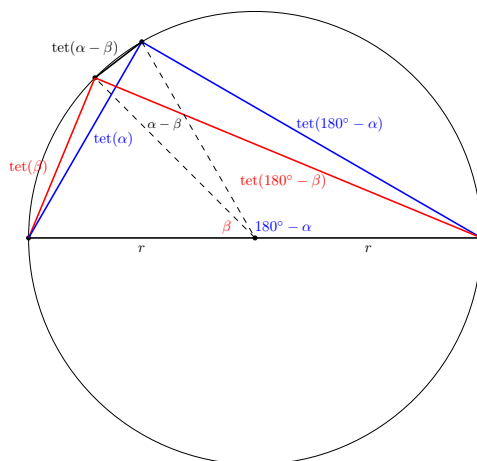
Slika 4.37: $(\text{tet } \alpha)^2 + (\text{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2$.

matematikom, astrologijom, glazbom i filozofijom. Jedino Ptolemejevo čisto matematičko djelo sadržavalo je pokušaj dokaza Euklidovog postulata o paralelama (tako navodi Proklo). Najznačajnije Ptolemejevo djelo je *Matematike sintaksis* („Matematička kolekcija”), kasnije nazvano *Megale sintaksis* („Velika kolekcija”), koje nije sačuvano u originalu, nego samo u arapskom prijevodu te je poznatije pod imenom tog prijevoda: *Almagest* („Najveći”). U tom je djelu Ptolemej dao matematičku teoriju kretanja nebeskih tijela. Zbog izuzetno dobrog poklapanja s dostupnim eksperimentalnim podacima ovo je djelo sve do renesanse bilo osnova zapadne astronomije. U njemu nalazimo mnoge doprinose sfernoj geometriji i trigonometriji. Ptolemejeva tablica tetiva vrijedna je malo veće pažnje, jer njezina konstrukcija sadrži mnoge važne trigonometrijske rezultate.

Kao i Hiparh, Ptolemej kreće od kružnice podijeljene na 360 dijelova (‘stupnjeva’), no Ptolemej također dijeli i njezin promjer i to na 120 dijelova (uočimo dakle da su mu jedinice duljine za opseg i promjer različite, jer je zasigurno znao da opseg kružnice nije 3 puta njezin promjer, štoviše Ptolemej je omjer opsega i promjera procijenio s $3\frac{17}{120}$, dakle s greškom reda veličine samo 10^{-5}). Stoga ćemo za mjerenje duljine luka na kružnici jedinicu označiti s $^\circ$, dok ćemo za jedinicu za mjerenje duljine ravnih crta pisati (u literaturi uobičajenu) oznaku p za $\frac{1}{120}$ duljine promjera. Primjerice, $\text{tet } 60^\circ = 60^p$ (kutu od 60° odgovara tetiva duljina polumjera, dakle pola promjera, kružnice). Nakon što je dokazao neke geometrijske teoreme, Ptolemej ih je iskoristio za jednostavno izračunavanje nekih tetiva. Koristeći jedan svoj te Pitagorin teorem prvo je dobio da je duljina stranice pravilnog deseterokuta jednaka $37^p 4' 55''$ (mi bismo rekli: $(37 + \frac{4}{60} + \frac{55}{3600}) \cdot \frac{1}{120} = \frac{26699}{86400} \approx 0,3$ promjera) pa je to tetiva koja odgovara kutu 36° . Tetive za središnje kutove 60° , 90° i 120° se lagano izračunaju, a koristeći Pitagorin poučak i tvrdnju iz zadatka 4.38, koju je dokazao, Ptolemej je izračunao tetivu za 72° [26].

Zadatak 11 Izračunajte, egzaktno, iznose $\text{tet } 60^\circ$, $\text{tet } 90^\circ$ i $\text{tet } 120^\circ$. Iznose zapišite i aproksimativno koristeći jedinicu p i minute i sekunde.

Zadatak 12 Dokažite da je u pravokutnom trokutu kojemu je jedna kateta polumjer, a druga je stranica pravilnog deseterokuta upisanog u kružnicu, hipotenuza jednaka stranici pravilnog peterokuta upisanog u istu kružnicu.



Slika 4.38: Adicijski teorem za tetive

Iz navedenih pet tetiva izračunao je i tetivu od 144° koristeći svoju zanimljivu kombinaciju Pitagorinog i Talesovog poučka u kontekstu računa tetiva (slika 4.37):

$$(\text{tet } \alpha)^2 + (\text{tet}(180^\circ - \alpha))^2 = d^2.$$

Dalje je dokazao jednu lemu, koju danas poznajemo pod imenom **Ptolemejev teorem**:⁴⁷

Teorem 9 (Ptolemejev teorem) *U tetivnom četverokutu je umnožak duljina dijagonala jednak zbroju umnožaka dva para nasuprotnih stranica.*

Kao korolar te leme dokazao je (koristeći dijagram poput onog na slici 4.38) „tetivnu” varijantu adicijskog teorema za sinus, koju možemo zapisati ovako:

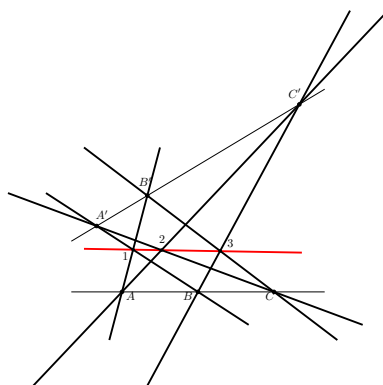
$$\text{tet}(\alpha - \beta) \cdot d = \text{tet } \alpha \cdot \text{tet}(180^\circ - \beta) - \text{tet } \beta \cdot \text{tet}(180^\circ - \alpha).$$

Koristeći navedene i još neke rezultate (vidi npr. [26]) Ptolemej je izračunao tablicu tetiva u rasponu središnjih kutova (tj. lukova) od $30'$ do 180° , u koracima od po pola stupnja (točnost je, kad se preračuna u decimalni sustav, na 5 do 6 decimala).

Osim spomenutih matematičara koji su doprinijeli nastanku trigonometrije, u postklasičnom helenizmu nužno je spomenuti još tri: Herona, Diofanta i Papusa. **Heron iz Aleksandrije** (vj. 1. st. A.D.) bio je matematičar, fizičar, izumitelj i inženjer. Za razliku od drugih starogrčkih matematičara bio je orijentiran na praktičnu matematiku. Napisao je tri matematička djela: *Metrica* (o mjeranju, sadrži — naravno ne simbolički zapisanu — **Heronovu formulu za površinu trokuta**, zasigurno poznatu bar koje stoljeće ranije, i **Heronovu metodu za korjenovanje** na primjeru $\sqrt{720}$, pri čemu je očito da je znao da se povećanjem broja iteracija povećava točnost), *Geometrica* (o površinama) i *Stereometrica* (o volumenima). Tijekom vremena su tim djelima dodavani mnogi sadržaji pa nije sigurno koji dijelovi stvarno potječu od Herona. Poznat je i **Heronov problem najkraćeg puta**, koji je jedan od najstarijih poznatih problema optimizacije: Za zadane točke A i B s iste strane nekog pravca traži se točka C na tom pravcu za koju je $|AC| + |CB|$ najmanja moguća [5, 29, 49].

Zadatak 13 *Heron je spomenuti problem riješio koristeći osnu simetriju. Kako?*

⁴⁷Umnoške duljina Ptolemej je tipično starogrčki naveo kao površine odgovarajućih pravokutnika.



Slika 4.39: Papusov teorem

Diofant Aleksandrijski (vjerojatno 3. st. A. D.) najznačajniji je matematičar post-klasičnog razdoblja i posljednji veliki europski matematičar prije Fibonaccija. Jedna od rijetkih pouzdanih informacija o njegovom životu je ta da je autor matematičkog djela *Aritmetika*. Čini se da je živio 84 godine — na to upućuje zadatak kojeg oko 500. g. u *Grčkoj antologiji* daje Metrodor:

Bog mu [Diofantu] je dozvolio da bude dječak šestinu svog života; kad je dodana dvanaestina, obrazi mu stekoše bradu; On za njega zapali svjetlo braka nakon sedmine, a u petoj godini nakon ženidbe darova mu sina. No ah! Kasno i jadno dijete, kad dostiže mjeru polovine očeva života, uze ga ledeni grob. Nakon što je četiri godine tražio utjehu u znanosti brojeva, dostignu kraj svog života.

Po Diofantu danas nose ime **diofantske jednadžbe**.⁴⁸ Tipičan primjer diofantske jednadžbe je traženje pitagorejskih trojki. Iako u antičkoj Grčkoj još ne možemo pričati o jednadžbama kao takvima, Diofantovi problemi vezani za teoriju brojeva lako se mogu opisati kao jednadžbe. Diofantova *Aritmetika* sastoji se od 150 algebarskih zadataka (u kontekstu teorije brojeva, tj. teorijske aritmetike) u 13 „knjiga”, bez prateće opće teorije. Šest od tih 13 knjiga je sačuvano na grčkom i četiri na arapskom jeziku (a tri su izgubljene). Mnogi zadaci u *Aritmetici* svode se na jednadžbe s nejedinstvenim rješenjima, a Diofant razmatra samo rješenja koja se mogu zapisati kao pozitivni razlomci. Neki od Diofantovih zadataka još ni danas nisu riješeni, a kopije i prijevodi *Aritmetike* imale su velik utjecaj na mnoge kasnije matematičare [5, 49]. Diofant je osmislio i vlastitu algebarsku notaciju (vidi [13]), no ona nije imala većeg utjecaja.

