PMF-Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

Maja Starčević

Sustavi diferencijalnih jednadžbi

Skripta

Zagreb, 2019.

Predgovor

Skripta je napisana prema predavanjima iz kolegija *Sustavi diferencijalnih jednadžbi*. Kolegij je prvi kolegij iz modula *Dinamički sustavi i obične diferencijalne jednadžbe* koji obuhvaća i kolegij *Dinamički sustavi*. Modul se održava u sklopu Diplomskog studija primijenjene matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu.

Cilj kolegija je upoznati studente s osnovama teorije sustava običnih diferencijalnih jednadžbi. Pitanja kojima se kolegij bavi su pretpostavke na parametre sustava koje osiguravaju egzistenciju rješenja inicijalnih problema, jedinstvenost rješenja te maksimalnu proširivost intervala egzistencije. Obrađena je i teorija specijalnih vrsta sustava kao što su linearni sustavi, Floquetovi ili periodički sustavi te autonomni sustavi. Kolegij daje uvod u teoriju stabilnosti sustava, odnosno kvalitativnu analizu sustava koja se detaljnije obrađuje u sklopu kolegija *Dinamički sustavi*.

Za uspješno praćenje kolegija potrebno je posjedovati znanja iz kolegija *Matematička analiza I, II*, *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, *Linearna algebra I, II*. Kolegij se prirodno nastavlja na kolegij *Obične diferencijalne jednadžbe* te je poželjno poznavanje osnovnih metoda za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi.

Sadržaj

Predgovor **i**

1 Egzistencija, jedinstvenost i proširivost rješenja **1**
1.1 Opći sustav diferencijalnih jednadžbi 1
1.2 Egzistencija rješenja inicijalnog problema uz pretpostavke Lipschitz-neprekidnosti 4
1.3 Proširivost lokalnog rješenja 16
1.4 Apriorna ocjena rješenja 22
1.5 Korektnost inicijalnog problema 26
1.6 Neprekidna diferencijabilnost rješenja u odnosu na početni uvjet . . . 29
1.7 Egzistencija rješenja uz pretpostavke neprekidnosti 33
1.8 Proširivost rješenja pomoću Teorema o apriornim ocjenama 46

2 Sustavi linearnih jednadžbi **51**
2.1 Egzistencija rješenja 51
2.2 Homogen sustav i fundamentalna matrica 52
2.3 Eksponencijalna matrična funkcija 58
2.4 Nehomogeni sustav 64
2.5 Stabilnost trivijalnog rješenja 67
2.6 Periodički sustavi 72

3 Autonomni sustavi **78**
3.1 Fazni dijagram 78
3.2 Stabilnost kritičnih točaka i Ljapunovljeva funkcija 97

Literatura **104**

Poglavlje 1

Egzistencija, jedinstvenost i proširivost rješenja

1.1 Opći sustav diferencijalnih jednadžbi

Promatramo za početak općeniti sustav s m jednadžbi i m nepoznatih funkcija:

$$
\begin{aligned}
&F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(\nu_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(\nu_m)}) = 0 \ , \\
&F_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(\nu_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(\nu_m)}) = 0 \ , \\
&\vdots \\
&F_m(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(\nu_2)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(\nu_m)}) = 0 \ . \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

Primjećujemo da sustav opisuje vezu između nezavisne varijable x, m funkcija $y_1 = y_1(x), \ldots, y_m = y_m(x)$ i njihovih derivacija. Na vektorsku funkciju $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_m)$ ćemo kasnije u konkretnim situacijama zadavati neki uvjet poput neprekidnosti, diferencijabilnosti, Lipschitz-neprekidnosti i sl. U pravilu pretpostavljamo da se radi o barem neprekidnoj funkciji. Naravno, mogli bismo gledati još općenitije sustave u kojima se broj jednadžbi ne podudara s brojem nepoznatih funkcija, ali ovdje se ipak ograničavamo samo na sustave oblika (1.1).

Pod rješenjem sustava (1.1) podrazumijevamo vektorsku funkciju $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ koja zadovoljava sve jednadžbe sustava, definirana je na nekom otvorenom (povezanom) intervalu I te je neprekidno diferencijabilna na tom intervalu. Također, skup $\{(x, y_1(x), y_1'(x), \ldots, y_1^{(\nu_1)}(x), \ldots, y_m(x), y_m'(x), \ldots, y_m^{(\nu_m)}(x)) \ : \ x \in I\}$ mora pripadati domeni funkcije $\boldsymbol{F}$. Dakle, važno je precizirati domenu funkcije koja određuje sustav (ponekad naime sužavamo prirodnu domenu funkcije $\boldsymbol{F}$).

Sustav (1.1) ipak nije još posve prikladan za razmatranje. Umjesto njega želimo promatrati sustav koji je normalnog tipa. Objasnimo taj pojam za početak na diferencijalnoj jednadžbi n-tog reda. Ona se općenito može zapisati kao

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \ . \qquad (1.2)$$

S druge strane, diferencijalna jednadžba n-tog reda normalnog tipa je jednadžba oblika

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1.3}$$

Dakle, u jednadžbi normalnog tipa je najviša derivacija eksplicitno izražena.

Možemo se zapitati je li moguće svaku diferencijalnu jednadžbu oblika (1.2) zapisati kao jednadžbu oblika (1.3). Ako imamo jednadžbu oblika (1.3), ona se može naravno zapisati kao jednadžba oblika (1.2), pri čemu je $F\colon \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ definirana s $F(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) = y_{n+1} - f(x, y_1, \ldots, y_n)$. Obrat međutim općenito ne vrijedi. Npr., ako imamo jednadžbu

$$(y'')^2 - (y')^2 + y + 3x - 2 = 0 \ ,$$

onda vrijedi

$$y'' = \sqrt{(y')^2 - y - 3x + 2}$$

ili

$$y'' = -\sqrt{(y')^2 - y - 3x + 2} \ .$$

Dakle, jednadžba normalnog tipa nije jednoznačno određena.

Nadalje ćemo definirati kada je sustav diferencijalnih jednadžbi normalnog tipa. Takav sustav se mora moći zapisati u obliku

$$\begin{aligned}
y_1^{(\nu_1)} &= f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(\nu_2-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(\nu_m-1)}), \\
y_2^{(\nu_2)} &= f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(\nu_2-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(\nu_m-1)}), \\
&\vdots \\
y_m^{(\nu_m)} &= f_m(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1-1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(\nu_2-1)}, \ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(\nu_m-1)}).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Zaključujemo da se u normalnom sustavu najviše derivacije traženih funkcija ne nalaze na desnoj strani sustava.

Sada ćemo sustav (1.4) još pojednostaviti. Naime, uvest ćemo supstitucije pomoću kojih ćemo se riješiti derivacija na desnoj strani sustava. Taj niz supstitucija je zadan na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&\Phi_{11} = y_1, \ \ \Phi_{12} = y_1', \ \ \ldots \ \ , \ \ \Phi_{1\nu_1} = y_1^{(\nu_1-1)} \ , \\
&\Phi_{21} = y_2, \ \ \Phi_{22} = y_2', \ \ \ldots \ \ , \ \ \Phi_{2\nu_2} = y_2^{(\nu_2-1)} \ , \\
&\vdots \\
&\Phi_{m1} = y_m, \ \ \Phi_{m2} = y_m', \ \ \ldots \ \ , \ \ \Phi_{m\nu_m} = y_m^{(\nu_m-1)} \ .
\end{aligned}$$

Kad zamijenimo funkcije $y_1, \ldots, y_m$ u sustavu (1.4) s funkcijama Φ_{ij}, dobivamo sljedeći sustav:

$$\Phi_{11}' = \Phi_{12} \ ,$$

$$
\begin{aligned}
&\Phi'_{12} = \Phi_{13} \ , \\
&\vdots \\
&\Phi'_{1(\nu_1-1)} = \Phi_{1\nu_1} \ , \\
&\Phi'_{1\nu_1} = f_1(x, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{1\nu_1}, \ldots, \Phi_{m1}, \Phi_{m2}, \ldots, \Phi_{m\nu_m}) \ , \\
&\Phi'_{21} = \Phi_{22} \ , \\
&\Phi'_{22} = \Phi_{23} \ , \\
&\vdots \\
&\Phi'_{2(\nu_2-1)} = \Phi_{2\nu_2} \ , \\
&\Phi'_{2\nu_2} = f_2(x, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{1\nu_1}, \ldots, \Phi_{m1}, \Phi_{m2}, \ldots, \Phi_{m\nu_m}) \ , \\
&\vdots \\
&\Phi'_{m1} = \Phi_{m2} \ , \\
&\Phi'_{m2} = \Phi_{m3} \ , \\
&\vdots \\
&\Phi'_{m(\nu_m-1)} = \Phi_{m\nu_m} \ , \\
&\Phi'_{m\nu_m} = f_m(x, \Phi_{11}, \Phi_{12}, \ldots, \Phi_{1\nu_1}, \ldots, \Phi_{m1}, \Phi_{m2}, \ldots, \Phi_{m\nu_m}) \ . \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Primijetimo, ako je dano rješenje $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ sustava (1.4), onda definirajući funkcije Φ_{ij}, kao što je zadano supstitucijama, vidimo da je funkcija $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_{11}, \ldots, \Phi_{1\nu_1}, \ldots, \Phi_{m1}, \ldots, \Phi_{m\nu_m})$ rješenje sustava (1.5). Obratno, ako je $\boldsymbol{\Phi} = (\Phi_{11}, \ldots, \Phi_{1\nu_1}, \ldots, \Phi_{m1}, \ldots, \Phi_{m\nu_m})$ rješenje sustava (1.5), onda definiramo

$$\boldsymbol{y} = (\Phi_{11}, \Phi_{21}, \ldots, \Phi_{m1})$$

i očito je da je funkcija $\boldsymbol{y}$ rješenje sustava (1.4). Dakle, svakom rješenju sustava (1.4) odgovara jedno rješenje sustava (1.5) i obratno. Stoga umjesto sustava (1.4) možemo promatrati sustav (1.5).

Sustav (1.5) je specijalan slučaj sustava prvog reda oblika

$$
\begin{aligned}
&y'_1 = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \ , \\
&y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \ , \\
&\vdots \\
&y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \ .
\end{aligned}
$$

Uz oznake $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ i $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ kraće ga zapisujemo kao

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \ . \qquad (1.6)$$

Odsad nadalje bavit ćemo se sustavima oblika (1.6), odnosno pripadnim inicijalnim problemima.

Primjer 1.1 *Zapišimo sustav*

$$\begin{aligned} y_1''' - y_2^2 + y_3' &= 0 \ , \\ y_2^2 - y_2'' + y_3 - x &= 0 \ , \\ y_1 - y_2' - 3y_3''' - y_3 + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

kao sustav oblika (1.5).

Prvo ćemo dakle zapisati zadani sustav u obliku

$$\begin{aligned} y_1''' &= y_2^2 - y_3' \ , \\ y_2'' &= y_2^2 + y_3 - x \ , \\ y_3''' &= \tfrac{1}{3}(y_1 - y_2' - y_3 + x^2) \ . \end{aligned}$$

Sada uvodimo supstitucije

$$\begin{aligned} &\Phi_{11} = y_1, \ \ \Phi_{12} = y_1', \ \ \Phi_{13} = y_1'' \ , \\ &\Phi_{21} = y_2, \ \ \Phi_{22} = y_2' \ , \\ &\Phi_{31} = y_3, \ \ \Phi_{32} = y_3', \ \ \Phi_{33} = y_3'' \ , \end{aligned}$$

pomoću kojih dobivamo sustav

$$\begin{aligned} &\Phi_{11}' = \Phi_{12} \ , \\ &\Phi_{12}' = \Phi_{13} \ , \\ &\Phi_{13}' = \Phi_{21}^2 - \Phi_{32} \ , \\ &\Phi_{21}' = \Phi_{22} \ , \\ &\Phi_{22}' = \Phi_{21}^2 + \Phi_{31} - x \ , \\ &\Phi_{31}' = \Phi_{32} \ , \\ &\Phi_{32}' = \Phi_{33} \ , \\ &\Phi_{33}' = \frac{1}{3}(\Phi_{11} - \Phi_{22} - \Phi_{31} + x^2) \ . \end{aligned}$$

1.2 Egzistencija rješenja inicijalnog problema uz pretpostavke Lipschitz-neprekidnosti

Sada želimo dokazati da rješenje sustava (1.6) uz odgovarajuće pretpostavke na desnu stranu sustava postoji. Preciznije, dokazat ćemo da postoji rješenje pripadnog inicijalnog problema koji možemo zapisati na sljedeći način:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \ ,$$

$$\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)} \ . \tag{1.7}$$

Pritom je $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)}) = (x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ neka točka iz domene funkcije $\boldsymbol{f}$.

Prisjetimo se, na kolegiju "Obične diferencijalne jednadžbe" dokazano je da inicijalni problem

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \ , \\ y(x_0) &= y_0 \ , \end{aligned}$$

pridružen običnoj diferencijalnoj jednadžbi, ima jedinstveno rješenje na nekom otvorenom intervalu u $\mathbb{R}$ oko x_0, ako je funkcija f neprekidna i Lipschitz-neprekidna po varijabli y na nekom zatvorenom pravokutniku u $\mathbb{R}^2$ oko točke (x_0, y_0). Najširi (povezani) interval oko x_0 na kojem rješenje postoji zovemo maksimalni interval egzistencije. Rješenje se dobiva kao limes Picardovih iteracija koje uniformno konvergiraju tom rješenju.