Posljednji veliki antički grčki matematičar bio je **Papus iz Aleksandrije** (ca. 290.–350.). Glavno Papusovo djelo je *Kolekcija*, koje je jedan od važniji izvora današnjih znanja o antičkoj matematici. To je vrsta enciklopedije starogrčke matematike, a sadrži i Papusove vlastite rezultate, od kojih je najpoznatiji **Papusov teorem**: Dana su dva pravca i na njima po tri točke: A, B, C odnosno A', B', C' . Neka je točka 1 sjecište AB' i $A'B$, točka 2 sjecište AC' i $A'C$ te točka 3 sjecište BC' i $B'C$. Tada su točke 1, 2 i 3 kolinearne (slika 4.39). Papus je uveo i pojam fokusa i direktrise konike. Iskazao je i dokazao teorem kojeg je kasnije, u 18. st., za definiciju konika iskoristio R. J. Bošković: Neka je dan pravac AB i točka C u ravnini. Neka je iz točke D u istoj ravnini povučen pravac CD i okomica DE na AB i neka je zadan omjer $|CD| : |DE|$. Tada je D na

⁴⁸U posljednjih se dvjestotinjak godina naziv *diofantske jednadžbe* uvriježio za algebarske jednadžbe s više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima kojima se traže *cjelobrojna* rješenja.

1	5	10	50	100	500	1000
I	V, A	X	L, C	C, D	D, B	CD, OO
I	V	X	L	C	D	CD

Slika 4.40: Rimske brojke u doba republike (srednji red) i carstva (donji red)

konici, i to na paraboli ako je taj omjer jednak 1, na hiperboli ako je veći od 1 odnosno na elipsi ako je manji od 1. Drugim riječima: Konika je geometrijsko mjesto točaka u ravnini kojima je omjer udaljenosti do čvrste točke (fokusa) i čvrstog pravca (direktrise) konstantan.

Za kraj pregleda antičke matematike recimo par riječi o matematici u Rimskom Carstvu. Rimljani nisu cijenili matematiku, samo su koristili njezine praktične rezultate u građevini, mjeriteljstvu, računanju kamata i udjela u nasljedstvima. Samostalnih rimskih matematičkih doprinosa nije bilo, a mnogi grčki tekstovi preneseni su, odnosno prevedeni na latinski iskrivljeno i bez razumijevanja. U školama se učilo računanje na prste, u glavi i pomoću (**rimskog**) **abakusa**. Najpoznatija matematička „ostavština“ starih Rimljana su **rimске brojke**, no današnja verzija je tek malo starija od zapadne verzije indoarapskih brojki (u antičko doba 1000 se nije pisao kao M, nego kako se vidi na slici 4.40). Rimski je sustav primarno dekadski, ali sa tzv. sekundarnom bazom 5, slično kao antički grčki brojevnii sustav. Suptraktivan je, tj. aditivan, osim što se u slučaju da se ispred simbola veće vrijednosti nađe simbol manje vrijednosti, ta manja oduzima od veće: $IV = IIII$. Rimljani su kod podjele jedinica mase i novca koristili duodecimalne razlomke. Jedan as ⁴⁹ se dijelio na 12 unci (*uncia*). Znak za uncu bila je točka, a za $\frac{1}{2}$ slovo S (*semis*). Ostali razlomci između $\frac{1}{12}$ i 1 zapisivali su se aditivno korištenjem navedenih, a svaki je imao i svoj poseban naziv, npr. $\frac{2}{3}$ je *bes*, zapisan kao S·. Kao i kod Grka ranije, korišteni su i egipatski razlomci.



U postklasičnom helenizmu ...

... glavna novost je utemeljenje trigonometrije, u obliku izračunavanja tablica tetiva (de facto dvostrukih sinusa polukuta) za središnje kutova. Trigonometriju je utemeljio Hiparh iz Niceje, ali posebno ju je razvio Klaudije Ptolemej, čiji mnogi rezultati odgovaraju modernim trigonometrijskim pravilima poput adicijskih formula. Također, Hiparh i Ptolemej te Menelaj Aleksandrijski postavili su osnove sferne geometrije. Diofant je bitno doprinio teoriji brojeva i postavio temelje diofantskih jednačbi, a Heron je kao jedini praktično orijentiran starogrčki matematičar dobio niz važnih rezultata uključujući Heronovu metodu korjenovanja, Heronovu formulu i rješenje Heronovog problema optimizacije. Zadnji veliki antički matematičar, Papus Aleksandrijski, važan je izvor znanja o starijim razdobljima, a pokazao je i da su konike karakterizirane omjerom udaljenosti njihovih točaka od fokusa i direktrise. U usporedbi s klasičnim helenizmom, ovo je ipak — uslijed rimskog utjecaja — znanstveno manje aktivno razdoblje.

⁴⁹Jedinica novca i mase. Jedinica duljine bila je *pes*, stopa, i dijelila se na 12 *polices*, palaca, ili na 16 *digiti*, prstiju.

Poglavlje 5

Matematika u Kini i Indiji u stara vremena

5.1 Starokineska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

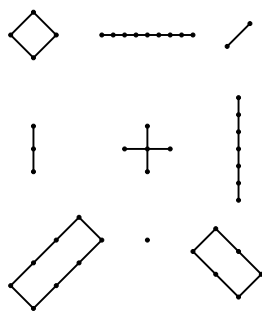
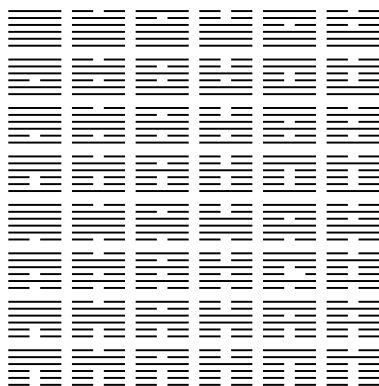
* broj i brojka * pozitivni i negativni brojevi * dekadski pozicijski sustav * magični kvadrat * permutacije i varijacije * Pitagorin poučak * π * omjeri i razmjeri * površine i volumeni * linearne jednadžbe i njihovi sustavi * Gaußova metoda eliminacija * numerička matematika * drugi i treći korijeni * Hornerov algoritam * teorija brojeva * kongruencije * kineski teorem o ostacima * diofantske jednadžbe

Podsjetimo se malo opće povijesti Kine. Najstarije kulture oko rijeka Huang He i Jangce pojavile su se u razdoblju 3000.–1500. pr. Kr. Iza ca. 2000. g. pr. Kr. tu se razvilo kinesko pismo. Već rano Kinezi su imali razvijenu astronomiju. Najstariji pouzdani podaci o kineskoj općoj i znanstvenoj povijesti sačuvani su iz doba dinastije Džou (Zhou),¹ 11.–5. st. pr. Kr. U to doba zabilježen Halleyev komet, izrađivani su kalendari, a vjeru i filozofiju oblikovali su Konfucije (konfucijanizam) i Lao Ce (taoizam). Znameniti Kineski zid sagrađen je u doba prvog kineskog cara Čin Ši Huangdija potkraj 3. st. pr. Kr. Iz ovog ranog razdoblja nema sačuvanih matematičkih tekstova, ali iz raznih povijesnih izvora saznajemo da su se najkasnije oko 1200. g. pr. Kr. brojevi su se počeli zapisivati koristeći (nepozicijski) dekadski brojevni sustav [49].

Među kineskim matematičkim specifičnostima za ovu ranu povijest kine spomenuti treba dvije. Jedna su **magični kvadrati**, čija najstarija pojava je upravo u staroj Kini. Do 7. st. pr. Kr. postao je opće poznat tzv. *lo šu* magični kvadrat (slika 5.1), no njegova prva pojava datira se oko 2200. g. pr. Kr., vezano za poznatu legendu o kornjači. Zbroj svakog retka, stupca i obiju dijagonala u *lo šu* kvadratu je 15, što je broj dana u svakom od 24 ciklusa starokineske solarne godine. Danas znamo i da je to (do na simetrije) jedini normalni² magični kvadrat dimenzije 3×3 . Veći magični kvadrati se u Kini spominju tek u 13. st., prije čega su već bili poznati u Indiji i u Arapa. Također, prva pojava **permutacija** (zapravo, varijacija s ponavljanjem) u povijesti potječe iz ovog ranog razdoblja kineske povijesti. Radi se o *I Čing-u* (*Knjizi promjena*), vj. iz 7. st. pr. Kr., u kojem se (u svrhu

¹Kineske nazive transkribirali smo na hrvatsku latinicu koristeći pomoćno kinesko latinično pismo pinyin.

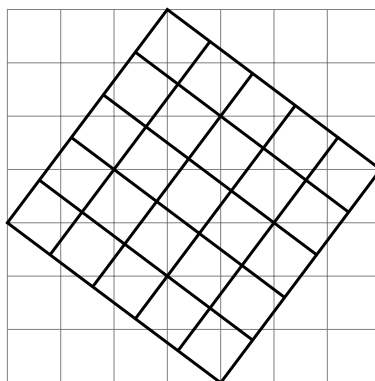
² $n \times n$ -magični kvadrat s prirodnim brojevima od 1 do n^2 .

Slika 5.1: *Lo šu* magični kvadratSlika 5.2: *I Čing* heksagrami

proricanja) dva simbola, jang (—) i jin (--), prvo slažu u $2^3 = 8$ trigrama pa zatim ti trigrama u $8^2 = 64$ heksagrama (slika 5.2), tj. gledaju se sve varijacije šestog razreda od 2 elementa. Ipak, nema naznaka da su u stara vremena Kinezi sustavno razmatrali permutacije i varijacije [5, 14].

Stariji oblici znamenki dekadskog pozicijskog sustava (bez nule, dakle bez apsolutne pozicije) od 4. st. pr. Kr. ustupili su mjesto novoj varijanti takvog brojevnog sustava. Kineske brojke u to doba poprimaju oblik štapičastih brojki, koje su posljedica tipičnog starokineskog pomagala za računanje, štapića. Štapičaste brojke su se koristile sve do 16. st., a kako bi bilo jasno na koju potenciju od 10 se znamenka odnosi (tj. postiglo nešto blisko apsolutnoj poziciji), orijentacija znamenki bila je vertikalna za neparne potencije, a horizontalna za parne potencije od 10 (uključivo nulte, tj. jedinice) Primjerice, $\equiv \text{II} -$ je kineskim štapičastim brojkama zapisan broj kojeg danas zapisujemo kao 321 (ili 32100 ili 3210000 ili ...). Od 2. st. pr. Kr. u Kini se, po prvi put u ljudskoj povijesti, pojavilo razlikovanje **pozitivnih brojeva** (*dženg*), koji su prikazivani crvenim štapićima, i **negativnih brojeva** (*fu*), prikazivanih crnim štapićima. No, simbol za znamenku nula (krug) uveden je tek u 13. st. Napomenimo ovdje da je poznato starokinesko računsko pomagalo, **kineski abakus** (suanpan), uveden bitno kasnije od štapića (vjerojatno u 2. st. pr. Kr.), a u široj uporabi je tek od 16. st. [5, 43].

U doba dinastije Han (206. pr. Kr.–220. A.D.) došlo je do procvata matematike i počela se pridavati važnost matematičkom obrazovanju. Iz tog doba potječu najstariji sačuvani kineski matematički tekstovi. Također, u to doba Kinezi su ostvarili mnoge impresivne napretke u znanosti i tehnologiji: izumili su proizvodnju papira, otkrili su Sunčeve pjege, ... Do 1. st. A. D. ostvareni su i kontakti s Indijom te je u Kinu prodrio i budizam. U



Slika 5.3: Ilustracija Pitagorinog poučka u „Aritmetici Džouovog gnomona”

3. st. carstvo se raspalo, te je došlo do zamiranja znanosti i tehnike. Najstariji potpuno sačuvan kineski matematički tekst je *Džoubi suanđing* (*Aritmetika Džouovog gnomona*), koji se datira između 100 pr. Kr. i 100. A.D. Posebno je poznata grafika 5.3 iz njega, koja se lako poocpava na dokaz Pitagorinog poučka (u Kineza: pravilo *gou gu*, doslovno „kraća kateta, dulja kateta“). No, dokazi svakako u to doba još nisu bili dio matematike u Kini. Zanimljiviji i važniji, vjerojatno i najpoznatiji, starokineski matematički tekst je *Diudžuang šuanšu* (*Devet poglavlja umijeća računanja*) [5, 8, 43, 49].

Diudžuang šuanšu je kompilacija starijih rukopisa, nastala najvjerojatnije u prvoj polovici 2. st. A. D. Sadrži 246 zadataka raspoređenih u 9 poglavlja i bilo je vrlo utjecajno djelo, koje su svojim komentarima doradili mnogi kasniji kineski matematičari i koje je kasnije, skupa s *Aritmetikom Džouovog gnomona*, postalo jedan od tzv. deset klasika kineske matematike, tj. službenog popisa obvezne matematičke literature za obrazovanje u 7. st. Poglavlja u *Devet poglavlja umijeća računanja* imaju sljedeće teme [8, 43]:

1. „Mjerenje polja”: Izračunavanje površina, uključivo računa s razlomcima. Tu se površina kruga računa pravilima koja su ekvivalentna aproksimaciji π s 3 [6].
2. „Proso i riža”: Preračunavanja količina za razmjenu (trojno pravilo).
3. „Raspodjela po proporciji”: Proporcionalnosti vezane za raspodjelu dobara i novca.
4. „Koja širina?”: Izračunavanje nepoznatih duljina, širina i visina geometrijskih likova i tijela kojima je poznata površina odnosno volumen. Tu je uključeno računanje kvadratnih i kubnih korijena.
5. „Rasprave o radu”: Određivanje raznih volumena u konstrukciji građevina i drugih struktura, u svrhu utvrđivanja radnog učinka.
6. „Pošteni nameti”: Proporcionalnosti u izračunima vezanim (ne samo) za plaće i poreze.
7. „Višak i manjak”: Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom (rješavanje metodom *regula falsi*, tj. temeljem dva pokušaja).
8. „Pravokutne tablice”: Rješavanje sustava linearnih jednadžbi.
9. „Pravokutni trokuti”: Rješavanje praktičnih geometrijskih problema koristeći svojstva pravokutnih trokuta, uključivo Pitagorinog poučka.

Među tim sadržajima ističemo dva, u kojima se pojavljuju specifični kineski doprinosi matematici koji u isto vrijeme još nisu bili poznati drugdje, a u oba slučaja se radi o prvim bitnim doprinosima povijesti **numeričke matematike** nakon babilonske metode računanja korijena: iterativne metode korjenovanja i rješavanje sustava linearnih sustava metodom *fang čeng* koja je gotovo identična modernoj, matričnoj Gaußovoj metodi eliminacija. Opišimo ovdje ovo potonje, na konkretnom primjeru, dok ćemo starokinesko korjenovanje opisati nešto kasnije, na str. 67. Napominjemo da su računi u *Devet poglavlja* opisani koristeći štapičaste brojke i „mehanički” (kako pomicati štapiće u pojedinom koraku), no postupak je ekvivalentan ovom kojeg ćemo koristeći moderne brojke opisati na primjeru jednog zadatka iz. 8. knjige *Devet poglavlja* [8, 43].

Primjer 18 *Iz tri snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos 39 dou.³ Iz dva snopa dobrog žita, tri snopa srednjeg i jednog snopa lošeg žita dobije se prinos 34 dou. Iz jednog snopa dobrog žita, dva snopa srednjeg i tri snopa lošeg žita dobije se prinos 26 dou. Koliki je prinos po jednog snopa dobrog, srednjeg i lošeg žita?*

Postupak je sljedeći. Prvo se ispiše tablica:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Uočimo da je ovo točno transponirana proširena matrica sustava linearnih jednadžbi koji odgovara uvjetima zadatka. Slijedi niz od tri koraka računa (u prvom se od trostrukog drugog stupca oduzme dvostruki treći i rezultat zapisuje u drugi stupac, u drugom se trostruki prvi stupac oduzme od trećeg i rezultat zapisuje u prvi, a u trećem se od peterostrukog prvog stupca oduzme četverostruki drugi i rezultat zapiše) koji redom rezultiraju tablicama:

1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

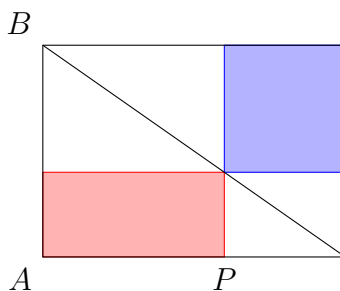
Sad se očita rješenje: Prvo vidimo da je prinos lošeg žita $\frac{99}{36} = 2\frac{3}{4}$ dou. Stoga je prinos srednjeg žita $(24 - 1 \cdot 2\frac{3}{4}) : 5 = 4\frac{1}{4}$ dou. Naposljetku, prinos dobrog žita je $(39 - 1 \cdot 2\frac{3}{4} - 2 \cdot 4\frac{1}{4}) : 3 = 9\frac{1}{4}$ dou.

Kako je vidljivo iz primjera, postupak je jednak modernoj matričnoj **Gaußovoj metodi eliminacija**, do na to da je u odnosu na suvremeni stil zamijenjena uloga stupaca i redaka (i da se izbjegava račun s razlomcima) [5, 8].

U doba dinastije Han živio je i multidisciplinarni znanstvenik **Džang Heng** (78.–139.), koji je podučavao da je Zemlja kuglastog oblika i konstruirao prvi seizmograf. On je modificirao tada (empirijski) poznato pravilo u kojem se omjer površine kvadrata i površine upisanog mu kruga uzimao kao 4 : 3. Džang Heng je zaključio da se kvadrat površine kvadrata i kvadrat površine tom kvadratu upisanog kruga odnose kao 8 : 5.

Zadatak 14 *Izračunajte kojim aproksimacijama broja π odgovaraju ova dva pravila.*

³Dou je kineska mjera volumena, u to doba iznosila je otprilike današnjih 2 L.



Slika 5.4: Liu Huijeva metoda određivanja visine nedostupnih objekata.

Za tu Džang Hengovu aproksimaciju saznajemo iz komentara *Devet poglavlja*, koje je napisao prvi značajniji poimence poznati kineski matematičar **Liu Hui** (3. st.). On je opisao postupak analogan Arhimedovom iterativnom postupku, za kojeg zasigurno nije znao, te je uočio da se takvim postupkom može po volji dobro aproksimirati konstanta koju danas zovemo π . Liu Hui je za praktične račune zagovarao aproksimaciju $\frac{157}{150} = 3,14$. Napomenimo ovdje da je već u *Devet poglavlja* bio poznat točan odnos površine i opsega kruga (površina kruga je četvrtina umnoška opsega i promjera). U svojim komentarima *Devet poglavlja* Liu Hui je objasnio i opravdao postupke koji se u njima nalaze [6, 7, 43]. Dio Liu Huijevih komentara kasnije je odvojen u zasebni *Matematički priručnik o jednom otoku u moru*, gdje se bavi određivanjem udaljenosti i veličina nedostupnih objekata.