Kad je riječ o sustavu diferencijalnih jednadžbi, vrijedi analogan rezultat o egzistenciji i jedinstvenosti te je dokaz te tvrdnje veoma sličan dokazu u slučaju $n = 1$.

Prije iskaza samog teorema, ponovimo definiciju Lipschitz-neprekidnosti.

Definicija 1.1 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Zadana je funkcija $f = f(x, \boldsymbol{y})\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija f Lipschitz-neprekidna po varijabli y_i na Ω, $i = 1, \ldots, n$, ako postoji konstanta $L_i \geq 0$ takva da je*

$$|f(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \overline{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) - f(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \widetilde{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)| \leq L_i |\overline{y}_i - \widetilde{y}_i| \ ,$$

za svako $(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \overline{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$, $(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \widetilde{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \in \Omega$. Vektorska funkcija $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je Lipschitz-neprekidna po varijabli y_i na Ω ako joj sve komponente imaju to svojstvo.

Sad ćemo pretpostaviti da je skup Ω pravokutnog oblika. Dakle, skup je (ako je otvoren) oblika

$$\Omega = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |x - \alpha| < a, \ |y_i - \beta_i| < b_i, \ i = 1, \ldots, n\} \ ,$$

za neku točku $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ i neke konstante $a > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. To povlači da ako su zadane točke $(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$, $(x, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n) \in \Omega$, onda će i sve točke oblika $(x, y_1, \ldots, y_n)$ gdje je $y_i \in \{\overline{y}_i, \widetilde{y}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ biti unutar skupa Ω. Do istog zaključka dolazimo i ako umjesto Ω gledamo zatvoreni pravokutnik

$$\overline{\Omega} = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |x - \alpha| \leq a, \ |y_i - \beta_i| \leq b_i, \ i = 1, \ldots, n\} \ .$$

Pretpostavimo sada da imamo zadan pravokutnik $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ (otvoren ili zatvoren) i da je zadana funkcija $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ koja je Lipschitz-neprekidna po svim y varijablama. Lipschitzovu konstantu po y_i varijabli označimo s L_i, $i = 1, \ldots, n$ i neka je $L = \max_{i=1}^{n} L_i$. Neka su dane točke $(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$, $(x, \widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n) \in \Omega$. Onda možemo izvesti i sljedeću nejednakost:

$$
\begin{aligned}
&|f(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n) - f(x, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \\
&\leq |f(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n) - f(x, \widetilde{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)| \\
&+|f(x, \widetilde{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n) - f(x, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \ldots, \widetilde{y}_n)| \\
&\leq L_1|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| + |f(x, \widetilde{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3, \ldots, \overline{y}_n) - f(x, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \overline{y}_3, \ldots, \overline{y}_n)| \\
&+|f(x, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \overline{y}_3, \ldots, \overline{y}_n) - f(x, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \widetilde{y}_3, \ldots, \widetilde{y}_n)| \\
&\leq L_1|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| + L_2|\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| + |f(x, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \overline{y}_3, \ldots, \overline{y}_n) - f(x, \widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2, \widetilde{y}_3, \ldots, \widetilde{y}_n)| \\
&\leq \cdots \leq L_1|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| + \cdots + L_n|\overline{y}_n - \widetilde{y}_n| \ .
\end{aligned}
$$

S obzirom da je Ω pravokutan, sve točke u kojima smo računali vrijednost funkcije f pripadaju Ω pa je račun stoga korektan. Iz prethodne nejednakosti dalje zaključujemo da vrijedi

$$
|f(x, \overline{\boldsymbol{y}}) - f(x, \widetilde{\boldsymbol{y}})| \leq L\|\overline{\boldsymbol{y}} - \widetilde{\boldsymbol{y}}\|_1 \ , \tag{1.8}
$$

gdje je $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, a $L > 0$ konstanta. Konstantu L zovemo Lipschitzovom konstantom funkcije f po y varijablama.

Sada konačno možemo iskazati Picardov teorem o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja inicijalnog problema (1.7) (rezultat je poznat i kao Picard-Lindelöfov teorem):

Teorem 1.1 (Picard) *Neka je $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ te neka su $a, b > 0$. Zadan je zatvoreni pravokutnik*

$$
R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \ |x - x_0| \leq a, \ \ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{(0)}\|_\infty \leq b\}
$$

i funkcija $\boldsymbol{f}\colon R \to \mathbb{R}^n$ koja je neprekidna na R i Lipschitz-neprekidna na R po svim y varijablama. Tada postoji $\delta > 0$ i jedinstvena neprekidno diferencijabilna funkcija $\boldsymbol{y}\colon \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \to \mathbb{R}^n$ takva da vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x)) \ , \ \ x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \ , \\
&\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)} \ .
\end{aligned}
$$

Pritom se δ može izabrati tako da vrijedi $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, gdje je $M > 0$ takav da je $\|\boldsymbol{f}\|_{\infty,R} \leq M$.

Dokaz. Za početak primijetimo da se zadani inicijalni problem

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \ , \\
&\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)}
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

može zapisati u ekvivalentnoj integralnoj formi

$$y_i(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{y}(t))dt \ , \quad x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \ , \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.10}$$

Dokaz ćemo provesti u nekoliko koraka:

1. Definirat ćemo niz Picardovih iteracija na intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, gdje je $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, i dokazat ćemo da su dobro definirane;

2. Dokazat ćemo da Picardove iteracije uniformo konvergiraju na $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, pri čemu ćemo ih zapisati u obliku parcijalnih suma nekog reda;

3. Prijeći ćemo na limes i dokazati da Picardove iteracije konvergiraju rješenju jednadžbe (1.10), odnosno inicijalnog problema (1.9);

4. Dokazat ćemo jedinstvenost rješenja.

Prvi korak:

Nulta Picardova iteracija je funkcija koja je konstantna i definirana je pomoću početnog uvjeta s

$$\boldsymbol{y}^{(0,P)}(x) = \boldsymbol{y}^{(0)} \ .$$

Svaku ostalu iteraciju definiramo koristeći prethodnu iteraciju. Za $m \geq 1$ imamo

$$\boldsymbol{y}^{(m,P)}(x) = \boldsymbol{y}^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}^{(m-1,P)}(t))dt \ . \tag{1.11}$$

Želimo sada dokazati da su sve iteracije dobro definirane za $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, tj. moramo dokazati da su svi podintegralni izrazi dobro definirani. Prva iteracija $\boldsymbol{y}^{(1,P)}$ je očito dobro definirana jer je $(x, \boldsymbol{y}^{(0)}) \in R$ za $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Također, za x iz zadanog intervala vrijedi

$$|y_i^{(1,P)}(x) - y_i^{(0)}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{y}^{(0,P)}(t))dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq M \cdot \frac{b}{M} = b \ .$$

Dakle za $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ je $(x, \boldsymbol{y}^{(1,P)}(x)) \in R$. Zbog te činjenice je na istom intervalu dobro definirana druga Picardova iteracija (tj. možemo izračunati podintegralni izraz u jednakosti (1.11) za $m = 2$). Općenito, ako je dobro definirana iteracija reda m, možemo izvesti sljedeću ocjenu

$$\begin{aligned} |y_i^{(m,P)}(x) - y_i^{(0)}| &= \left| \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{y}^{(m-1,P)}(t))dt \right| \\ &\leq M|x - x_0| \leq M\delta \leq M \cdot \frac{b}{M} = b \end{aligned}$$

te zaključujemo da je $(x, \boldsymbol{y}^{(m,P)}(x)) \in R$ za $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Time smo pokazali da je dobro definirana i iteracija reda $m + 1$. Induktivno smo dakle dokazali da su na zadanom intervalu sve Picardove iteracije dobro definirane.

Drugi korak:

Da bismo dokazali uniformnu konvergenciju niza Picardovih iteracija, zapišimo ih u prikladnijem obliku. Iteraciju m-tog reda ćemo zapisati kao

$$\boldsymbol{y}^{(m,P)} = \boldsymbol{y}^{(0,P)} + (\boldsymbol{y}^{(1,P)} - \boldsymbol{y}^{(0,P)}) + (\boldsymbol{y}^{(2,P)} - \boldsymbol{y}^{(1,P)}) + \cdots + (\boldsymbol{y}^{(m,P)} - \boldsymbol{y}^{(m-1,P)}) \ .$$

Dakle, niz iteracija $(\boldsymbol{y}^{(m,P)})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{k=1}^{\infty}[\boldsymbol{y}^{(k,P)} - \boldsymbol{y}^{(k-1,P)}]$. Da bismo dokazali konvergenciju, ocjenjujemo svaki član tog reda. Cilj nam je ocijeniti red s redom eksponencijalnog tipa za koji znamo da konvergira. Vidjet ćemo da nam je za tu ocjenu bitna pretpostavka Lipschitz-neprekidnosti funkcije $\boldsymbol{f}$.

Već otprije znamo da za svaki $i = 1, \dots, n$ i $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ vrijedi $|y_i^{(1,P)}(x) - y_i^{(0)}| \leq M|x - x_0|$. Koristeći tu ocjenu ocjenjujemo sljedeću razliku iteracija. Prvo imamo

$$|y_i^{(2,P)}(x) - y_i^{(1,P)}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f_i(t, \boldsymbol{y}^{(1,P)}(t)) - f_i(t, \boldsymbol{y}^{(0,P)}(t))] dt \right| \ .$$

Označimo s L Lipschitzovu konstantu funkcije $\boldsymbol{f}$ po y varijablama. Da bismo dovršili ocjenu, koristimo nejednakost (1.8):

$$\begin{aligned} |y_i^{(2,P)}(x) - y_i^{(1,P)}(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(t, \boldsymbol{y}^{(1,P)}(t)) - f_i(t, \boldsymbol{y}^{(0,P)}(t))| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(1,P)}(t) - y_k^{(0,P)}(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} LMn|t - x_0| dt \right| = LMn \frac{|x - x_0|^2}{2} \ . \end{aligned}$$

Posve analogno, koristeći prethodnu ocjenu, ocjenjujemo sljedeći član reda

$$\begin{aligned} |y_i^{(3,P)}(x) - y_i^{(2,P)}(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(t, \boldsymbol{y}^{(2,P)}(t)) - f_i(t, \boldsymbol{y}^{(1,P)}(t))| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(2,P)}(t) - y_k^{(1,P)}(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} L^2Mn^2 \frac{|t - x_0|^2}{2} dt \right| = L^2Mn^2 \frac{|x - x_0|^3}{6} \ . \end{aligned}$$

Dakle, možemo pretpostaviti da ocjena općenito izgleda ovako:

$$|y_i^{(m,P)}(x) - y_i^{(m-1,P)}(x)| \leq L^{m-1}Mn^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!} \ .$$

Treba još provesti korak indukcije:

$$\begin{aligned}
|y_i^{(m+1,P)}(x) - y_i^{(m,P)}(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(t, \boldsymbol{y}^{(m,P)}(t)) - f_i(t, \boldsymbol{y}^{(m-1,P)}(t))| dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \sum_{k=1}^{n} |y_k^{(m,P)}(t) - y_k^{(m-1,P)}(t)| dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} L^m M n^m \frac{|t - x_0|^m}{m!} dt \right| \\
&= L^m M n^m \frac{|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \ .
\end{aligned}$$

Konačno za $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ i $m \geq 0$ vrijedi

$$|y_i^{(m+1,P)}(x) - y_i^{(m,P)}(x)| \leq L^m M n^m \frac{\delta^{m+1}}{(m+1)!} = \frac{M}{Ln} \cdot \frac{(Ln\delta)^{m+1}}{(m+1)!}$$

pa smo time red $\sum_{k=1}^{\infty} |y_i^{(k,P)}(x) - y_i^{(k-1,P)}(x)|$ ocijenili redom $\frac{M}{Ln} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Ln\delta)^k}{k!}$ za svaki x iz danog intervala. Kako dobiveni eksponencijalni red konvergira, i ne ovisi o x, zaključujemo da niz funkcija $(y_i^{(m,P)})_{m \in \mathbb{N}}$ uniformno konvergira na $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Definirajmo $\boldsymbol{y}\colon [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ s $\boldsymbol{y}(x) := \lim_m \boldsymbol{y}^{(m,P)}(x)$. S obzirom da su Picardove iteracije neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu koje uniformno konvergiraju, i njihov limes, funkcija $\boldsymbol{y}$, neprekidna je funkcija na tom intervalu. Iz prvog koraka dokaza znamo da je $(x, \boldsymbol{y}^{(m,P)}(x)) \in R$ za svako $m \in \mathbb{N}$ i $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ pa je zbog zatvorenosti skupa R i $(x, \boldsymbol{y}(x)) \in R$ za x iz istog intervala.

Treći korak:

Sada želimo prijeći na limes u jednakosti (1.11). Jedini problematični dio je prijelaz na limes pod integralom. Trebamo stoga dokazati da niz podintegralnih funkcija konvergira, i to uniformno. Neka je $\boldsymbol{y}$ limes Picardovih iteracija. Definiramo funkcije $\boldsymbol{g}(x) := \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x))$ i $\boldsymbol{g}^{(m,P)}(x) := \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}^{(m,P)}(x))$ za $m \in \mathbb{N}$ i $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Sada neka je zadan $\varepsilon > 0$ i neka je $\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{nL}$. S obzirom da nizovi $(y_k^{(m,P)})_{m \in \mathbb{N}}$, $k = 1, \ldots, n$ uniformno konvergiraju na intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, postoje $n_k \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $|y_k^{(m,P)}(x) - y_k(x)| < \overline{\varepsilon}$, za $m \geq n_k$ i $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Tada konačno za $m \geq n_0 = \max_{k=1}^{n} n_k$ i $i = 1, \ldots, n$ imamo (koristeći opet Lipschitz-neprekidnost funkcije $\boldsymbol{f}$)

$$\begin{aligned}
|g_i(x) - g_i^{(m,P)}(x)| &= |f_i(x, \boldsymbol{y}(x)) - f_i(x, \boldsymbol{y}^{(m,P)}(x))| \\
&\leq L \sum_{k=1}^{n} |y_k(x) - y_k^{(m,P)}(x)| < Ln\overline{\varepsilon} = \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Kako prethodna tvrdnja vrijedi za bilo koji $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, zaključujemo da za svaki $i = 1, \ldots, n$ niz funkcija $(g_i^{(m,P)})_{m \in \mathbb{N}}$ uniformno konvergira na tom intervalu prema funkciji g_i.