Primjer 19 U Matematičkom priručniku o jednom otoku u moru nalazimo ovaj zadatak: Dva štapa visine 3 džang⁴ zabijeni su u zemlju i razmaknuti 1000 bu. Jedan štap je bliži udaljenom otoku nego drugi. Ako promatrač stoji 123 bu iza prvoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog štapa, a ako stoji 127 bu iza drugoga, vidi vrh otoka u liniji s vrhom tog drugog štapa. Koliko je visok otok i koliko je daleko od bližeg mu štapa?

Kao rješenje je navedeno: Neka je brojnik jednak visini štapa pomnoženoj s razmakom štapova, neka je nazivnik razlika odmakova od štapova. Doda li se kvocijentu visina štapa dobije se visina otoka. Za udaljenost bližeg štapa do otoka nazivnik je isti, ali brojnik je razmak štapova pomnožen s odmakom od prvog, a kvocijentu se ne pribraja ništa.

Iako ovdje nije objašnjeno, iz ostalih zadataka se vidi da je Liu Hui ovakve zadatke rješavao izjednačavanjem površina pravokutnika s obiju strana dijagonale u većem pravokutniku. Pogledajmo skicu 5.4. Na njoj su površine plavog i crvenog pravokutnika jednake. Ako je $h = |AB|$ visina otoka i $d = |AP|$ razmak od otoka do jednog od štapova, onda ako izjednačimo navedene površine za prvi štap dobijemo $3 \text{ džang} \times d = 123 \text{ bu} \cdot (h - 3 \text{ džang})$, a ako isto učinimo za drugi štap dobijemo $3 \text{ džang} \times (1000 \text{ bu} + d) = 127 \text{ bu} \cdot (h - 3 \text{ džang})$. Oduzmemo li te jednakosti dobivamo navedeno pravilo za visinu otoka (ispadnu $753 \text{ džang} = 1255 \text{ bu}$).

Vratimo se još malo *Aritmetici Džouovog gnomona* i *Devet poglavlja*. U prvom već nalazimo postupak za **računanje drugih korijena**, a taj je u *Devet poglavlja* poopćen na računanje trećih korijena. Te postupke je komentirao i geometrijski objasnio Liu Hui. Ovdje ćemo opisati samo starokineski iterativni postupak za određivanje cjelobrojnog dijela drugog korijena zadanog broja [5, 8, 43]. Za razliku od babilonske (Heronove) metode, ovdje se znamenke određuju redom, od prve nadalje.

⁴1 džang = 10 či, odnosno u to doba 1 džang je bio otprilike 2,3 m. Uz to je korištena i jedinica bu: 1 bu = 6 či.

Primjer 20 Izačunajmo $\lfloor \sqrt{55225} \rfloor$. Očito je to troznamenkasti broj (abc) , tj. $55225 = (100a + 10b + c)^2$. Stoga je

$$55225 = \underline{10000a^2} + 100(20a + b)b + (20(10a + b) + c)c,$$

iz čega isprobavanjem vidimo da je $a = 2$. Stoga je

$$15225 = \underline{100(40 + b)b} + (20(20 + b) + c)c,$$

odakle opet isprobavanjem vidimo da je $b = 3$. Preostaje

$$2325 = (460 + c)c,$$

pa je $c = 5$, odnosno $\lfloor \sqrt{55225} \rfloor = \sqrt{55225} = 235$.

Kao što smo rekli, nakon 3. st. n. e., došlo je do zastoja u razvoju kineske znanosti. Do novog procvata kineske matematike došlo je u 7. st., u doba dinastije Tang (618.–907.). U to je doba u Kini dominirao budizam, a nešto kasnije, u razdoblju vlasti sjeverne pa južne dinastije Sung (960.–1278.) konfucijanizam je postao obavezan. U to je doba izumljen tisak s pomičnim slovima i uvedeni su državni ispiti za službenike. Nakon što su u 13. st. Kinu osvojili Mongoli došlo je do značajnijih kontakata sa zapadom⁵ te daljnji razvoj kineske matematike nećemo pratiti [5, 49]. U razdoblju 7.–13. stoljeća Kinezi su značajno unaprijedili teoriju brojeva i numeričku matematiku. U tom su razdoblju stare metode korjenovanja, tj. rješavanja jednadžbi oblika $x^2 = A$ i $x^3 = B$, prvo poopćene na iterativne metode rješavanja općih kubnih jednadžbi, a onda i jednadžbi višeg stupnja. Vrhunac tog razvoja postigao je znameniti kineski matematičar **Ćin Ćiušao** (1202.–1261.), koji je u svom glavnom djelu *Šušu džiuđžang* (*Devet knjiga o matematičarima*, 1247.) opisao rješavanje polinomijalnih jednadžbi proizvoljnog stupnja metodom koju naziva *tjen juan*, a koja je u biti **Hornerov algoritam**. Ćin Ćiušao je u svojim *Devet knjiga o matematičarima* opisao i opć slučaj **kineskog teorema o ostacima**, no kineski interes za teoriju brojeva bitno je stariji [5, 49].

Najstariju poznatu pojavu kineskog teorema o ostacima nalazimo kod matematičara **Sun Džija** (3., 4. ili 5. st.). U svom glavnom djelu *Sundzi suandžing* (*Sun Džijeve matematički priručnik*) nalazimo sljedeći zadatak: „Tu je nepoznati broj stvari. Ako se prebroje po tri, ostatak je 2. Ako se prebroje po pet, ostatak je 3. Ako se prebroje po sedam, ostatak je 2. Nađi broj stvari.” Rješenje koje navodi Sun Dži je: „Odgovor: 23. Metoda: Ako brojimo po tri i imamo ostatak 2, zapišemo 140. Ako brojimo po pet i ostatak je 3, zapišemo 63. Ako brojimo po sedam i ostatak je 2, zapišemo 30.⁶ Zbrojimo i dobijemo 233⁷ pa oduzmemo 210 da dobijemo odgovor”. Sun Dži daje i još jedan primjer s kongruencijama modulo 3, 5 i 7, ali s ostacima 1 u sve tri, u iz kojeg postaje jasno da je u zadnjem koraku oduzet najveći mogući višekratnik od 105, odnosno da traži najmanje rješenje modulo $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ [5].

Vezano za teoriju brojeva spomenimo još i da se u jednom aritmetičkom priručniku iz 5. st. pojavljuje tip zadatka koji je bio popularan u raznim kulturama i vremenima, a koji je poznat pod imenom **zadatak 100 ptica**. Zadatak glasi: „Ako jedan pijevac košta 5

⁵Marko Polo je 1275. stigao u Peking.

⁶Uočimo da je to točno kako i danas radimo: Ako je dan sustav kongruencija $x \equiv a_i \pmod{n_i}$, $i = 1, \dots, n$, gdje su n_i -ovi relativno prosti, prvo se za svaku kongruenciju računa a_i pomnožen sa svim n_j -ovim osim samog n_i .

⁷Dakle, računamo $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{j \neq i} n_j$.

novčića, jedna kokoš 3, a tri pilića zajeno 1, koliko pijevaca, kokoši i pilića se može kupiti za 100 novčića ako treba kupiti ukupno 100 ptica?”. Vidimo da se takvi zadaci iz moderne perspektive gledano sustavi diofantskih jednadžbi. Navedena su tri rješenja: Prvo su 4 pijevca za 20 novčića, 18 kokoši za 54 i 78 pilića za 26 novčića. Drugo su 8 pijevaca za 40, 11 kokoši za 33 i 81 pilić za 27 novčića. Treće je 12 pijevaca za 60, 4 kokoši za 12 te 84 pilića za 28 novčića. Kao poopćenje je navedeno da se treba pribrojiti 4 broju pijevaca, oduzeti 7 od broja kokoši i dodati 3 broju pilića da se dobiju ostali odgovori [5, 34].



Matematika u staroj Kini...

... počela se razvijati već u doba starog Egipta i Mezopotamije, ali iz tih ranih vremena nema sačuvanih matematičkih tekstova. Poznato je da se u to rano doba mogu susresti 3×3 -magični kvadrati i najstariji poznati primjer varijacija s ponavljanjem te da je od ca. 1200. pr. Kr. korišten dekadski pozicijski sustav bez nule. Od 4. st. pr. Kr. brojke postaju štapičaste, a od 2. st. pr. Kr. pojavljuje se razlikovanje pozitivnih i negativnih brojeva. Najstariji sačuvani matematički tekst, „Aritmetika Džouovog gnomona“, nastala oko prijelaza era, sadrži pravilo *gou gu* (Pitagorin poučak) i numeričko računanje drugih korijena. Najznačajniji starokineski matematički tekst je „Devet poglavlja umijeća računanja“, vjerojatno iz 2. st., u kom možemo naći i *de facto* Gaußovu metodu eliminacija za rješavanje sustava linearnih jednadžbi i numeričko računanje drugih i trećih korijena. U to doba je starija empirijska pravila za računanje površina i opsega krugova odgovarali modernoj aproksimaciji 3 za π Džang Heng popravio na pravilo koje odgovara $\pi \approx \sqrt{10}$. U 3. st. je Liu Hui u komentarima doradio „Devet poglavlja“ i druge starije rezultate, uključivo originalne metode izračunavanja veličina nedostupnih objekata. U razdoblju 7.–13. st. su starije metode korjenovanja poopćene prvo na numeričko rješavanje kubnih jednadžbi, a kasnije i jednadžbi proizvoljnih stupnjeva *de facto* Hornerovim algoritmom. Karakterističan je i kineski interes za teoriju brojeva, te najkasnije u 5. st. nalazimo prve pojave kineskog teorema o ostacima i zadatka sto ptica.