To znači da možemo prijeći na limes pod integralom u jednakosti (1.11). Time dobivamo jednakost (1.10) iz čega slijedi da je funkcija $\boldsymbol{y}$ rješenje inicijalnog problema (1.9). Iz pripadne jednadžbe tog problema zaključujemo da je funkcija $\boldsymbol{y}$ neprekidno diferencijabilna na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Kako joj je graf podskup pravokutnika R, konačno možemo reći da je $\boldsymbol{y}$ rješenje zadanog inicijalnog problema (1.9).

Četvrti korak:

Na kraju moramo još dokazati da je konstruirano rješenje $\boldsymbol{y}$ jedinstveno rješenje zadanog inicijalnog problema na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Ideja je da dokažemo da na tom intervalu već definirane Picardove iteracije konvergiraju svakom rješenju tog inicijalnog problema. Ako to dokažemo, inicijalni problem će imati samo jedno rješenje jer je limes jedinstven.

Neka je $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ još neko rješenje inicijalnog problema (1.9) na $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$. Primijetimo da, prema definiciji rješenja sustava, graf i tog rješenja pripada pravokutniku R. Ocijenit ćemo sada razliku rješenja $\boldsymbol{z}$ i pojedine Picardove iteracije. Prvo znamo da vrijedi

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{z}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z}(x)) \ , \quad x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \ , \\ &\boldsymbol{z}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)} \ , \end{aligned}$$

što se opet može zapisati u ekvivalentnoj integralnoj formi

$$z_i(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{z}(t)) dt \ , \quad x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \ , \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dalje opet za $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ možemo računati kao i u drugom koraku ovog dokaza:

$$|z_i(x) - y_i^{(0,P)}(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{z}(t)) dt \right| \leq M|x - x_0| \ .$$

Zatim opet analogno dobivamo

$$\begin{aligned} |z_i(x) - y_i^{(1,P)}(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} [f_i(t, \boldsymbol{z}(t)) - f_i(t, \boldsymbol{y}^{(0,P)}(t))] dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} L \sum_{k=1}^{n} |z_k(t) - y_k^{(0,P)}(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} LMn|t - x_0| dt \right| = LMn \frac{|x - x_0|^2}{2} \ . \end{aligned}$$

Posve analogno kao u drugom koraku, koristeći princip indukcije, dobivamo općenitu ocjenu

$$|z_i(x) - y_i^{(m,P)}(x)| \leq L^m M n^m \frac{|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{M}{Ln} \cdot \frac{(Ln\delta)^{m+1}}{(m+1)!} \ .$$

Izraz na desnoj strani prethodne nejednakosti član je eksponencijalnog reda, koji konvergira, pa stoga taj izraz konvergira k nuli kad $m \to \infty$. Slijedi da niz Picardovih iteracija $(y_i^{(m,P)})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira prema funkciji z_i, pa je zbog jedinstvenosti limesa $z_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Time smo dokazali jedinstvenost rješenja inicijalnog problema na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$.

$\square$

Napomena: Primijetimo da smo u dokazu Picardovog teorema našli rješenje inicijalnog problema na otvorenom intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$. Međutim, funkciju $\boldsymbol{y}$, koja je rješenje, konstruirali smo i na zatvaraču tog intervala, preciznije i u točkama $x = x_0 - \delta, x_0 + \delta$. Pitamo se možemo li reći da je $\boldsymbol{y}$ rješenje i na zatvorenom intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. To znači da bi, za $i = 1, \ldots, n$, dodatno trebalo vrijediti

$$y_i'^{(+)}(x_0 - \delta) = f_i(x_0 - \delta, \boldsymbol{y}(x_0 - \delta)) ,$$
$$y_i'^{(-)}(x_0 + \delta) = f_i(x_0 + \delta, \boldsymbol{y}(x_0 + \delta)) ,$$

gdje na lijevim stranama jednakosti imamo derivaciju funkcije y_i zdesna, odnosno slijeva.

Znamo da je

$$y_i'^{(+)}(x_0 - \delta) = \lim_{h\to 0^+} \frac{y_i(x_0 - \delta + h) - y_i(x_0 - \delta)}{h} ,$$
$$y_i'^{(-)}(x_0 + \delta) = \lim_{h\to 0^-} \frac{y_i(x_0 + \delta + h) - y_i(x_0 + \delta)}{h} .$$

Prisjetimo se Teorema srednje vrijednosti:

Teorem 1.2 *Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija koja je neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na $\langle a, b\rangle$. Tada postoji $c \in \langle a, b\rangle$ takav da vrijedi*

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b) .$$

Dakle, s obzirom da je rješenje $\boldsymbol{y}$ inicijalnog problema (1.7) neprekidno na intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ i diferencijabilno na $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, slijedi da za svaki $h > 0$ postoji $x_h \in \langle x_0 - \delta, x_0 - \delta + h\rangle$ takav da vrijedi

$$\frac{y_i(x_0 - \delta + h) - y_i(x_0 - \delta)}{h} = \frac{h \cdot y_i'(x_h)}{h} = y_i'(x_h) .$$

Tada je očito

$$y_i'^{(+)}(x_0 - \delta) = \lim_{h\to 0^+} y_i'(x_h) = \lim_{h\to 0^+} f_i(x_h, \boldsymbol{y}(x_h))$$

$$= f_i(x_0 - \delta, \boldsymbol{y}(x_0 - \delta)) \ ,$$

s obzirom da $x_h \to x_0 - \delta$ za $h \to 0^+$, a f_i je neprekidna funkcija.

Na posve analogan način dokazujemo i pripadnu relaciju u desnom rubu $x_0 + \delta$ te možemo zaključiti da smo u dokazu Picardovog teorema zapravo konstruirali funkciju $\boldsymbol{y}$ koja je rješenje inicijalnog problema i na zatvorenom intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Ta činjenica je osobito važna kod razmatranja proširivosti intervala egzistencije rješenja.

Primjer 1.2 *Nađimo rješenje inicijalnog problema*

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \ , \\ y_2' &= y_1 + x \ , \\ y_1(0) &= 0 \ , \ y_2(0) = 0 \ , \end{aligned}$$

pomoću Picardovih iteracija.

Izračunat ćemo nekoliko prvih Picardovih iteracija te ćemo odrediti njihov limes. Funkcije f_1 i f_2 su definirane s $f_1(x, y_1, y_2) = y_2$ i $f_2(x, y_1, y_2) = y_1 + x$. Dakle imamo redom

$$\begin{aligned}
y_1^{(0)}(x) &= 0 \ , \ y_2^{(0)}(x) = 0 \ , \\
y_1^{(1)}(x) &= \int_0^x f_1(t, 0, 0)dt = 0 \ , \\
y_2^{(1)}(x) &= \int_0^x f_2(t, 0, 0)dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \ , \\
y_1^{(2)}(x) &= \int_0^x f_1\left(t, 0, \frac{t^2}{2}\right) dt = \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = \frac{x^3}{6} \ , \\
y_2^{(2)}(x) &= \int_0^x f_2\left(t, 0, \frac{t^2}{2}\right) dt = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2} \ , \\
y_1^{(3)}(x) &= \int_0^x f_1\left(t, \frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2}\right) dt = \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = \frac{x^3}{6} \ , \\
y_2^{(3)}(x) &= \int_0^x f_2\left(t, \frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2}\right) dt = \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{6}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ , \\
y_1^{(4)}(x) &= \int_0^x f_1\left(t, \frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) dt = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) dt = \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \ , \\
y_2^{(4)}(x) &= \int_0^x f_2\left(t, \frac{t^3}{6}, \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) dt = \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{6}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ , \\
y_1^{(5)}(x) &= \int_0^x f_1\left(t, \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}, \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) dt = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) dt = \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \ ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_2^{(5)}(x) &= \int_0^x f_2\left(t, \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}, \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right) dt = \int_0^x \left(t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}\right) dt \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}\ , \\
y_1^{(6)}(x) &= \int_0^x f_1\left(t, \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120}, \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720}\right) dt = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^6}{720}\right) dt \\
&= \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040}\ , \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Možemo naslutiti da rješenje konvergira prema $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ gdje je

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\right. \\
&\quad \left. - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\right] - x \\
&= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x\ , \\
y_2(x) &= \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\right. \\
&\quad \left. + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\right] - 1 \\
&= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1\ .
\end{aligned}
$$

Prvih nekoliko iteracija nam je bilo dovoljno da naslutimo limes Picardovih iteracija. Da bismo potvrdili tu slutnju, nije potrebno određivati opću Picardovu iteraciju, već direktnim uvrštavanjem provjerimo da je funkcija $\boldsymbol{y}$ uistinu rješenje inicijalnog problema. Naime, funkcija $\boldsymbol{f}$ je neprekidna i Lipschitz-neprekidna po y varijablama na cijelom $\mathbb{R}^3$. S obzirom da iz Picardovog teorema slijedi da zadani inicijalni problem ima jedinstveno rješenje (v. i potpoglavlje 1.3 za jedinstvenost rješenja na proširenom intervalu egzistencije), dobiveno rješenje je ujedno i jedino rješenje zadanog inicijalnog problema. Iz samog rješenja vidimo još i da je ono definirano na cijelom $\mathbb{R}$, dakle svako lokalno rješenje inicijalnog problema je maksimalno proširivo.

Prisjetimo se sada Teorema srednje vrijednosti za funkcije više varijabli:

Teorem 1.3 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka je $f = f(\boldsymbol{x})\colon \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Neka su $\boldsymbol{P} \in \Omega$ i $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^n$ takve da je segment $[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P} + \boldsymbol{H}] \subseteq \Omega$. Pretpostavimo da f ima sve parcijalne derivacije prvog reda na Ω i neka su one neprekidne na segmentu $[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P} + \boldsymbol{H}]$. Tada postoji $\vartheta \in \langle 0, 1\rangle$ takav da je*

$$
f(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{H}) - f(\boldsymbol{P}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{P} + \vartheta \boldsymbol{H}) H_i\ .
$$

$\square$

Sada označimo

$$I(a,b) = \begin{cases} \langle a,b\rangle, & \text{za } a < b\ , \\ \langle b,a\rangle, & \text{za } a > b\ . \end{cases}$$

S $I[a,b]$ označavat ćemo zatvarač intervala $I(a,b)$.

Prema prethodnom teoremu, ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvoren skup, $f = f(x, \boldsymbol{y})\colon \Omega \to \mathbb{R}$ klase C^1, i ako je za neki $i \in \{1,\ldots,n\}$ segment

$$[(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \overline{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n), (x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \widetilde{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)] \subseteq \Omega\ ,$$

onda postoji $\xi_i \in I(\overline{y}_i, \widetilde{y}_i)$ takav da vrijedi

$$\begin{aligned} & f(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \overline{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) - f(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \widetilde{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \\ & = \frac{\partial f}{\partial y_i}(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \xi_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)(\overline{y}_i - \widetilde{y}_i)\ . \end{aligned}$$

Ukoliko je parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial y_i}$ ograničena na Ω, tj. postoji $M > 0$ takav da je $\left|\frac{\partial f}{\partial y_i}(x, \boldsymbol{y})\right| \le M$ za $(x, \boldsymbol{y}) \in \Omega$, onda vrijedi

$$\begin{aligned} & |f(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \overline{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) - f(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, \widetilde{y}_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)| \\ & \le M|\overline{y}_i - \widetilde{y}_i|\ . \end{aligned}$$

Prethodnu ocjenu možemo primijeniti i u sljedećoj situaciji. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvoren skup, $f \in C^1(\Omega)$ i neka je $R \subset \Omega$ zatvoren pravokutnik. U tom slučaju svake dvije točke iz R određuju segment koji pripada R. Kako je $f \in C^1(\Omega)$, sve parcijalne derivacije funkcije f su neprekidne funkcije na kompaktnom skupu R te su stoga ograničene na R. Možemo konačno zaključiti da je f Lipschitz-neprekidna na R po y_i varijabli s Lipschitzovom konstantom $\left\|\frac{\partial f}{\partial y_i}\right\|_{\infty,R}$.

Primjer 1.3 *Primijenit ćemo Picardov teorem na inicijalni problem*

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \cos x + \sin y_2\ , \\ y_2' &= y_2^3 + x^3\ , \\ y_3' &= |y_3| + \cos y_2^2\ , \\ y_1(0) &= 0,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 0\ . \end{aligned}$$

Dakle, imamo funkcije $f_i\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,3$, *zadane s* $f_1(x, y_1, y_2, y_3) = y_1 \cos x + \sin y_2$, $f_2(x, y_1, y_2, y_3) = y_2^3 + x^3$, $f_3(x, y_1, y_2, y_3) = |y_3| + \cos y_2^2$. *Funkcije* f_1 *i* f_2 *su klase* C^1 *na* $\mathbb{R}^4$ *te su prema prethodnoj napomeni Lipshitz neprekidne po svim* y *varijablama na svakom zatvorenom pravokutniku u* $\mathbb{R}^4$. *Isto vrijedi i za funkciju* $(y_1, y_2, y_3) \mapsto \cos y_2^2$. *Izračunajmo i pripadne Lipschitzove konstante. Ako je funkcija* f_i *Lipschitz-neprekidna po varijabli* y_j, $i, j = 1,\ldots,3$, *pripadnu Lipschitzovu konstantu ćemo označiti s* L_{ij}.

Prvo vrijedi

$$\begin{aligned}
|f_1(x, \overline{y}_1, y_2, y_3) - f_1(x, \widetilde{y}_1, y_2, y_3)| &= |\cos x||\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \le |\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \ , \\
|f_1(x, y_1, \overline{y}_2, y_3) - f_1(x, y_1, \widetilde{y}_2, y_3)| &= |\sin \overline{y}_2 - \sin \widetilde{y}_2| \\
&= |(\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2)\cos \xi_1| \le |\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \ ,
\end{aligned}$$

za neki $\xi_1 \in I(\overline{y}_2, \widetilde{y}_2)$.

Prema tome, f_1 *je Lipschitz-neprekidna po svim* y *varijablama na* $\mathbb{R}^4$. *Lipschitzove konstante su redom* $L_{11} = 1$, $L_{12} = 1$ *i* L_{13} *je proizvoljna, odnosno možemo uzeti* $L_{13} = 0$. *Dakle, pronašli smo Lipschitzove konstante funkcije* f_1 *koje ne ovise o izboru pravokutnika oko točke početnog uvjeta, iako nisu sve nužno optimalne.*

Dalje imamo

$$|f_2(x, y_1, \overline{y}_2, y_3) - f_2(x, y_1, \widetilde{y}_2, y_3)| = |\overline{y}_2^3 - \widetilde{y}_2^3| = |3\xi_2^2(\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2)| \ ,$$

za neki $\xi_2 \in I(\overline{y}_2, \widetilde{y}_2)$, *odnosno*

$$|f_2(x, y_1, \overline{y}_2, y_3) - f_2(x, y_1, \widetilde{y}_2, y_3)| \le 3|\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \max_{\xi_2 \in I[\overline{y}_2, \widetilde{y}_2]} \xi_2^2 \ .$$

Dakle, i f_2 *je Lipschitz-neprekidna po svim* y *varijablama. Konstante* L_{21} *i* L_{23} *su proizvoljne, dok* L_{22} *ovisi o izboru pravokutnika na kojem primjenjujemo Picardov teorem. Ako je pravokutnik zadan s*

$$R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^4 : \ |x| \le a \ , \ \ \|\boldsymbol{y}\|_\infty \le b\} \ ,$$

onda je $L_{22} = 3b^2$.

Na kraju vrijedi još i

$$\begin{aligned}
|f_3(x, y_1, \overline{y}_2, y_3) - f_3(x, y_1, \widetilde{y}_2, y_3)| &= |\cos \overline{y}_2^2 - \cos \widetilde{y}_2^2| \\
&\le \max_{\xi_3 \in I[\overline{y}_2, \widetilde{y}_2]} |2\xi_3 \sin \xi_3^2||\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \\
&\le \max_{\xi_3 \in I[\overline{y}_2, \widetilde{y}_2]} |2\xi_3||\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \ , \\
|f_3(x, y_1, y_2, \overline{y}_3) - f_3(x, y_1, y_2, \widetilde{y}_3)| &= ||\overline{y}_3| - |\widetilde{y}_3|| \le |\overline{y}_3 - \widetilde{y}_3| \ .
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je i f_3 Lipschitz-neprekidna po svim y varijablama. Konstanta L_{31} je proizvoljna, L_{32} ovisi o izboru pravokutnika, tj. za pravokutnik R je jednaka $L_{32} = 2b$, dok je $L_{33} = 1$.

Primijenimo Picardov teorem npr. na pravokutniku

$$R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^4 : \ |x| \leq 4, \ \|\boldsymbol{y}\|_\infty \leq 1\} .$$

Na R imamo ocjene

$$\begin{aligned}
|f_1(x, y_1, y_2, y_3)| &= |y_1 \cos x + \sin y_2| \leq |y_1||\cos x| + |\sin y_2| \leq |y_1| + 1 \leq 2 , \\
|f_2(x, y_1, y_2, y_3)| &= |y_2^3 + x^3| \leq |y_2|^3 + |x|^3 \leq 65 , \\
|f_3(x, y_1, y_2, y_3)| &= ||y_3| + \cos y_2^2| \leq |y_3| + |\cos y_2^2| \leq 2 .
\end{aligned}$$

Dakle, možemo uzeti $M = 65$. Imamo još $a = 4$, $b = 1$. Dakle $\delta = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \frac{1}{65}$ pa prema Picardovom teoremu postoji (jedinstveno) rješenje inicijalnog problema na intervalu $\langle -\frac{1}{65}, \frac{1}{65} \rangle$, odnosno na $[-\frac{1}{65}, \frac{1}{65}]$. Primijetimo da je točan maksimum funkcije f_1 na R jednak $1 + \sin 1$, ali time ne dobivamo širi interval egzistencije jer se ostale izvedene ograde dostižu na R.

1.3 Proširivost lokalnog rješenja

U dokazu Picardovog teorema konstruirali smo, koristeći zatvoreni pravokutnik R, rješenje $\boldsymbol{y}$ inicijalnog problema (1.7) na nekom intervalu oko točke x_0, preciznije na $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Naravno, ne možemo tvrditi da je taj interval najširi mogući interval egzistencije rješenja. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{f}$ definirana na otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ($R \subset \Omega$) i da je $\boldsymbol{f}$ neprekidna i Lipschitz-neprekidna po y varijablama na svim zatvorenim pravokutnicima u Ω. Oko točke $(x_0+\delta, \boldsymbol{y}(x_0+\delta)) \in \Omega$ možemo naći neki zatvoreni pravokutnik u Ω, nazovimo ga R_1. Tada, prema Picardovom teoremu, postoji funkcija $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$ na intervalu $[x_0+\delta-\delta_1, x_0+\delta+\delta_1]$, za neki $\delta_1 > 0$ koji ovisi o izboru pravokutnika R_1, koja rješava zadani sustav i za koju vrijedi $\boldsymbol{z}(x_0+\delta) = \boldsymbol{y}(x_0 + \delta)$. Također je $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ na intervalu $I_P = [x_0 + \delta - \delta_1, x_0 + \delta] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Naime, neka je $x_1 = \inf\{t \in I_P : \ \boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{z}(x), \ x \in [t, x_0 + \delta]\}$. Zbog neprekidnosti je $\boldsymbol{y}(x_1) = \boldsymbol{z}(x_1)$. Pretpostavimo da je skup $I_P \backslash [x_1, x_0 + \delta]$ neprazan. Neka je $\boldsymbol{u}^{(0)} = \boldsymbol{y}(x_1) = \boldsymbol{z}(x_1)$. Dakle, funkcije $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$ su rješenja inicijalnog problema

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}' &= \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}) , \\
\boldsymbol{u}(x_1) &= \boldsymbol{u}^{(0)} ,
\end{aligned}$$

na nekom intervalu oko x_1. Pritom, ukoliko je $x_1 \neq x_0 + \delta$, prema definiciji točke x_1 možemo naći dovoljno malen interval oblika $[x_1 - \delta_2, x_1 + \delta_2]$ na kojem vrijedi

$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$. Iz Picardovog teorema slijedi da možemo uvijek naći interval oko x_1 na kojem je rješenje tog inicijalnog problema jedinstveno. Dakle, dobili smo kontradikciju, odnosno rješenja $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$ se podudaraju na presjeku intervala definicije. Slično dobivamo kontradikciju i kad je $x_1 = x_0 + \delta$. Na dovoljno malenom intervalu $I_1 = \langle x_1 - \delta_3, x_1 + \delta_3 \rangle$ oko $x_0 + \delta$ imamo definiranu funkciju $\boldsymbol{z}$ i definiramo funkciju $\boldsymbol{w}$ s $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{y}$, $x \in I_1 \cap \{x \leq x_0 + \delta\}$ te $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{z}$, $x \in I_1 \cap \{x \geq x_0 + \delta\}$ koje su obje rješenje inicijalnog problema $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{u}(x))$, $\boldsymbol{u}(x_0+\delta) = \boldsymbol{y}(x_0+\delta)$. Kako je $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{z}$ na I_1, a postoji interval I_1 na kojem je rješenje tog inicijalnog problema jedinstveno, dobili smo kontradikciju.

Konačno, dobili smo rješenje koje je proširenje rješenja $\boldsymbol{y}$, odnosno konstruirali smo jedinstveno rješenje na intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta + \delta_1]$.

Nastavimo li zaključivati na analogan način, može se steći dojam da se rješenje može proširivati koliko želimo, tj. do granice koja je određena domenom Ω. Međutim, to općenito nije tako. Jednostavno je konstruirati kontraprimjer. Pogledajmo inicijalni problem

$$\begin{aligned} y' &= y^2 \ , \\ y(0) &= y_0 \ , \end{aligned}$$

za koji pomoću Picardovog teorema možemo dokazati da ima jedinstveno rješenje. Zanima nas koliko je proširivo. Za $y_0 = 0$ rješenje je očito $y \equiv 0$, tj. definirano je na čitavom $\mathbb{R}$.

Nadalje, separacijom varijabli lako dobivamo da je u ostalim slučajevima opće rješenje pripadne jednadžbe

$$y(x) = -\frac{1}{x+C} \ .$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta, za $y_0 \neq 0$, dobivamo $C = -\frac{1}{y_0}$ pa je konačno rješenje dano s

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0 x} \ .$$

Primijetimo da je najširi povezan interval oko nule na kojem je rješenje y definirano jednak $\langle -\infty, \frac{1}{y_0} \rangle$, za $y_0 > 0$, odnosno $\langle \frac{1}{y_0}, +\infty \rangle$, za $y_0 < 0$. Dakle, rješenje nije definirano na cijelom $\mathbb{R}$, iako je domena funkcije koja određuje desnu stranu sustava jednaka $\mathbb{R}^2$, odnosno nemamo ograničenja na varijablu x.

Općenito, možemo zaključiti da rješenje inicijalnog problema (1.7) možemo proširivati redom na intervale $[x_0, x_0 + \delta + \delta_k]$, $k \in \mathbb{N}$ i $0 < \delta_k < \delta_{k+1}$. U prethodnom primjeru za $y_0 > 0$ ne možemo proširiti rješenje udesno na $\mathbb{R}_+$, što znači da postoji $\lim_k \delta_k$ u $\mathbb{R}$ za svaki niz proširenja.

Naravno, analogno možemo promatrati i proširenje ulijevo.

Uzmimo opet iste pretpostavke na $\boldsymbol{f}$ i Ω kao na početku potpoglavlja. Neka je $B = \{b > x_0 :$ rješenje se može proširiti na $[x_0, b]\}$ i neka je $\omega = \sup B$. Pitamo se može li vrijediti $\omega \in B$. Ako to vrijedi, imamo rješenje $\boldsymbol{y}$ na $[x_0, \omega]$. Kako $\boldsymbol{f}$ zadovoljava uvjete Picardovog teorema na svakom zatvorenom pravokutniku u Ω, onda kao i prije oko točke $(\omega, \boldsymbol{y}(\omega))$ možemo naći zatvoren pravokutnik u Ω te primijeniti Picardov teorem. Na taj način dobivamo rješenje inicijalnog problema definirano na $[x_0, c]$ gdje je $c > \omega$ i time smo došli do kontradikcije. Znači desno od x_0 rješenje je definirano na svom desnom maksimalnom intervalu egzistencije oblika $[x_0, \omega\rangle$. Analogno dolazimo do oblika lijevog maksimalnog intervala egzistencije $\langle\alpha, x_0]$ te konačno zaključujemo da je maksimalni interval egzistencije $\langle\alpha, \omega\rangle$, odnosno radi se o otvorenom intervalu.

Također, ako je $[x_0, \omega\rangle$ maksimalni desni interval egzistencije rješenja te ako postoji $\lim_{x\to\omega^-} \boldsymbol{y}(x)$, onda je $(\omega, \lim_{x\to\omega^-} \boldsymbol{y}(x)) \in \overline{\Omega}\backslash\Omega$. Ta točka se ne može nalaziti u Ω jer bi u protivnom na prethodno opisan način mogli opet proširiti interval egzistencije na desnu stranu.

Postoje neke situacije u kojima se može zaključiti da je interval egzistencije maksimalno proširiv, koliko nam dopušta domena funkcije $\boldsymbol{f}$. Promotrit ćemo dvije takve situacije. Prije toga uvodimo pojam globalnog rješenja.