5.2 Staroindijska matematika



Matematički pojmovi u ovom poglavlju

* broj i brojka * dekadski pozicijski sustav * geometrija * π * nula * aritmetika * negativni brojevi
 * trigonometrija * sinus i kosinus * interpolacija * numerička matematika * Heronova metoda *
 Newtonova metoda * diofantske jednačbe * Pellova jednačba * kombinatorika

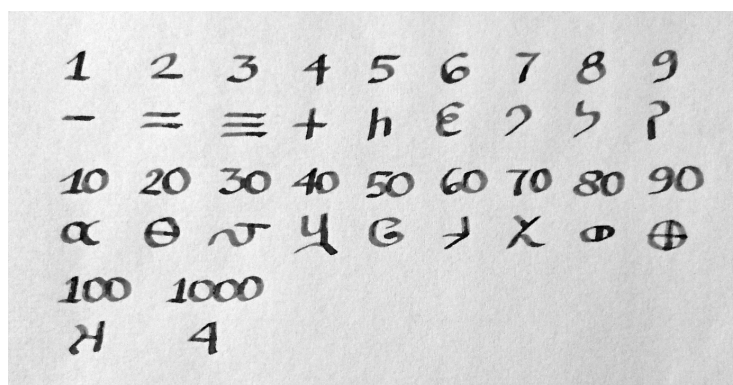
Podsjetimo se glavnih momenata rane indijske povijesti. U 3. tisućljeću pr. Kr. razvile su se prve gradske civilizacije oko rijeke Ind. Iza 1500. pr. Kr. na to se područje naseljavaju indoarijski doseljenici, koji su s vremenom uspostavili plemenska kraljevstva. Tada nastupa i tzv. razdoblje veda, koje ovisno o datiranju poađinje negdje između 1500. i 1200. pr. Kr., a završava između 800. i 500. pr. Kr. Najstariji sačuvani indijski matematički tekstovi potječu upravo iz razdoblja veda. U to doba, dakle sredinom prvog tisućljeća pr. Kr., pojavljuju se tri najznačajnije indijske religije, hinduizam (vede su vjerski tekstovi koji čine njegov temelj, pisane na sanskrtu, jeziku brahmana) te budizam i džainizam. Prodorom Aleksandra Makedonskog do Inda (327.–325. pr. Kr.) dolazi do prvog značajnijeg kontakta sa zapadnim svijetom, te se u sljedećim stoljećima može uočiti helenistički utjecaj na indijsku kulturu i civilizaciju. U to doba je razvijen i brahmanski brojevni sustav, dekadski nepozicijski brojevni sustav sa zasebnim simbolima za iznose $n \cdot 10 + s$ s $n = 1, \dots, 9$ i $k = 0, 1, 2$ te za 1000 (slika 5.5). Vrhunac stare indijske civilizacije predstavlja doba vladavine dinastije Gupta (320.–544. A. D.); carstvo Gupta je na vrhuncu pokrivalo veći dio sjevera indijskog potkontinenta. Tijekom 5.–12. st. vladale su razne dinastije u malim državama, ali je u to doba postignut vrhunac indijske matematike. U skladu s navedenim, staroindijska matematika razdvaja se na dva glavna razdoblja, prvo iz doba veda, a drugo od 5. st. nadalje. U oba razdoblja karakteristike indijske matematike su, slično kineskoj te egipatskoj i babilonskoj matematici, prvenstveno praktična orijentacija, te uglavnom iskustveni rezultati bez dokaza [49].

Prvo spomenuto razdoblje indijske matematike poznato je kao **doba sulbasutri**, otprilike 8.–5. st. pr. Kr. Sulbasutre, u prijevodu „Pravila konopa“, su dodatci vedskim tekstovima, a opisuju mjerenja i konstrukcije vezane za izgradnju hramova i oltara. Većina sulbasutri nose nazive po svojim autorima. S matematičke strane, sulbasutre sadrže rezultate iz elementarne geometrije (računanje površina i volumena, Pitagorin poučak i dr.). Primjerice, u Baudhāyana-sulvasutri (ca. 800. pr. Kr.) nalazimo tekst:

„Konop rastegnuto preko dijagonale kvadrata daje površinu dvostruku površini polaznog kvadrata“.

Sva pravila u sulbasutrama su dana bez dokaza. Neke konstrukcije su egzaktna, a neke aproksimativne, no nigdje se ne ističe razlika između njih, odnosno možemo reći da su za stare Indijce racionalni i iracionalni brojevi bili ravnopravni. U sulbasutrama nalazimo i različite procjene površine kruga (najčešće se kao stranica kvadrata iste površine kao krug uzima $\frac{13}{15}$ promjera, što odgovara ne baš dobroj aproksimaciji $\pi \approx 3,00444$). Indijci su imali interes i za teoriju brojeva, a već u sulbasutrama nalazimo pitagorejske trojke (5, 12, 13), (12, 16, 20), (8, 15, 17), (15, 20, 25), (12, 35, 37), (15, 36, 39), $(2\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2})$, $(7\frac{1}{2}, 10, 12\frac{1}{2})$. [5, 49].

Značajnije je doba vrhunca razvoja staroindijske matematike, koje započinje tijekom vladavine dinastije Gupta. U ovom razdoblju Indijci su dali mnoge značajne doprinose matematici, a u to doba razvio i najvažniji staroindijski doprinos matematici, **dekadski**



Slika 5.5: Brahmanske brojke poĀTetkom nove ere.

pozicijski sustav s nulom. On se razvio postepeno iz spomenutih brahmanskih brojki, no ovdje treba napomenuti da su početkom ovog razdoblja bili korišteni i alfasilabički brojevni sustavi, u kojima slogovi (točnije, suglasnici s diakritičkim znakovima) predstavljaju znamenke. Nula kao znamenka pojavljuje se najkasnije u 9. st., što potvrđuje natpis na jednom hramu u Gwalioru južno od Delhija, datiran 876. Nulu su Indijci nazvali *sunya* (praznina). U arapskom prijevodu to je postalo *sifr*, što je pak u srednjem vijeku u latinskom prijevodu postalo *zephirum* ili *cifra*. Za staroindijsku matematiku karakteristični si razvoji računskih postupaka (*ganita* — znanost o računanju). Tako su Indijci tijekom 1. tisućljeća A.D. razvili efikasne algoritme za računanje u dekadskom pozicijskom sustavu s nulom. Čini se da je najstariji spis koji ih opisuje rukopis Bakhshali, koji se dugo datirao vrlo nesigurno između 300. i 1200., no prema datiranju ugljikom provedenom 2017., smatra se da rukopis potječe iz 3. ili 4. st. A. D., dakle čini se da je već tada — prije početka razdoblja vrhunca indijske matematike — bio razvijen dekadski pozicijski sustav s nulom. Detaljan opis pravila računanja s prirodnim brojevima i razlomcima može naći kod **Mahāvīre** (9. st.), autora prvog indijskog samo matematičari posvećenog teksta [5, 38, 49].

Prvi poimence poznat indijski matematičar bio je **Aryabhata I. (Aryabhata stariji)** (ca. 476.–550.). Njegovo glavno (i jedino sačuvano) djelo je *Āryabhaṭīya*, astronomsko djelo pisano (tipično za staroindijske matematičke tekstove) u stihovima. *Āryabhaṭīya* sadrži tada u Indiji poznate matematičke rezultate (aritmetičke, algebarske te trigonometrijske), bez dokaza. Iz istog doba, možda stotinjak godina stariji, je također astronomski tekst *Surya Siddhanta*. Ova dva djela su najstariji poznati tekstovi koji sadrže tablice sinusa (polutetiva, na sanskrtu *jy(v)a*),⁸ a ne starogrčkih tetiva. Može se reći da moderna trigonometrija potječe iz Indije. Za razliku od Ptolemeja, Indijci su ne samo uočili da je praktičnije tabeliranje polutetiva od tetiva, nego su koristili i samo samo jednu mjeru duljine za promjer i opseg: Kružnicu su podijelili na 21600 dijelova („minuta“) i duljina takvog jednog dijela korištena je za iskazivanje duljina i kružnih lukova i (polu)tetiva. Tako Aryabhata I. piše:

„Dodaj 4 k 100, pomnoži s 8 i svemu dodaj 62000. To što si dobio je približna duljina opsega kruga s promjerom 20000.“

Zadatak 15 Koe polumjeru kružnice i kojoj aproksimaciji broja π odgovara ovaj Aryabhatin postupak?

⁸Zapravo je *jy(v)a* [džj(v)a] izraz za tetivu, ali se tijekom prvog tisućljeća naše ere ustalio kao naziv za polutetivu.

Aryabhatin postupak i veličina korištene kružnice postali su standard u većini indijskih trigonometrijskih tablica. Tablica polutetiva u *Surya Siddhanta* je pak konstruirana koristeći pravilo koje danas zapisujemo

$$r \sin(n\phi) = r \sin((n-1)\phi) + r \sin \phi - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k\pi)}{\sin \phi}$$

($\phi = 3^\circ 45'$, $n = 1, \dots, 24$), dok je Aryabhata samo naveo razlike između po dviju uzastopnih tetiva, $r \sin(n\phi) - r \sin((n-1)\phi)$. Tijekom sljedećih stoljeća otkrivena su i druga pravila ekvivalentna mnogim poznatim trigonometrijskim formulama, a pojavljuju se i kosinus (*kotijya*, $r \cos \alpha$) i *sinus versus* ($r(1 - \cos \alpha)$). U 10. st. se sinusi i kosinusi gledaju u sva četiri kvadranta. Ipak, indijska **trigonometrija** nije postala sustavna disciplina, nego se radilo o rješavanju pojedinačnih problema u astronomske svrhe. Prije nego se osvrnemo na ostale indijske doprinose, spomenimo kratko etimologiju današnjeg izraza sinus: Arapi su sanskrtski izraz *jya* (džja) transliterirali u *džiba*. No, u arapskom pismu bilježe se samo suglasnici pa je pri prijevodu jednog arapskog djela Robert iz Chestera 1154. tu riječ interpretirao kao *džaiib*, značenja prsa, izrez na haljini, izdignuće. Stoga je to preveo latinskom riječju *sinus* (zaobljenost, uvala, prsa) [5, 26, 49].