Definicija 1.2 *Neka je Ω oblika $I \times \widetilde{\Omega}$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ povezan interval, a $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ako postoji rješenje inicijalnog problema (1.7) koje je definirano na čitavom I, tada to rješenje zovemo globalnim rješenjem inicijalnog problema.*

Teorem 1.4 *Neka je $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ za neki $a > 0$ (Ω je cilindar). Nadalje, neka je $\boldsymbol{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ neprekidna na Ω i Lipschitz-neprekidna po svim y varijablama na svakom zatvorenom pravokutniku u Ω te neka je $\boldsymbol{f}$ i ograničena na Ω. Tada inicijalni problem (1.7) ima globalno rješenje.*

Dokaz. Primijetimo prvo da ne postoji nužno jedinstvena Lipschitzova konstanta za sve zatvorene pravokutnike u Ω. Neka je $R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{(0)}\|_\infty \leq b\}$ zatvoreni pravokutnik u Ω oko točke početnog uvjeta. Kako je $\boldsymbol{f}$ ograničena na Ω, postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|f_i(x, \boldsymbol{y})| \leq M$, za $(x, \boldsymbol{y}) \in \Omega$, $i = 1, \ldots, n$. Odaberimo R takav da je $b > Ma$. Zbog neograničenosti domene Ω u y-smjerovima to je naravno moguće. Nadalje, primijenimo Picardov teorem na pravokutniku R i dobivamo rješenje inicijalnog problema (1.7) na intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, gdje je $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Iz odabira b vidimo da je $\delta = a$, odnosno dobili smo rješenje na intervalu $[x_0 - a, x_0 + a]$. Dakle, promatrani inicijalni problem ima globalno rješenje. $\square$

Teorem 1.5 *Neka je $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ neprekidna na Ω i Lipschitz-neprekidna po y varijablama na čitavom Ω. Tada inicijalni problem (1.7) ima globalno rješenje.*

Dokaz. Neka je Lipschitzova konstanta funkcije $\boldsymbol{f}$ jednaka L. Zbog neprekidnosti funkcije $\boldsymbol{f}$ možemo zaključiti da vrijedi $|f_i(x, \boldsymbol{y}^{(0)})| \leq m$, $i = 1, \ldots, n$ za neko $m > 0$ i $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$.
Uzmimo opet pravokutnik $R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - x_0| \leq a, \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{(0)}\|_\infty \leq b\}$, ali takav da je $b > m$. Označimo $M = \|\boldsymbol{f}\|_{\infty,R}$. Primijetimo da M ovisi o b te da postoje $(x, \overline{\boldsymbol{y}}) = (\overline{x}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \in R$ i $r \in \{1, \ldots, n\}$ takvi da je

$$|f_r(\overline{x}, \overline{\boldsymbol{y}})| = M \ .$$

Sada ocjenjujemo izraz

$$\begin{aligned} \tfrac{M}{b} &= \frac{|f_r(\overline{x}, \overline{\boldsymbol{y}})|}{b} \leq \frac{|f_r(\overline{x}, \overline{\boldsymbol{y}}) - f_r(\overline{x}, \boldsymbol{y}^{(0)})|}{b} + \frac{|f_r(\overline{x}, \boldsymbol{y}^{(0)})|}{b} \\ &\leq \frac{L \sum_{k=1}^n |\overline{y}_k - y_k^{(0)}|}{b} + \frac{m}{b} \leq Ln + 1 \ . \end{aligned}$$

Drugim riječima, dobili smo da je $\frac{b}{M} \geq \frac{1}{Ln+1}$. Primijetimo da bismo uz isti postupak dobili jednak rezultat da smo odabrali i neku drugu točku početnog uvjeta unutar cilindra.

Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da želimo pronaći maksimalni desni interval egzistencije. Primjenjujemo više puta Picardov teorem (birajući pravokutnik na način koji smo prethodno opisali) te redom dobivamo sve šire desne intervale egzistencije. Nakon j primjena teorema dobivamo interval $[x_0, x_0 + \sum_{k=1}^{j} \delta_k]$, pri čemu je $\delta_k > 0$, $k = 1, \ldots, j$. U prvom koraku dobivamo $x_0 + \delta_1 = x_0 + a$ ili $\delta_1 \geq \frac{1}{Ln+1}$. U drugom slučaju, ponovnom primjenom Picardovog teorema proširujemo rješenje na interval $[x_0, x_0 + \delta_1 + \delta_2]$, gdje je $x_0 + \delta_1 + \delta_2 = x_0 + a$ ili je $\delta_2 \geq \frac{1}{Ln+1}$. Nastavljamo analogno zaključivati te zbog konstantnosti izraza $\frac{1}{Ln+1}$ u konačnom broju koraka, konkretno u ℓ koraka, moramo doći do proširenja rješenja na interval $[x_0, x_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_\ell]$, gdje je $x_0 + \sum_{k=1}^{\ell} \delta_k = x_0 + a$. Posve analogno dokazujemo da ćemo primjenom Picardovog teorema, konačno mnogo puta, proširiti rješenje ulijevo na interval $[x_0 - a, x_0]$.

$\square$

Primjer 1.4 *Neka je zadan inicijalni problem*

$$\begin{aligned} y_1' &= \cos y_1 + y_2 + x \ , \\ y_2' &= \sin y_2 + 2y_1 \ , \\ y_1(0) &= 1, \ y_2(0) = 2 \ . \end{aligned}$$

Primijetimo da je desna strana sustava određena funkcijom $\boldsymbol{f} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{f}(x, y_1, y_2) = (\cos y_1 + y_2 + x, \sin y_2 + 2y_1)$ *koja je također definirana na* $\Omega_a := [-a, a] \times \mathbb{R}^2$, *za* *svaki $a > 0$. Nadalje, funkcija $\boldsymbol{f}$ je neprekidna na Ω_a. Primijetimo još da prema Teoremu srednje vrijednosti vrijedi*

$$|f_1(x, \overline{y}_1, y_2) - f_1(x, \widetilde{y}_1, y_2)| = |\cos \overline{y}_1 - \cos \widetilde{y}_1| = |\sin \xi_1||\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1|$$

za neki $\xi_1 \in I(\overline{y}_1, \widetilde{y}_1)$. Dakle, dobivamo

$$|f_1(x, \overline{y}_1, y_2) - f_1(x, \widetilde{y}_1, y_2)| \leq |\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \ ,$$

odnosno f_1 je Lipschitz-neprekidna po varijabli y_1 na $\mathbb{R}^3$ s Lipschitzovom konstantom jednakom 1.

Nadalje, imamo i sljedeće ocjene

$$\begin{aligned}
&|f_1(x, y_1, \overline{y}_2) - f_1(x, y_1, \widetilde{y}_2)| \leq |\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \ , \\
&|f_2(x, \overline{y}_1, y_2) - f_2(x, \widetilde{y}_1, y_2)| \leq 2|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \ , \\
&|f_2(x, y_1, \overline{y}_2) - f_2(x, y_1, \widetilde{y}_2)| = |\sin \overline{y}_2 - \sin \widetilde{y}_2| = |\cos \xi_2||\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \leq |\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \ ,
\end{aligned}$$

za neki $\xi_2 \in I(\overline{y}_2, \widetilde{y}_2)$.

Zaključili smo da su funkcije f_1 i f_2 Lipschitz-neprekidne na $\mathbb{R}^3$ (odnosno Ω_a) po svim y varijablama. Konstanta L (maksimum svih Lipschitzovih konstanti) je jednaka 2, odnosno ne ovisi o izboru zatvorenog pravokutnika u Ω_a.

Dakle, primjenom Picardovog teorema prvo zaključujemo da postoji rješenje zadanog inicijalnog problema na nekom intervalu $[-\delta, \delta]$, $\delta \leq a$. Kako vrijede pretpostavke teorema 1.5, možemo zaključiti da ćemo, nakon što konačno mnogo puta primijenimo Picardov teorem, proširiti rješenje na cijeli interval $[-a, a]$. Kako a možemo izabrati proizvoljno, rješenje zapravo možemo proširiti na cijeli $\mathbb{R}$. To rješenje je jedinstveno.

Napomenimo još da inicijalni problem ne zadovoljava pretpostavke teorema 1.4. Također, primijetimo da točka početnog uvjeta ne utječe na proširivost rješenja.

Primjer 1.5 *Pogledajmo sada inicijalni problem*

$$\begin{aligned}
y_1' &= \cos y_2^2 \ , \\
y_2' &= \sin y_1^2 \ , \\
y_1(1) = 0&, \ y_2(1) = 0 \ .
\end{aligned}$$

Sad je desna strana određena funkcijom $\boldsymbol{f} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{f}(x, y_1, y_2) = (\cos y_2^2, \sin y_1^2)$ za koju je lako uočiti da je ograničena, preciznije $|f_1(x, y_1, y_2)| \leq 1$ i $|f_2(x, y_1, y_2)| \leq 1$, za $(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$. Promatramo problem u domeni $\Omega_a = [1 - a, 1 + a] \times \mathbb{R}^2$ za proizvoljan $a > 0$. Ispitajmo još i Lipschitz-neprekidnost funkcije $\boldsymbol{f}$. Dovoljno će biti dokazati Lipschitz-neprekidnost na svakom zatvorenom pravokutniku u Ω_a. Imamo

$$|f_1(x, y_1, \overline{y}_2) - f_1(x, y_1, \widetilde{y}_2)| = |\cos \overline{y}_2^2 - \cos \widetilde{y}_2^2| = |2\xi \sin \xi^2||\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \ ,$$

za neki $\xi \in I(\overline{y}_2, \widetilde{y}_2)$. Izraz $|2\xi \sin \xi^2|$ je očito ograničen za odabrani zatvoreni pravokutnik u Ω_a pa je f_1 Lipschitz-neprekidna po varijabli y_2 na tom pravokutniku, ali nije na čitavom Ω_a. Lipschitz-neprekidnost od f_1 po y_1 varijabli je očita.

Posve analogno se dokazuje i Lipschitz-neprekidnost funkcije f_2 po y varijablama na proizvoljnom zatvorenom pravokutniku u Ω_a. Kako nismo dokazali da postoji supremum skupa Lipschitzovih konstanti na takvim pravokutnicima pa ne možemo primijeniti teorem 1.5. Međutim, neprekidnost, ograničenost funkcije $\boldsymbol{f}$ na cijelom Ω_a i njezina Lipschitz-neprekidnost po y varijablama na svakom zatvorenom pravokutniku u Ω_a pretpostavke su teorema 1.4. Dakle, rješenje inicijalnog problema postoji na cijelom intervalu $[1-a, 1+a]$. Zbog proizvoljnosti odabira a, opet dobivamo (jedinstveno) rješenje na $\mathbb{R}$. Primjećujemo da zadana točka početnog uvjeta opet nije pretjerano utjecala na dokaz proširivosti rješenja.

Primjer 1.6 *Na kraju pogledajmo još jedan problem proširivosti rješenja. Zadan je inicijalni problem*

$$\begin{aligned}
y_1' &= \frac{1}{32}(y_2+2)^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x-1}\ , \\
y_2' &= \frac{1}{2}(y_3 + \sqrt{3-x})\ , \\
y_3' &= \frac{1}{8}(2-y_2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}y_1\ , \\
y_1(2) &= 0,\ y_2(2) = 0,\ y_3(2) = 0\ .
\end{aligned}$$

Funkcija na desnoj strani sustava, za razliku od analognih funkcija iz prethodnih primjera, nije definirana ni na jednom cilindru. Naime, prirodna domena te funkcije je $[1,3] \times \mathbb{R} \times [-2,2] \times \mathbb{R}$. Prema tome, ne možemo primijeniti ni teorem 1.4 niti teorem 1.5. Međutim, ako bolje pogledamo dokaze koje smo imali u tim točkama, primjećujemo da nam je u njima važno da u nekom trenutku možemo odabrati dovoljno velik pravokutnik u y smjeru, što nam cilindar kao domena funkcije $\boldsymbol{f}$ sigurno omogućava. To naravno ne znači da i na nekim drugim domenama ne možemo dobiti rezultat proširivosti na analogan način.

Uzmimo npr. pravokutnik $R = [1,3] \times [-2,2]^3$. Na tom pravokutniku vrijede ocjene

$$\begin{aligned}
|f_1(x, y_1, y_2, y_3)| &\le \frac{1}{32}4^{\frac{3}{2}} + \sqrt{3-1} < 2\ , \\
|f_2(x, y_1, y_2, y_3)| &\le \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3-1}) < 2\ , \\
|f_3(x, y_1, y_2, y_3)| &\le \frac{1}{8}4^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} < 2\ .
\end{aligned}$$

Nadalje, lako je vidjeti da je funkcija $\boldsymbol{f}$ Lipschitz-neprekidna po y varijablama na R. Sada primijenimo Picardov teorem na prethodno definiranom pravokutniku R oko točke $(2,0,0,0)$ koristeći iste oznake za a, b i M kao u dokazu tog teorema. Dakle, $a = 1$, $b = 2$, $M = 2$. Time dobivamo rješenje na $[2-\delta, 2+\delta]$, gdje *je* $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = 1$. *Drugim riječima, dobili smo rješenje na* $[1,3]$, *odnosno globalno rješenje. Dakle, cilj nam je bio naći pravokutnik na kojem će gornja ograda* M *funkcije* $\boldsymbol{f}$ *biti takva da je* $b \geq aM$.

1.4 Apriorna ocjena rješenja

Često je korisno napraviti ocjenu rješenja u ovisnosti o desnoj strani sustava i početnom uvjetu, ako rješenje ne možemo izračunati eksplicitno. Takvu ocjenu nazivamo apriornom ocjenom rješenja. Ocjenu rješenja možemo izvesti npr. pomoću Gronwallove leme:

Lema 1.1 (Gronwall) *Neka je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval,* $a \in I$, *dok su* $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ *neprekidne funkcije takve da je* $u, v \geq 0$. *Neka je* $c \geq 0$ *konstanta. Tada vrijedi sljedeće:*

1. *Ako je*
$$v(x) \leq c + \int_a^x u(t)v(t)dt \quad \text{za } x \geq a,$$
onda za $x \geq a$ *vrijedi*
$$v(x) \leq ce^{\int_a^x u(t)dt}\ ;$$

2. *Ako je*
$$v(x) \leq c + \int_x^a u(t)v(t)dt \quad \text{za } x \leq a,$$
onda za $x \leq a$ *vrijedi*
$$v(x) \leq ce^{\int_x^a u(t)dt}\ .$$

□

Napravit ćemo ocjenu rješenja $\boldsymbol{y}$ inicijalnog problema (1.7) na proizvoljnom intervalu $[x_0 - a, x_0 + a]$, koji je podskup maksimalnog intervala egzistencije. Pretpostavljamo da je $(x, \boldsymbol{y}(x)) \in R$, za $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, gdje je R neki zatvoreni pravokutnik oko $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)})$. Pritom je $\boldsymbol{f}$ Lipschitz-neprekidna na R po y varijablama s konstantom L. Inicijalni problem opet možemo zapisati u integralnoj formi

$$y_i(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^x f_i(t, \boldsymbol{y}(t))dt,\ i = 1, \dots, n$$

iz čega slijedi

$$y_i(x) - y_i^{(0)} = \int_{x_0}^x [f_i(t, \boldsymbol{y}(t)) - f_i(t, \boldsymbol{y}^{(0)})]dt + \int_{x_0}^x f_i(t, \boldsymbol{y}^{(0)})dt\ . \tag{1.12}$$

Označimo $M_i = \max_{x\in[x_0-a,x_0+a]} |f_i(x,\boldsymbol{y}^{(0)})|$. Tada iz jednakosti (1.12) slijedi ocjena

$$|y_i(x) - y_i^{(0)}| \le L \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} |y_k(t) - y_k^{(0)}| dt \right| + M_i |x - x_0| \; . \tag{1.13}$$

Za $x \in [x_0, x_0 + a]$ iz nejednakosti (1.13) dobivamo

$$|y_i(x) - y_i^{(0)}| \le L \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} |y_k(t) - y_k^{(0)}| dt + M_i |x - x_0| \; ,$$

iz čega sumiranjem po $i = 1, \ldots, n$ slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i(x) - y_i^{(0)}| \le nL \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} |y_i(t) - y_i^{(0)}| dt + a \sum_{i=1}^{n} M_i \; .$$

Nakon toga iz prve tvrdnje Gronwallove leme, uz $v(x) = \sum_{i=1}^{n} |y_i(x) - y_i^{(0)}|$, $u(x) = nL$ i $c = a \sum_{i=1}^{n} M_i$, slijedi ocjena

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i(x) - y_i^{(0)}| \le \left(a \sum_{i=1}^{n} M_i \right) e^{\int_{x_0}^{x} nL dt} = \left(a \sum_{i=1}^{n} M_i \right) e^{nL|x-x_0|} \le \left(a \sum_{i=1}^{n} M_i \right) e^{nLa} \; .$$

S druge strane, ako je $x \in [x_0 - a, x_0]$, onda za $i = 1, \ldots, n$ iz jednakosti (1.12) dobivamo

$$|y_i(x) - y_i^{(0)}| \le L \int_{x}^{x_0} \sum_{k=1}^{n} |y_k(t) - y_k^{(0)}| dt + M_i |x - x_0|$$

pa sumiranjem slijedi

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i(x) - y_i^{(0)}| \le nL \int_{x}^{x_0} \sum_{i=1}^{n} |y_i(t) - y_i^{(0)}| dt + a \sum_{i=1}^{n} M_i \; .$$

Na prethodnu nejednakost možemo primijeniti drugi dio Gronwallove leme (uz jednako definirane u, v i c) pa analogno dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i(x) - y_i^{(0)}| \le \left(a \sum_{i=1}^{n} M_i \right) e^{\int_{x}^{x_0} nL dt} = \left(a \sum_{i=1}^{n} M_i \right) e^{nL|x-x_0|} \le \left(a \sum_{i=1}^{n} M_i \right) e^{nLa} \; .$$

Specijalno, imamo

$$|y_i(x)| \le |y_i^{(0)}| + \left(a \sum_{i=1}^{n} M_i \right) e^{nLa}, \; i = 1, \ldots, n, \; x \in [x_0 - a, x_0 + a] \; . \tag{1.14}$$

Korištenje Gronwallove leme je samo jedan od načina kako ocijeniti rješenje. Prisjetimo se da pomoću integralne reprezentacije inicijalnog problema možemo dokazati i ocjenu

$$|y_i(x) - y_i^{(0)}| \leq M|x - x_0| \leq Ma \ , \ i = 1, \ldots, n \ , \tag{1.15}$$

gdje vrijedi $\|\boldsymbol{f}\|_{\infty,R} \leq M$. Naravno, cilj nam je naći što bolju ocjenu.

Primjer 1.7 *Pogledajmo inicijalni problem*

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2^2 \ , \\ y_2' &= y_1 + x \ , \\ y_1(0) &= 0, \ y_2(0) = 1 \ . \end{aligned}$$

Dakle, imamo desnu stranu sustava određenu funkcijom $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{f}(x, y_1, y_2) = (y_2^2, y_1 + x)$. *Uzmimo neki pravokutnik* R *oko točke* $(0, 0, 1)$, *npr.*

$$R = \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : \ |x| \leq 1, \ |y_1| \leq 1, \ |y_2 - 1| \leq 1\} \ .$$

Očito je da je funkcija $\boldsymbol{f}$ *glatka na* $\mathbb{R}^3$ *pa je i Lipschitz-neprekidna po svim y varijablama na* R. *Također, znamo da postoji rješenje zadanog inicijalnog problema na intervalu* $[-\delta, \delta]$, *gdje je* $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, *pri čemu je* $a = 1$, $b = 1$, *a* M *gornja ograda funkcije* $\boldsymbol{f}$ *na pravokutniku* R. *Na* R *je* $|f_1(x, y_1, y_2)| = |y_2^2| = |y_2|^2 \leq (|y_2 - 1| + 1)^2 \leq 4$. *Također je* $|f_2(x, y_1, y_2)| = |y_1 + x| \leq |y_1| + |x| \leq 2$. *Dakle, možemo uzeti* $M = 4$ *pa je* $\delta = \frac{1}{4}$.

Ocijenit ćemo dakle rješenje inicijalnog problema na intervalu $I = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. *Prvo računamo*

$$\begin{aligned} M_1 &= \max_{x \in I} |f_1(x, 0, 1)| = 1 \ , \\ M_2 &= \max_{x \in I} |f_2(x, 0, 1)| = \max_{x \in I} |x| = \frac{1}{4} \ . \end{aligned}$$

Potrebno je još izračunati Lipschitzovu konstantu za funkciju $\boldsymbol{f}$ *na pravokutniku* R. *Neka su* $(x, y_1, \overline{y}_2)$, $(x, y_1, \widetilde{y}_2) \in R$. *Tada imamo*

$$|f_1(x, y_1, \overline{y}_2) - f_1(x, y_1, \widetilde{y}_2)| = |\overline{y}_2^2 - \widetilde{y}_2^2| = 2|\xi||\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \ ,$$

za neki $\xi \in I(\overline{y}_2, \widetilde{y}_2)$ *pa je*

$$|f_1(x, y_1, \overline{y}_2) - f_1(x, y_1, \widetilde{y}_2)| \leq 4|\overline{y}_2 - \widetilde{y}_2| \ .$$

Nadalje vrijedi

$$|f_2(x, \overline{y}_1, y_2) - f_2(x, \widetilde{y}_1, y_2)| = |\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \ .$$

Zaključujemo da možemo uzeti $L = 4$.

Konačno iz nejednakosti (1.14) slijede ocjene $|y_1(x)| \leq C$ i $|y_2(x)| \leq 1 + C$, gdje je

$$C = \delta(M_1 + M_2)e^{2L\delta} = \frac{5}{16}e^2 \; .$$

Dakle,

$$|y_1(x)| \leq \frac{5}{16}e^2 \approx 2.308, \; |y_2(x)| \leq \frac{5}{16}e^2 + 1 \approx 3.308 \; za \; x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \; .$$

Primijetimo, kako je graf rješenja podskup pravokutnika R, za rješenje vrijedi $|y_1(x)| \leq 1$, $|y_2(x)| \leq 2$ za $x \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Prema tome, pomoću Gronwallove leme dobili smo slabiju ocjenu rješenja. Istu ocjenu u ovom primjeru dobivamo i pomoću nejednakosti (1.15).

U sljedećem primjeru Gronwallova lema nam daje najbolju ocjenu.

Primjer 1.8 *Zadan je inicijalni problem*

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + x \; , \\ y_2' &= y_1 + y_2 \; , \\ y_1(0) &= 0, \; y_2(0) = 0 \; . \end{aligned}$$

Pogledat ćemo rješenje koje dobivamo primjenom Picardovog teorema na pravokutniku

$$R = \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, \; |y_i| \leq 5, \; i = 1, 2\} \; .$$

Lako je dokazati da je na R funkcija desne strane sustava Lipschitz-neprekidna po y varijablama i da je $L = 1$. Također je lako vidjeti da je $M = 10$. Prema tome, primjenom Picardovog teorema dobivamo rješenje definirano na intervalu $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. S druge strane imamo

$$M_1 = max_{x \in I}|x| = \frac{1}{2} \; , \quad M_2 = 0 \; .$$

Dakle, primjenom Gronwallove leme izvodimo ocjenu

$$|y_1(x)|, \; |y_2(x)| \leq \frac{1}{4}e \approx 0.695 \; .$$

S druge strane, iz činjenice da graf rješenja pripada R imamo $|y_1(x)|, |y_2(x)| \leq 5$, za $x \in I$, dok nejednakost (1.15) daje istu ocjenu. Prema tome, primjenom Gronwallove leme u ovom primjeru smo uspjeli poboljšati ocjenu rješenja.

1.5 Korektnost inicijalnog problema

U ovom poglavlju ćemo, koristeći Gronwallovu lemu koju smo iskazali u prethodnom poglavlju, dokazati korektnost inicijalnog problema, odnosno neprekidnost rješenja inicijalnog problema (1.7) u odnosu na zadane parametre, tj. početne uvjete i desnu stranu sustava. Radi se o Kamkeovom teoremu koji je koristan kod izvoda mnogih rezultata iz teorije sustava diferencijalnih jednadžbi. Objasnimo za početak što znači ta neprekidnost.

Neka je zadan zatvoreni pravokutnik R oko $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pogledajmo još jedan inicijalni problem, istog oblika kao i inicijalni problem (1.7) (ali s različitom desnom stranom sustava i različitim početnim uvjetima):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}' &= \boldsymbol{g}(x, \boldsymbol{z}) \ , \\ \boldsymbol{z}(\overline{x}_0) &= \overline{\boldsymbol{y}}^{(0)} \ , \end{aligned} \tag{1.16}$$

pri čemu je $\boldsymbol{g}$ funkcija koja je također neprekidna na R i Lipschitz-neprekidna na R po svim y varijablama te je $(\overline{x}_0, \overline{\boldsymbol{y}}^{(0)}) \in R$. Kažemo da rješenje $\boldsymbol{y}$ inicijalnog problema (1.7) ovisi neprekidno o početnim uvjetima i desnoj strani sustava ako rješenje $\boldsymbol{z}$ inicijalnog problema (1.16) "konvergira" prema $\boldsymbol{y}$ kad $\overline{x}_0$, $\overline{\boldsymbol{y}}^{(0)}$ i $\boldsymbol{g}$ "konvergiraju" prema x_0, $\boldsymbol{y}^{(0)}$ i $\boldsymbol{f}$ redom.

Zapišimo tu neprekidnost precizno matematički. Imamo neprekidnost rješenja inicijalnog problema (1.7) u ovisnosti o svim zadanim parametrima ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da

$$|x_0 - \overline{x}_0| < \delta \ , \ \ \|\boldsymbol{y}^{(0)} - \overline{\boldsymbol{y}}^{(0)}\|_\infty < \delta \ , \ \ \|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|_{\infty, R} < \delta$$

povlači

$$\|\boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{z}(x)\|_\infty < \varepsilon \ , \ x \in I_P \ ,$$

gdje smo s I_P označili (neprazan) presjek intervala egzistencije rješenja $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$. Vidjet ćemo da, za dovoljne male razlike u početnim uvjetima, možemo naći I_P oko točke x_0.

Iskažimo sada teorem o neprekidnosti:

Teorem 1.6 (Kamke) *Neka je $R \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ zatvoren pravokutnik oko točke $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ zadan s*

$$R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |x - x_0| \leq a, \ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{(0)}\|_\infty \leq b, \ i = 1, \ldots, n\} \ ,$$

za neke a, $b > 0$ te neka je $\boldsymbol{f} \colon R \to \mathbb{R}^n$ funkcija koja je neprekidna i Lipschitz-neprekidna po svim y varijablama na R. Tada rješenje inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \ , \\ \boldsymbol{y}(x_0) &= \boldsymbol{y}^{(0)} \end{aligned} \tag{1.17}$$

ovisi (uniformno) neprekidno o desnoj strani sustava i početnim uvjetima.

Dokaz. Dokazat ćemo prvo da za $(\overline{x}_0, \overline{\boldsymbol{y}}^{(0)})$ dovoljno blizu $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)})$ inicijalni problemi (1.16) i (1.17) imaju intervale egzistencije rješenja čiji je presjek neprazan.

Neka na pravokutniku R vrijedi $\|\boldsymbol{f}\|_{\infty,R} < \overline{M}$, $i = 1, \dots, n$. Dovoljno je promatrati samo funkcije $\boldsymbol{g}$, neprekidne i Lipschitz-neprekidne po svim y varijablama na R, za koje je npr. $\|\boldsymbol{f} - \boldsymbol{g}\|_{\infty,R} < \overline{M}$. Tada za $M = 2\overline{M}$ imamo $\|\boldsymbol{f}\|_{\infty,R} < M$ i $\|\boldsymbol{g}\|_{\infty,R} < M$. Prvo znamo, prema Picardovom teoremu, da je rješenje $\boldsymbol{y}$ definirano na intervalu $I_1 := [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$ gdje je $\delta_1 = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$.