Indijci nisu samo uveli nulu kao znamenku, nego i kao broj. **Nula** kao broj pojavljuje se najkasnije u 7. st., kako saznajemo iz spisa jednog od najznačajnijih staroindijskih matematičara **Brahmagupte**, ca. 598.–670.). Brahmagupta nulu definira kao rezultat oduzimanja broja od sebe. Kod njega se može naći i opis pravila za četiri osnovne računske operacije s pozitivnim i negativnim brojevima te nulom.⁹ Kao i nula, negativni brojevi su u Indiji vjerojatno bili poznati nekoliko stoljeća ranije (no vjerojatno kasnije nego u Kini), no prvi put se njihova svojstva u računskim operacijama analiziraju kod Brahmagupte. Brahmagupta je u povijesti matematike zapamćen i po otkriću Brahmaguptinog teorema (u tetivnom četverokutu s okomitim dijagonalama visine iz sjecišta dijagonala na pojedine stranice prepolavljaju njima nasuprotne) i Brahmaguptine formule (poopćenje Heronove formule na tetivne četverokute: $P = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$). Kod njega susrećemo i jednu od prvih pojava interpolacije (slična metoda se u gotovo isto vrijeme pojavljuje i u kineskog astronoma Liu Džou-a). Dok su ranije indijske metode bile *de facto* linearna interpolacija, Brahmagupta je naime opisao pravilo koje odgovara modernoj Stirlingovoj interpolacijskoj formuli. Također su Indijci, kao i Kinezi, osmislili iterativne postupke za računanje drugih i trećih korijena. Većina ih je bila slična opisanoj starokineskoj metodi temeljenoj na binomnoj formuli: ako je $N = x^2$ (odnosno $N = x^3$) i imamo prvu procjenu a za x , onda je $x = a + b$ i $N - a^2 = 2ab + b^2$ (odnosno $N - a^3 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3$), pa se to može slično kao i u starokineskoj metodi iskoristiti za određivanje b . No, poznata je i jedna specifična staroindijska metoda za računanje drugog korijena, koja je *de facto* Newtonova metoda primijenjena na aproksimativno rješavanje jednadžbe $x^2 = N$. Tu metodu nalazimo u već spomenutom rukopisu Bakhshali. U biti, radi se o korigiranoj babilonsko-Heronovoj metodi, no nije poznato kako su stari Indijci došli do nje. U rukopisu nalazimo njezino pravilo izraženo riječima:

„U slučaju nekvadratnog broja, oduzmi najbliži kvadratni broj, podijeli ostatak s dvostrukim tim najbližim kvadratom; pola kvadrata od toga se podijeli sa zbrojem približnog korijena i razlomka; to se oduzme i dati će ispravljeni korijen”.

⁹Iznimka u ispravnosti pravila kod Brahmagupte je dijeljenje s nulom: kod Brahmagupte je $0 : 0 = 0$, a dozvoljava i razlomke oblika $\frac{m}{0}$.

Opišimo tu metodu na moderan način. Neka je N nekvaldatni broj kojeg želimo korjenovati i neka je x trenutna aproksimacija za $\sqrt{N}$, pri čemu je $x_i^2 < N$. Označimo li $b_i = N - x_i$, sljedeća (bolja) aproksimacija je

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} - \frac{\left(\frac{b_i}{2x_i}\right)^2}{2\left(x_i + \frac{b_i}{2x_i}\right)}.$$

Kako vidimo da se radi o korigiranoj Heronovoj metodi? Da nema oduzetog člana, pravilo bi bilo

$$x_{i+1} = x_i + \frac{b_i}{2x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i^2 + b_i}{x_i} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x_i^2 + N}{x_i} = \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{N}{x_i} \right).$$

Napomenimo da iako bi suvremeni matematičar uzimao točnu vrijednost x_i (ili bar vrijednost s puno više decimala od tražene točnosti), u duhu rukopisa Bakhshali je uzimati po jednu decimalu više nego u prethodnom koraku. No, ako bismo uvijek uzimali točnu zadnju aproksimaciju, ova metoda vrlo brzo konvergira [5, 47].

Primjer 21 *Izračunajmo aproksimaciju za $\sqrt{2}$ metodom iz rukopisa Bakhshali uz početnu aproksimaciju $x_0 = 1$ ($1^2 < 2$), na točnost od bar dvije decimalne. Računamo:*

- $x_0 = 1$, $b_0 = 2 - 1 = 1$;
- $x_1 = 1 + \frac{1}{1} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\left(1+\frac{1}{2}\right)} = 2 - \frac{1}{12} = \frac{23}{12}$, dakle uzimamo $x_1 = 1,9$. Problem je sad da je $x_1^2 > N = 2$, dok je pretpostavka metode da je trenutna aproksimacija uvijek manja od točne vrijednosti. Stoga se u takvom slučaju zadnja znamenka odabrane nove aproksimacije smanjuje za 1 sve dok ne dobijemo aproksimaciju čiji kvadrat je manji od N . U našem slučaju stoga $x_1 = 1,9$ zamjenjujemo s $x_1 = 1,4$ (točno na jednu decimalu) pa je $b_1 = 2 - 1,4^2 = 0,04$;
- $x_2 = 1,4 + \frac{0,04}{2,8} - \frac{\left(\frac{0,04}{2,8}\right)^2}{2\left(1,4+\frac{0,04}{2,8}\right)} = 1,41421356 \dots$. Iako bi sad izvorni algoritam uzeo samo $x_2 = 1,41$ (točno na dvije decimalne), uočimo da egzaktni x_2 kojeg smo dobili ima grešku tek na devetoj decimali.

U klasično doba Indijci su razmatrali razne diofantske jednadžbe, posebice jednadžbu koju danas nazivamo Pellovom. **Pellova jednadžba** $nx^2 + 1 = y^2$ ime nosi po engleskom matematičaru Johnu Pellu, koji ju je opisao u 17. st., no s njom se bavio već Brahmagupta, koji je otkrio Brahmaguptin identitet

$$(a^2 + nb^2)(c^2 + nd^2) = (ac \mp nbd)^2 + n(ad \pm bc)^2$$

i koristio ga za zaključivanje o rješenjima Pellovih jednadžbi.

Brahmaguptine metode za rješavanje Pellove jednadžbe je dalje razvio najveći matematičar klasičnog indijskog razdoblja, **Bhāskara II.** (1114.–1185.). On je otkrio jedan algoritam za računanje rješenja Pellove jednadžbe (tzv. „ciklička metoda”) te je u svom djelu *Siddhānta-sīromāṇi* tako dobio rješenje $(x, y) = (226.153.980, 1.766.319.049)$ jednadžbe $61x^2 + 1 = y^2$. Napisao je dva čisto matematička djela: *Līlāvati* (smatra se da ga je napisao da utješi kćer oko proročanstva da se nikad neće udati) i *Bijaganita*. Iz njih saznajemo da je Bhaskara II. primjerice znao da jednadžba $x^2 = 9$ ima dva rješenja, detaljno je opisao račun u dekadskom pozicijskom sistemu (kod njega dijeljenje s nulom

kao rezultat daje beskonačno), a poznao je i adicijski teorem za sinus. Iz *Līlāvati* se vidi i da su mu bila poznata pravila za računanje kombinacija i permutacija. Tu nalazimo zadatke poput „Kako naći broj mogućih rasporeda otvorenih i zatvorenih vrata u zgradi s 8 vrata?” i „Koliko varijacija boga Sambhu-a se dobije raspoređivanjem 10 atributa u njegovih 10 ruku?”, iz čijih rješenja se vidi da je razumio da je broj permutacija od n elemenata jednak $n!$, odnosno varijacija s ponavljanjem dva elementa (uređenih n -torki dvočlanog skupa) 2^n . Općenito, stari Indijci su se najkasnije u 6. st. pr. Kr. bavili i prebrajanjem različitih rasporeda. Tada je Sushruta u jednom tekstu nabrojio moguće okuse koji nastaju iz 6 osnovnih (slatko, kiselo, slano, ljuto, gorko, trpko), a tekst *Brhatsamhita* iz 6. st. A.D. opisuje kako dobiti mirise miješanjem 4 od 16 sastojaka u različitim omjerima, te se navodi 1820 mogućnosti odabira 4 od 16 sastojaka, što zasigurno nije dobiveno direktnim prebrojavanjem. Stoga možemo reći da u staroindijskoj matematici nalazimo temelje **kombinatorike**.



Matematika u staroj Indiji...

... kao i kod drugih starih civilizacija ne sadrži dokaze. Prvo razdoblje indijske matematike je doba *sulvasutri*, sredinom prvog tisućljeća pr. Kr. U *sulvasutrama*, dodacima *vedama*, nalazimo razne geometrijske konstrukcije, bez razlikovanja egzaktnih i aproksimativnih. Tijekom prijelaza era postepeno se počinje razvijati dekadski pozicijski sustav s nulom, koji je razvijen najkasnije do 9. st., vjerojatnije već prije 4. st. Razdoblje vrhunca indijske matematike je period 5.–12. st., u kojem su indijski matematičari uveli račun polutetiva, dakle sinusa i dalje razvili trigonometrijske tehnike, ali isključivo u svrhu astronomije. Uvedena je i nula kao broj, a uz razvoj tehnika i pravila računanja, doprinose su dali i temeljima kombinatorike, iterativnim metodama za korjenovanje, metodama interpolacije i metodama rješavanja Pellove jednadžbe. Najznačajniji matematičari tog razdoblja su *Aryabhata stariji* (5./6. st.), *Brahmagupta* (7. st.) i *Bhaskara II.* (12. st.).