Uzmimo α, $\beta > 0$ tako da je $\alpha < \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{b}{M}\right\}$ i $\beta < b - \alpha M$ te neka su dani $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}$ i $\overline{\boldsymbol{y}}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ takvi da vrijedi $|x_0 - \overline{x}_0| < \alpha$ i $\|\boldsymbol{y}^{(0)} - \overline{\boldsymbol{y}}^{(0)}\|_\infty < \beta$. Pokazat ćemo da tada dolazi do preklapanja intervala egzistencije rješenja za dva promatrana inicijalna problema. Prvo definiramo

$$\overline{R} = \left\{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ |x - \overline{x}_0| \le a - \alpha,\ \|\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}}^{(0)}\|_\infty \le b - \beta\right\}.$$

Primjećujemo da je $\overline{R} \subset R$. Tada, prema Picardovom teoremu, postoji rješenje $\boldsymbol{z}$ inicijalnog problema (1.16) definirano na $I_2 := [\overline{x}_0 - \delta_2, \overline{x}_0 + \delta_2]$, gdje je $\delta_2 = \min\left\{a - \alpha, \frac{b-\beta}{M}\right\}$.

Pretpostavimo da je npr. $\overline{x}_0 > x_0$. Tada će se intervali I_1 i I_2 sijeći u nekom intervalu oko x_0 ako i samo ako je lijevi rub intervala I_2 lijevo od x_0, tj. ako je $\overline{x}_0 - \delta_2 < x_0$, odnosno ako je $0 < \overline{x}_0 - x_0 < \delta_2$.
Analogno, ako je $\overline{x}_0 < x_0$, onda se I_1 i I_2 sijeku u intervalu oko x_0 ako i samo ako je desni rub intervala I_2 desno od x_0, odnosno ako je $\overline{x}_0 + \delta_2 > x_0$, tj. $0 < x_0 - \overline{x}_0 < \delta_2$.

Kako je $\alpha < \delta_2$, zaključujemo da vrijedi $|x_0 - \overline{x}_0| < \alpha < \delta_2$ pa se intervali I_1 i I_2 uistinu sijeku u nekom intervalu oko x_0.

Da bismo ocijenili razliku rješenja $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$, zapišimo pripadne inicijalne probleme u ekvivalentnoj integralnoj formi:

$$\begin{aligned} y_i(x) &= y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{y}(t))dt\ , \\ z_i(x) &= \overline{y}_i^{(0)} + \int_{\overline{x}_0}^{x} g_i(t, \boldsymbol{z}(t))dt\ ,\ i = 1, \dots, n\ , \end{aligned}$$

pri čemu uzimamo $x \in I_1 \cap I_2$.

Oduzimanjem prethodnih dviju relacija za $i = 1, \dots, n$ dobivamo

$$\begin{aligned} y_i(x) - z_i(x) &= y_i^{(0)} - \overline{y}_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{y}(t))dt - \int_{\overline{x}_0}^{x} g_i(t, \boldsymbol{z}(t))dt \\ &= y_i^{(0)} - \overline{y}_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{y}(t))dt - \int_{\overline{x}_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{z}(t))dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\overline{x}_0}^{x}[f_i(t,\boldsymbol{z}(t))-g_i(t,\boldsymbol{z}(t))]dt\\
&=y_i^{(0)}-\overline{y}_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}[f_i(t,\boldsymbol{y}(t))-f_i(t,\boldsymbol{z}(t))]dt\\
&+\int_{x_0}^{x}f_i(t,\boldsymbol{z}(t))dt-\int_{\overline{x}_0}^{x}f_i(t,\boldsymbol{z}(t))dt\\
&+\int_{\overline{x}_0}^{x}[f_i(t,\boldsymbol{z}(t))-g_i(t,\boldsymbol{z}(t))]dt\\
&=y_i^{(0)}-\overline{y}_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}[f_i(t,\boldsymbol{y}(t))-f_i(t,\boldsymbol{z}(t))]dt\\
&+\int_{x_0}^{\overline{x}_0}f_i(t,\boldsymbol{z}(t))dt+\int_{\overline{x}_0}^{x}[f_i(t,\boldsymbol{z}(t))-g_i(t,\boldsymbol{z}(t))]dt\ .
\end{aligned}
$$

Koristeći nejednakost (1.8) napokon dobivamo

$$
\begin{aligned}
|y_i(x)-z_i(x)| &\leq |y_i^{(0)}-\overline{y}_i^{(0)}|+\left|\int_{x_0}^{x}L\sum_{k=1}^{n}|y_k(t)-z_k(t)|dt\right|\\
&+M|x_0-\overline{x}_0|+\left|\int_{\overline{x}_0}^{x}|f_i(t,\boldsymbol{z}(t))-g_i(t,\boldsymbol{z}(t))|dt\right|\ . \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

Sad pretpostavimo da je $(\overline{x}_0,\overline{\boldsymbol{y}}^{(0)})\in R$ i neka je dana funkcija $\boldsymbol{g}\colon R\to\mathbb{R}^n$ (neprekidna i Lipschitz-neprekidna po y varijablama na R) tako da vrijedi $|x_0-\overline{x}_0|<\delta$, $\|\boldsymbol{y}^{(0)}-\overline{\boldsymbol{y}}^{(0)}\|_\infty<\delta$, $\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_{\infty,R}<\delta$, gdje je $\delta\leq\min\{\alpha,\beta,\overline{M}\}$.
Zbrajanjem nejednakosti (1.18) za $i=1,\dots,n$ dobivamo

$$
\sum_{i=1}^{n}|y_i(x)-z_i(x)|\leq n\delta+nL\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{n}|y_i(t)-z_i(t)|dt\right|+Mn\delta+na\delta. \qquad (1.19)
$$

Koristeći Gronwallovu lemu kao i kod ocjene rješenja, dakle razdvajanjem na slučajeve $x\geq x_0$ i $x\leq x_0$, iz nejednakosti (1.19) za $x\in I_1\cap I_2$ dobivamo posve analogno ocjenu

$$
\|\boldsymbol{y}(x)-\boldsymbol{z}(x)\|_1\leq n(\delta+M\delta+a\delta)e^{nLa}\ .
$$

Ako je dakle zadan $\varepsilon>0$, onda za $\delta<\min\left\{\alpha,\beta,\overline{M},\frac{\varepsilon}{n(1+M+a)e^{nLa}}\right\}$ vrijedi da $|x_0-\overline{x}_0|<\delta$, $\|\boldsymbol{y}^{(0)}-\overline{\boldsymbol{y}}^{(0)}\|_\infty<\delta$ i $\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|_{\infty,R}<\delta$ povlači

$$
\|\boldsymbol{y}(x)-\boldsymbol{z}(x)\|_\infty<\varepsilon\ ,\quad x\in I_1\cap I_2\ ,
$$

iz čega slijedi tražena konvergencija.

$\square$

1.6 Neprekidna diferencijabilnost rješenja u odnosu na početni uvjet

Sada ćemo navesti uvjete uz koje je rješenje inicijalnog problema

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) , \\
\boldsymbol{y}(x_0) &= \boldsymbol{y}^{(0)}
\end{aligned} \tag{1.20}
$$

i neprekidno diferencijabilno u odnosu na početni uvjet. Dokazat ćemo da su parcijalne derivacije rješenja inicijalnog problema (1.20) po varijablama početnog uvjeta rješenja određenih inicijalnih problema pridruženih linearnim sustavima. Egzistenciju i jedinstvenost rješenja takvih inicijalnih problema komentiramo na početku sljedećeg poglavlja. Iz pripadnih integralnih formulacija tada slijedi neprekidnost promatranih parcijalnih derivacija, odnosno neprekidna diferencijabilnost rješenja inicijalnog problema (1.20) po početnom uvjetu. Preciznije, vrijedi rezultat

Teorem 1.7 *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvoren skup i neka je $\boldsymbol{f} \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ funkcija koja je neprekidna na Ω i koja ima sve parcijalne derivacije na Ω. Nadalje, zadan je zatvoren pravokutnik $R \subset \Omega$ s*

$$
R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \ |x - x_0| \le a \ , \ \ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{(0)}\|_\infty \le b\}
$$

i neka su parcijalne derivacije $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ neprekidne na R, $i, j = 1, \ldots, n$. Neka je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x, x_0, \boldsymbol{y}^{(0)})$ rješenje inicijalnog problema

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \\
\boldsymbol{y}(x_0) &= \boldsymbol{y}^{(0)} .
\end{aligned}
$$

Označimo $v_{ij}(x) = \frac{\partial}{\partial y_j^{(0)}} y_i(x, x_0, \boldsymbol{y}^{(0)})$ i $w_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_0} y_i(x, x_0, \boldsymbol{y}^{(0)})$. Tada vrijedi

$$
v'_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, \boldsymbol{y}(x, x_0, \boldsymbol{y}^{(0)})) v_{kj}(x) \ , \tag{1.21}
$$

$$
v_{ij}(x_0) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \ i = j \\ 0, \ i \ne j \end{array} \right. . \tag{1.22}
$$

Također vrijedi

$$
w'_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, \boldsymbol{y}(x, x_0, \boldsymbol{y}^{(0)})) w_k(x) \ , \tag{1.23}
$$

$$
w_i(x_0) = -f_i(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)}) \ . \tag{1.24}
$$

Dokaz. Primijetimo prvo da ako fiksiramo $j \in \{1, \ldots, n\}$, sustav (1.21) je sustav linearnih jednadžbi određen neprekidnom matričnom funkcijom $\boldsymbol{A}$, gdje je $A_{ik}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, \boldsymbol{y}(x, x_0, \boldsymbol{y}^{(0)}))$, $i, k = 1, \ldots, n$. Stoga rješenje inicijalnog problema (1.21)-(1.22) postoji, jedinstveno je i definirano je tamo gdje je definirano i rješenje $\boldsymbol{y}$ (v.

potpoglavlje 2.1). Isto vrijedi i za rješenje inicijalnog problema (1.23)-(1.24).

Definiramo za $j = 1, \ldots, n$ i $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}(x) = \boldsymbol{y}(x, x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_{j-1}^{(0)}, y_j^{(0)} + h, y_{j+1}^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \ , \\
&\widetilde{\boldsymbol{u}}(x) = \boldsymbol{y}(x, x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}) \ .
\end{aligned}$$

Iz dokaza Kamkeovog teorema znamo da će za dovoljno mali h funkcija $\overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}$ biti definirana na nekom intervalu I_P oko x_0. Sada imamo za $i, j = 1, \ldots, n$ i $x \in I_p$

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_i^{(j,h)}(x) = \int_{x_0}^{x} f_i(t, \overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}(t))dt + \begin{cases} y_i^{(0)} + h, \ i = j \\ y_i^{(0)}, \ i \neq j \end{cases} \ , \\
&\widetilde{u}_i(x) = \int_{x_0}^{x} f_i(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t))dt + y_i^{(0)} \ . \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

Neka je za $j \in \{1, \ldots, n\}$ funkcija $\boldsymbol{z}_j = (z_{1j}, \ldots, z_{nj})$ rješenje inicijalnog problema (1.21)-(1.22). Tada je

$$z_{ij}(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) z_{kj}(t)dt + \begin{cases} 1, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases} \ . \qquad (1.26)$$

Sada želimo dokazati da je

$$v_{ij}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{u}_i^{(j,h)}(x) - \widetilde{u}_i(x)}{h} = z_{ij}(x) \ .$$

Iz jednakosti (1.25) i (1.26) imamo

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\overline{u}_i^{(j,h)}(x) - \widetilde{u}_i(x)}{h} - z_{ij}(x) \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} \left(\frac{f_i(t, \overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}(t)) - f_i(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t))}{h} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) z_{kj}(t) \right) dt \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} \left(\frac{f_i(t, \overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}(t)) - f_i(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t))}{h} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) \frac{\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)}{h} \right) dt \right. \\
&\left. + \int_{x_0}^{x} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) \frac{\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)}{h} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) z_{kj}(t) \right) dt \right| \ . \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

Primijenimo li Teorem srednje vrijednosti, imamo

$$f_i(t, \overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}(t)) - f_i(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \boldsymbol{a}^{(i,j,h)}(t))(\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)) \ ,$$

gdje je $\boldsymbol{a}^{(i,j,h)}(t)$ neka točka iz segmenta $[\overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}(t), \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)]$.

Sada iz jednakosti (1.27) dobivamo

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\overline{u}_i^{(j,h)}(x) - \widetilde{u}_i(x)}{h} - z_{ij}(x) \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \boldsymbol{a}^{(i,j,h)}(t)) - \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) \right) \frac{\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)}{h} dt \right. \\
&\left. + \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) \left(\frac{\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)}{h} - z_{kj}(t) \right) dt \right| . \qquad (1.28)
\end{aligned}$$

Nadalje, primijetimo da je

$$\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t) = \int_{x_0}^{x} (f_k(t, \overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}(t)) - f_k(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)))dt + \begin{cases} h, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} . \qquad (1.29)$$

Sad opet primjenom Teorema srednje vrijednosti možemo zapisati

$$f_k(t, \overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}(t)) - f_k(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial y_r}(t, \boldsymbol{b}^{(k,j,h)}(t))(\overline{u}_r^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_r(t)) , \qquad (1.30)$$

za neki $\boldsymbol{b}^{(k,j,h)}(t)$ iz segmenta $[\overline{\boldsymbol{u}}^{(j,h)}(t), \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)]$.