Bibliografija

- [1] Anglin, W.S., Lambek, J., *The Heritage of Thales*. Springer Verlag, New York, 1995.
- [2] Arcavi, A., Bruckheimer, M., Ben-Zvi, R., *Maybe a mathematics teacher can profit from the study of the history of mathematics*. For the learning of mathematics, 3(1) 30—37, 1982. <https://flm-journal.org/Articles/6FAFDB941F710C1E323C3DBE0C9B85.pdf>
- [3] Assad Ebrahim, *The Prehistoric Origins of Mathematics*, <https://mathscitech.org/articles/mathematics-prehistory>
- [4] Bagni, G. T., *Infinite series from history to mathematics education*. Colección Digital Eudoxus, 2009. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:8024217>
- [5] Brückler, F.M., *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Arithmetik, Geometrie, Algebra, Zahlentheorie und Logik*. Springer Spektrum, Berlin, 2017.
- [6] <https://hrcak.srce.hr/clanak/394554>
- [7] <https://hrcak.srce.hr/clanak/492946>
- [8] <https://hrcak.srce.hr/clanak/403998>
- [9] Brückler, F.M., *Eudoksova metoda iscrpljivanja*. Osječki matematički list 24(2) 133–146, 2024. <https://hrcak.srce.hr/clanak/492045>
- [10] Brückler, F.M., *Kratka povijest redova*. Osječki matematički list 25(2) 179–196, 2025. <https://hrcak.srce.hr/clanak/497361>
- [11] Brückler, F. M, Stilinović, V., *From Friezes to Quasicrystals: A History of Symmetry Groups*. U: Bharath Sriraman (ur.), *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice, 1823–1863*. Springer, 2025.
- [12] Bütüner, S. Ö., Baki, A., *The use of history of mathematics in the mathematics classroom: An action study*. International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology, 8(2) 92–117, 2020. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1255535.pdf>
- [13] Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations*. Dover publications, inc.
- [14] Schuyler Cammann, *The Evolution of Magic Squares in China*. Journal of the American Oriental Society Vol. 80, No. 2 (1960), 116–124
- [15] Arnold Buffum Chace, Henry Parker Manning, Raymond Clare Archibald (ur.): *The Rhind Mathematical Papyrus*. Mathematical Association of America, 1927.

- [16] Stephen Chrisomalis Department of Anthropology: The Comparative History of Numerical Notation. PhD thesis, 2003.
- [17] Dejić, M., Mihajlović, A. M., *History of Mathematics and Teaching Mathematics*. Teaching Innovations 27(3) 15–30, 2014.
- [18] Doz, D., *Using the History of Mathematics as a Motivational Factor in Teaching Math*. 2021. <https://doi.org/10.46793/NNU21.471D>
- [19] Ernest, P., *The History of Mathematics in the Classroom*. Mathematics in School 27(4) 25–31, 1998. <https://www.jstor.org/stable/30211871>
- [20] Eschenburg, J.-K., *Sternstunden der Mathematik*. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2017.
- [21] Faustmann, G., *Classroom experiences with the history of mathematics*. Proceedings of the History and Pedagogy of mathematics, 275—285, 2010. <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF11026.pdf>
- [22] Fauvel, J., *Using History in Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics 11(2) 3–6, 1991. <https://www.jstor.org/stable/40248010>
- [23] Fernández, J., *Reflexions on Leibniz' Proof of the Fundamental Theorem of Calculus*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4804.2405>.
- [24] Friberg, J., *A remarkable collection of Babylonean mathematical texts*. Notices of the AMS 55(9) 1076–1086
- [25] Furinghetti, F., *Teacher education through the history of mathematics*. Educational Studies in Mathematics 66(2) 131–143, 2007. https://www.researchgate.net/publication/227242260_2007_-_Teacher_education_through_the_history_of_mathematics
- [26] González-Velasco, E. A., *Journey through Mathematics*- Springer, New York, 2011.
- [27] Göktepe, S., Özdemir, A. S., *An example of using history of mathematics in classes*. European Journal of Science and Mathematics Education 1(3) 125–136, 2013.
- [28] Heath, T., *A History of Greek Mathematics, Vol. I*. Oxford at the Clarendon Press, 1921.
- [29] Heath, T., *A History of Greek Mathematics, Vol. II*. Oxford at the Clarendon Press, 1921.
- [30] Heiede, T., Why teach history of mathematics?. The mathematical gazette 76(475) 151–157, 1992.
- [31] J. Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin* . Springer, 2002.
- [32] Imhausen, A. Ancient Egyptian mathematics: New perspectives on old sources. The Mathematical Intelligencer 28, 19–27 (2006). <https://doi.org/10.1007/BF02986998>
- [33] Konforowitsch, A. G., *Guten Tag, Herr Archimedes*. Verlag Harri Deutsch, 1996.

- [34] Lam Lay Yong, *Zhang Qiujuan Suanjing (The Mathematical Classic of Zhang Qiujuan). An Overview*. Archive for History of Exact Sciences, 50 (1997), 201–240.
- [35] Lerman, S. (ur.), *The Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, 2020.
- [36] Lim, Y. S., Chapman, E., *Effects of using history as a tool to teach mathematics on students' attitudes, anxiety, motivation and achievement in grade 11 classrooms*. Educational Studies in Mathematics, 90(2), 189–212, 2015. https://www.researchgate.net/publication/281364455_Effects_of_using_history_as_a_tool_to_teach_mathematics_on_students'_attitudes_anxiety_motivation_and_achievement_in_grade_11_classrooms
- [37] Liu, P. H., *Connecting Research to Teaching: Do Teachers Need to Incorporate the History of Mathematics in Their Teaching?*. The Mathematics Teacher 96(6) 416–421, 2003. https://www.researchgate.net/publication/347045022_Connecting_Research_to_Teaching_Do_Teachers_Need_to_Incorporate_the_History_of_Mathematics_in_Their_Teaching
- [38] Medić, D., *Povijest brojeva i njihove notacije*. Diplomski rad, PMF-MO, Zagreb, 2011.
- [39] Neugebauer, O., *Mathematische Keilschrift-Texte*. Springer-Verlag, 1972.
- [40] Özdemir, A. S., Göktepe, S., Kepçeoğlu, I. *Using mathematics history to strengthen geometric proof skills*. Procedia-Social and Behavioral Sciences 46 1177–1181, 2012. <https://openaccess.marmara.edu.tr/bitstreams/827a9bcf-06a1-43c1-9492-648c52fc0737/download>
- [41] Panasuk, R.M., Horton, L.B., *Integrating History of Mathematics into Curriculum: What are the Chances and Constraints?*. International Electronic Journal of Mathematics Education 7(1) 3–20, 2012.
- [42] Panasuk, R.M., Horton, L.B., *Integrating History of Mathematics into the Classroom: Was Aristotle Wrong?*. Journal of Curriculum and Teaching 2(2) 37–46, 2013.
- [43] K. Shen, J. N. Crossley, A. Wah-Cheung Lun, H. Liu, *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary*. Oxford Univ. Press, 1999.
- [44] Smith, D.E., Karpinski, L.C., *The Hindu-Arabic Numerals*, 2007. <https://www.gutenberg.org/files/22599/22599-h/22599-h.htm> (pristupljeno 11.4.2025.)
- [45] Şahin, Ö., Danacı, D., *Investigating the effect of history-of-mathematics activities on middle-grade students' mental computation and opinions: an action research*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1–38, 2020. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1857859>
- [46] Stilwell, J., *Mathematics and its history*. Springer Verlag, 2001.
- [47] Van Brummelen, Glen. *The mathematics of the heavens and the earth: the early history of trigonometry*. Princeton University Press, 2009.
- [48] Winterrink, J., *THE APOLLONIUS TANGENCY PROBLEM*. Pi Mu Epsilon Journal 6(10) 582–592, 1979.

- [49] Wußing, H., *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton*. Springer, Leipzig, 2008.

Kazalo

π , 8, 11, 45, 52, 55, 59, 65, 66, 71

Ćin Ćiušao, 68

Elementi, 16

Almagest, 59

Devet poglavlja umijeća računanja, 65–67

Elementi, 15, 17, 27, 34, 37

I Čing, 63

Palimpsest, 51

mouseion, 37, 46, 57

quadrivium, 16

quipu, 1

žetoni, 1

abakus, 62, 64

adicijski teorem, 60

Akademija, 23, 32

aksiom, 37, 38

aksiom, Arhimedov, 34, 35, 52

Aleksandar Makedonski, 23, 33, 70

Aleksandar Veliki, 35, 37

Aleksandrija, 37

alfabet, grčki, 15

algebra, 7, 11

algoritam, Euklidov, 20, 44, 45

algoritam, Fibonaccijev, 6

algoritam, Hornerov, 68

Anaksagora iz Klazomena, 26

analitička geometrija, 48

Antifont, 26, 33

Apolonije iz Perge, 35, 47

Apolonijev problem, 50

Arhimed iz Sirakuze, 34, 51–57, 67

Arhimedov teorem o krugu, 52

Arhimes iz Sirakuze, 54

Arhita iz Tarenta, 30, 33

Aristarh sa Samosa, 57

Aristotel, 1, 17, 23, 33, 37

aritmetika, 4, 10, 16, 17, 71

aritmetika, teorijska, 16

aritmetika, u Egiptu, 4

Aryabhata I., 71

Bernoulli, Jacob, 54

Bhaskara II., 73, 74

Bošković, Ruđer Josip, 61

Boethius, Anicius Manlius Severinus, 16

Brahmagupta, 72, 73

broj, 1, 19

broj, iracionalan, 19, 20

broj, iracionalni, 70

broj, negativan, 64, 72

broj, neparan, 17

broj, paran, 17

broj, prirodan, 4

broj, prost, 44, 46

broj, savršen, 17

broj, složen, 44

brojevi, figurativni, 17

brojevi, prijateljski, 17

brojevni sustav, akrofonski, 15, 23

brojevni sustav, alfabetski, 58

brojevni sustav, atički, 15, 23

brojevni sustav, babilonski, 9, 10

brojevni sustav, dekadski, 3, 9, 15, 23

brojevni sustav, dekadski pozicijski, 64, 71

brojevni sustav, egipatski, 3

brojevni sustav, grčki, 23

brojevni sustav, pozicijski, 9

brojevni sustav, rimski, 62

brojevni sustav, seksagezimalni, 9, 10

brojka, 1, 3

brojke, štapičaste, 64

brojke, akrofonске, 23

brojke, brahmanske, 70

brojke, glagoljske, 23

brojke, grčke, 15

brojke, grčke alfabetske, 23

brojke, hijeratske, 4

brojke, hijeroglifske, 3

brojke, klinaste, 9

brojke, miletske, 23

Džang Heng, 66

- dedukcija, 32, 33, 37
- definicija, 37
- Demokrit iz Abdere, 23
- Descartes, René, 43
- Diofant Aleksandrijski, 58, 61
- Diogenes Laertius, 16
- dokaz, 33

- Egipat, 3
- egipatski zapis razlomka, 6, 51, 62
- egipatskih zapis razlomka, 58
- elipsa, 48, 50
- Eratosten, 25
- Eratosten iz Kirene, 46, 47
- Eratosten iz Sirakuze, 51
- Eudoks iz Knida, 52
- Eudoks s Knida, 33–35, 37, 43
- Euklid Aleksandrijski, 37, 38, 41, 50
- Euklidov algoritam, 21
- Euler, Leonhard, 17, 52

- Fibonacci, 6
- formula, Brahmaguptina, 72
- formula, Heronova, 60
- formula, trapezna, 9

- Gauß, Carl Friedrich, 44
- Gauß, Carl Friedrich, 43
- Gaußova metoda eliminacija, 66
- geometrija, 7, 11, 16, 18, 70
- geometrija, sferna, 38, 57–59
- geometrijska algebra, 18, 23–25, 35, 48

- helenizam, 37
- helenizam, postklasični, 57
- Heron iz Aleksandrije, 60
- Heron Aleksandrijski, 12, 58
- Heronova metoda, 12, 66, 72
- Hiparh iz Nicehe, 58
- Hiparh iz Niceje, 57, 59
- Hiparus iz Metaponta, 19, 20
- hiperbola, 35, 36, 48, 50
- Hipija iz Elide, 29
- Hipokrat s Hiosa, 27–29, 37, 45, 56

- indukcija, 33
- infinitesimalni račun, 23, 33
- integral, 24
- interpolacija, 72
- iracionalnost, 20, 45

- iterativna metoda, 12, 66

- jednadžba, 7, 11, 24
- jednadžba, diofantska, 61, 69, 73
- jednadžba, kubna, 26, 68
- jednadžba, kvadratna, 11
- jednadžba, linearna, 7, 25, 65
- jednadžba, Pellova, 52, 73

- kategorički sud, 33
- Kepler, Johannes, 19, 56
- kineski teorem o ostacima, 68
- Klaudije Ptolemej, 59, 60, 71
- kombinacija, 74
- kombinatorika, 74
- konike, 35, 47, 48, 61
- konstrukcije ravnalom i šestarom, 24, 32, 38
- kontinuum, 23
- kontradikcija, 33
- konvergenција, 23
- koordinate, polarne, 54
- korjenovanje, 12, 66, 67, 72
- kosinus, 72
- kost iz Išanga, 1
- kost iz Lebomba, 1
- Kroneckerov teorem, 17
- kružnica, 51
- kružnice, Apolonijeve, 51
- krug, 8, 67, 70
- kugla, 53
- kut, pravi, 38
- kvadratisa, 29
- kvadratna iracionalnost, 44
- kvadratne iracionalnosti, 34
- kvadratura odsječka parabole, 54

- Leibniz, Gottfried Wilhelm, 52
- Leonardo iz Pise, 6
- limes, 26, 33
- Liu Hui, 67
- logika, 33
- logika, matematička, 33
- logistika, 16

- Mahavira, 71
- matematička analiza, 23
- matematika, 33
- matematika, numerička, 12, 72
- matrica, 66

- Menehmo, 35, 47
 Menelaj Aleksandrijski, 58
 metoda ekshaustije, 33, 34, 44, 45, 52–54
 metoda, Heronova, 12, 60, 67, 73
 mezolabij, 47
 mirijada, 23, 51
 mjesec, 27
 mjesec, Hipokratov, 27, 28
 mnogokut, 19
 mnogokut, pravilni, 19, 43

 nepoznanica, 7
 Newton, sir Isaac, 52, 54
 Newtonova metoda, 72
 Nikomah iz Geraze, 17
 notacija, 61
 nula, 9, 10, 58, 64, 71, 72
 numerička matematika, 67, 68
 numerička matematika, 66, 68

 omjer, 34
 omjer zlatnog reza, 20, 21, 41
 omjer, trostruki, 46
 optimizacija, 60
 osnovni teorem aritmetike, 44
 Ovu tvrdnju o vanjskom kutu trokuta znali
 su još pitagorejci., 29

 papirus, Moskovski, 3, 4, 7, 8
 papirus, Rhindov, 3, 4, 6–8
 Papus Aleksandrijski, 29, 56
 Papus iz Aleksandrije, 61
 parabola, 35, 48, 49, 54
 parabole, 36
 paradoksi, Zenonovi, 23
 Pell, John, 73
 permutacija, 63, 74
 peti Euklidov postulat, 38
 Pitagora sa Samosa, 16, 19
 pitagorejci, 8, 16–20, 30, 33, 37
 pitagorejske trojke, 70
 Pitagorin poučak, 65, 70
 Pitagorin poučak, 7, 17, 18, 27
 Platon, 23, 29, 30, 32, 33, 35
 platonizam, 32
 Platonova tijela, 32
 Plimpton 322, 12, 57
 poliedar, 19
 poliedar, pravilni, 19, 32, 46
 poliedri, polupravilni, 56
 popločavanje, pravilno, 19
 postulat, 37, 38
 postulat o paralelama, 38, 59
 poučak, kosinusov, 41
 poučak, Pitagorin, 12, 17, 59, 60
 poučak, Talesov, 60
 pravci, paralelni, 38
 princip homogenosti, 25
 princip poluge, 52, 53
 problem duplikacije kocke, 25
 problem kvadrature kruga, 25–28
 problem trisekcije kuta, 25, 28, 30, 56
 problem udvostručenja kocke, 25, 29, 30, 35,
 36, 47
 problem, delijski, 25
 problem, Heronov, 60
 projekcija, stereografska, 57
 Proklo, 15–17, 35, 59
 proporcionala, srednja, 43
 proporcionalnost, 34, 65

 računanje, 10
 računanje, 1, 4
 racionalnost, 45
 razlomak, 4, 5, 19, 58
 razlomak, jedinični, 5, 58
 razmjer, 34
 red, 23
 red, geometrijski, 23, 55
 relativno prosti brojevi, 44
 Robert iz Chestera, 72
 rovaš, 1
 rukopis Bakhshali, 71, 72

 silogizam, 33
 sinus, 58, 71, 72
 sličnost, 43
 spirala, Arhimedova, 54
 spirala, Teodorova, 30
 srednje geometrijske proporcionalne, 34
 srednje geometrijske proporcionalne, 29, 30,
 35, 47
 stomahion, 51
 sulbasutre, 70
 sumjerljivost, 20, 21, 34, 45
 sumjerljivost, kvadratna, 45
 Sun Dzi, 68
 sustav linearnih jednadžbi, 66

Sylvester, James Joseph, 6

tablice tetiva, 57

Tales iz Mileta, 16, 33

Talesov poučak, 16

tautologija, 33

težiššte, 52

Teetet Atenski, 30, 32, 34

Teetet iz Atene, 37

Teodor iz Kirene, 30

Teon iz Smirne, 25

teorem, Brahmaguptin, 72

teorem, Euklidov, 44

teorem, Fibonaccijev, 6

teorem, Menelajev, 58

teorem, Papusov, 61

teorem, Ptolemejev, 60

teorem, Talesov, 12

teorija brojeva, 16, 44, 68, 70

teorija omjera i razmjera, 34

tetiva, 71

tetive, 57–60, 71

tijela, Arhimedova, 56

točka, 38

tri klasična problema, 25, 27

trigonometrija, 12, 57, 58, 71

trigonometrija, sferna, 58

trisektrisa, 29, 30

trojka, pitagorejska, 8, 12, 17

trojno pravilo, 65

trokut, sferni, 58

van Roomen, Adriaan, 51

varijacija, 63

Viète, François, 51

YBC 7289, 12

zadatak 100 ptica, 68

zajednička mjera, 20

zakoni klasične logike, 33

Zenon iz Eleje, 23

zlatni rez, 20, 21