Neka je

$$N_{kr} = \left\| \frac{\partial f_k}{\partial y_r} \right\|_{\infty, R} , \quad k, r = 1, \ldots, n$$

i neka je

$$N = \max_{k,r=1,\ldots,n} N_{kr} .$$

Tada iz jednakosti (1.29) i (1.30) imamo

$$|\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)| \leq N \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{r=1}^{n} |\overline{u}_r^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_r(t)| dt \right| + |h|$$

pa sumiranjem po $k = 1, \ldots, n$ dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} |\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)| \leq nN \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} |\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)| dt \right| + n|h| .$$

Gronwallova lema nam tada daje ocjenu

$$\sum_{k=1}^{n} |\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)| \leq n|h|e^{nNa} ,$$

iz čega zaključujemo da je izraz

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} |\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)|}{|h|}$$

ograničen za svaki h.

Iz prethodne činjenice, neprekidnosti parcijalnih derivacija funkcije $\boldsymbol{f}$ na R te konvergencije $\boldsymbol{a}^{(i,j,h)}(t) \to \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)$, kad $h \to 0$, dobivamo

$$\lim_{h\to 0} \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \boldsymbol{a}^{(i,j,h)}(t)) - \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) \right| \frac{|\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)|}{|h|} dt = 0 \ ,$$

odnosno za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta_\varepsilon > 0$ takav da za $|h| < \delta_\varepsilon$ vrijedi

$$\left| \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \boldsymbol{a}^{(i,j,h)}(t)) - \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(t, \widetilde{\boldsymbol{u}}(t)) \right) \frac{\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)}{h} dt \right| < \varepsilon \ .$$

Dakle, za $|h| < \delta_\varepsilon$ iz jednakosti (1.28) dobivamo

$$\left| \frac{\overline{u}_i^{(j,h)}(x) - \widetilde{u}_i(x)}{h} - z_{ij}(x) \right| < \varepsilon + \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} N \left| \frac{\overline{u}_k^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_k(t)}{h} - z_{kj}(t) \right| dt \right| \ . \quad (1.31)$$

Sada sumiramo nejednakost (1.31) po i i dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\overline{u}_i^{(j,h)}(x) - \widetilde{u}_i(x)}{h} - z_{ij}(x) \right| < n\varepsilon + \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{n} nN \left| \frac{\overline{u}_i^{(j,h)}(t) - \widetilde{u}_i(t)}{h} - z_{ij}(t) \right| dt \right| \ ,$$

iz čega primjenom Gronwallove leme dobivamo

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\overline{u}_i^{(j,h)}(x) - \widetilde{u}_i(x)}{h} - z_{ij}(x) \right| \le n\varepsilon e^{nNa} \ .$$

Sada definiramo $\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{n \exp(nNa)}$ i neka je $\overline{\delta} = \delta_{\overline{\varepsilon}}$. Tada za $|h| < \overline{\delta}$ imamo

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\overline{u}_i^{(j,h)}(x) - \widetilde{u}_i(x)}{h} - z_{ij}(x) \right| \le \varepsilon \ ,$$

i time smo dokazali da su funkcije v_{ij} i z_{ij} jednake.

Sasvim analogno dokazujemo i drugu tvrdnju teorema. $\square$

1.7 Egzistencija rješenja uz pretpostavke neprekidnosti

Dosad smo promatrali egzistenciju rješenja inicijalnog problema (1.7) uz pretpostavku Lipschitz-neprekidnosti desne strane sustava. Takva pretpostavka nam je ujedno osiguravala i jedinstvenost rješenja. Pitamo se je li Lipschitz-neprekidnost nužna za postojanje rješenja. Pogledajmo npr. sljedeći inicijalni problem

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{|y|}\ , \\ y(0) &= 0\ . \end{aligned} \tag{1.32}$$

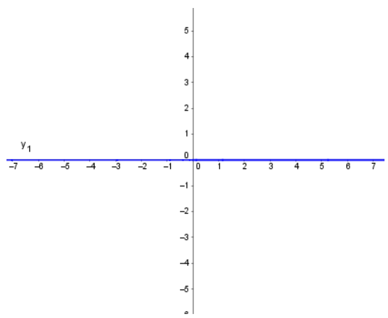
Riješimo prvo jednadžbu za $y > 0$. Jednadžba tada glasi $y' = \sqrt{y}$. Separacijom varijabli dobivamo $y^{-\frac{1}{2}}dy = dx$ pa imamo rješenje $y = \frac{(x+C)^2}{4}$, gdje je $C \in \mathbb{R}$ konstanta. Ako vrijedi i početni uvjet $y(0) = 0$, dobivamo $C = 0$, odnosno rješenje inicijalnog problema je $y(x) = \frac{x^2}{4}$. Odredimo sad domenu tog rješenja. Njegovim uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobivamo $\frac{x}{2} = \frac{|x|}{2}$ što vrijedi za $x \geq 0$.
Ako je $y < 0$, imamo jednadžbu $y' = \sqrt{-y}$ pa analogno separacijom varijabli dobivamo opće rješenje $y = -\frac{(x+C)^2}{4}$. Iz $y(0) = 0$ opet slijedi $C = 0$, dakle rješenje inicijalnog problema je $y(x) = -\frac{x^2}{4}$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo $-\frac{x}{2} = \frac{|x|}{2}$ pa je rješenje definirano za $x \leq 0$.

Možemo stoga primijetiti da sve funkcije $y_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$ (slika 1.1-1.4) predstavljaju rješenje inicijalnog problema (1.32), gdje je

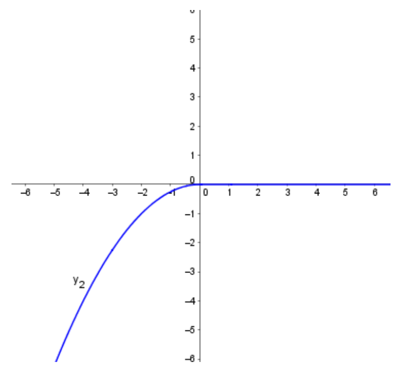
1. $y_1(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad ,$
2. $y_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2\ ,\ x \leq 0 \\ 0\ ,\ x \geq 0 \end{cases} \quad ,$
3. $y_3(x) = \begin{cases} 0\ ,\ x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2\ ,\ x \geq 0 \end{cases} \quad ,$
4. $y_4(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2\ ,\ x \leq 0 \\ \frac{1}{4}x^2\ ,\ x \geq 0 \end{cases} \quad .$

Primijetimo da su sve funkcije y_i, $i = 1, \ldots, 4$ glatke na $\mathbb{R}$, što je nužni uvjet da bi bile rješenje inicijalnog problema. Bitno je provjeriti neprekidnost derivacije u $x = 0$. Lako je dokazati da je $y_i'(0) = 0$. Nakon toga, npr. za posljednju funkciju, očito vrijedi da je

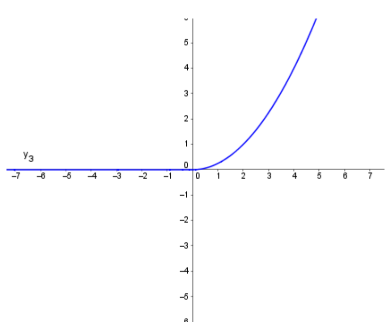
$$\lim_{x \to 0^-} y_4'(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1}{2}x\right) = 0 = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x = \lim_{x \to 0^+} y_4'(x)\ .$$



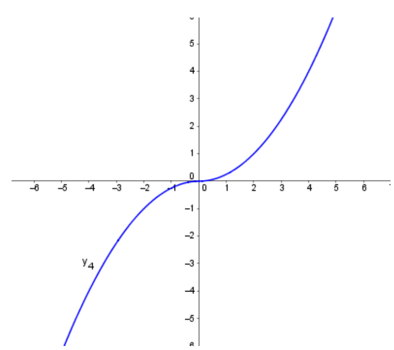
Slika 1.1:
rješenje y_1



Slika 1.2:
rješenje y_2



Slika 1.3:
rješenje y_3



Slika 1.4:
rješenje y_4

Time smo pokazali da je funkcija y_4 klase C^1 na cijelom $\mathbb{R}$. Analogno dokazujemo neprekidnost derivacije i za ostale funkcije.

Sada možemo zaključiti da inicijalni problem (1.32) nema jedinstveno rješenje. Štoviše, ne možemo čak naći nijedan interval oblika $\langle -\delta, \delta \rangle$ na kojem inicijalni problem ima jedinstveno rješenje. Dakle, inicijalni problem nema ni lokalno jedinstveno rješenje.

Sad ćemo konstruirati još rješenja istog inicijalnog problema. Primijetimo da je $y = 0$ jedno rješenje inicijalnog problema na intervalu $[-\overline{x}_0, x_0]$ za proizvoljne $x_0, \overline{x}_0 > 0$. Želimo proširiti to rješenje udesno. Tada rješavamo inicijalni problem

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{|y|} \ , \\ y(x_0) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Ako je $y > 0$, onda znamo da je netrivijalno rješenje oblika $y(x) = \frac{1}{4}(x + C)^2$, odnosno uvrštavanjem početnog uvjeta slijedi $y(x) = \frac{1}{4}(x - x_0)^2$. Opet, uvrštavanjem u zadanu jednadžbu, zaključujemo da je to rješenje definirano za $x \geq x_0$.
Ako je $y < 0$, analogno dobivamo rješenje $y(x) = -\frac{1}{4}(x - x_0)^2$, koje vrijedi za $x \leq x_0$. Dakle, s tim rješenjem ne možemo proširiti udesno rješenje dano na intervalu $[-\overline{x}_0, x_0]$.

Na lijevom rubu rješenje proširujemo pomoću inicijalnog problema

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{|y|} \ , \\ y(-\overline{x}_0) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Za $x \leq -\overline{x}_0$ rješenje možemo pokušati proširiti s $y(x) = \frac{1}{4}(x + \overline{x}_0)^2$ ili $y(x) = -\frac{1}{4}(x+\overline{x}_0)^2$. Međutim, prvo rješenje zadovoljava zadanu jednadžbu samo za $x \geq -\overline{x}_0$ pa ulijevo proširujemo s drugim od ta dva rješenja, jer je ono rješenje jednadžbe za $x \leq -\overline{x}_0$.
Znači za odabrane x_0, $\overline{x}_0 > 0$ možemo napraviti netrivijalno proširenje

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x + \overline{x}_0)^2 \ , \ x \leq -\overline{x}_0 \\ 0, \ x \in [-\overline{x}_0, x_0] \\ \frac{1}{4}(x - x_0)^2 \ , \ x \geq x_0 \end{cases} .$$

Kako interval $[-\overline{x}_0, x_0]$ možemo odabrati proizvoljno, konačno zaključujemo da imamo beskonačno mnogo rješenja inicijalnog problema (1.32).

Rješenje na $[-\overline{x}_0, x_0]$ smo mogli na nekom od rubova tog intervala proširiti i s trivijalnim rješenjem. Preostala rješenja inicijalnog problema su stoga

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x + \overline{x}_0)^2 \ , \ x \leq -\overline{x}_0 \\ 0 \ , \ x \geq -\overline{x}_0 \end{cases} ,$$

za proizvoljan $\overline{x}_0 > 0$ i

$$y(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \leq x_0 \\ \frac{1}{4}(x - x_0)^2 \ , \ x \geq x_0 \end{cases} ,$$

za proizvoljan $x_0 > 0$.

Primijetimo da funkcija na desnoj strani jednadžbe inicijalnog problema (1.32) nije Lipschitz-neprekidna na svakom pravokutniku u $\mathbb{R}^2$ po y varijabli. Naime, uzmimo neki pravokutnik R u $\mathbb{R}^2$ koji sadrži točku $(0,0)$. Pretpostavimo da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{|y|}$, Lipschitz-neprekidna po varijabli y na R. Tada postoji konstanta $L > 0$ takva da vrijedi

$$|f(x,\overline{y}) - f(x,\widetilde{y})| \le L|\overline{y} - \widetilde{y}|$$

za svako $(x,\overline{y})$, $(x,\widetilde{y}) \in R$. Neka su $\overline{y}$, $\widetilde{y} > 0$. Tada imamo

$$|\sqrt{\overline{y}} - \sqrt{\widetilde{y}}| \le L|\overline{y} - \widetilde{y}|$$

pa vrijedi

$$|\sqrt{\overline{y}} + \sqrt{\widetilde{y}}| \ge \frac{1}{L}\,.$$

Međutim, u pravokutniku R oko $(0,0)$ možemo odabrati točke $(x,\overline{y})$, $(x,\widetilde{y})$ tako da su $\overline{y}$, $\widetilde{y} > 0$ i dovoljno blizu nule, tj. da je $|\sqrt{\overline{y}} + \sqrt{\widetilde{y}}| < \frac{1}{L}$ te time dobivamo kontradikciju. Dakle f nije Lipschitz-neprekidna po varijabli y ni na jednom zatvorenom pravokutniku oko točke $(0,0)$.

Analogno zaključujemo da f nije Lipschitz-neprekidna po varijabli y ni na zatvorenom pravokutniku oko točke oblika $(x_0,0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Prema tome, ako početni uvjet u inicijalnom problemu (1.32) zamijenimo s $y(x_0) = 0$, opet ne možemo primijeniti Picardov teorem ni na jednom pravokutniku oko $(x_0,0)$. Kao i prije, možemo konstruirati beskonačno rješenja inicijalnog problema

$$\begin{aligned} &y' = \sqrt{|y|}\,,\\ &y(x_0) = 0\,. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Neka rješenja promatranog inicijalnog problema su funkcije oblika

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-a)^2\,,\ x \le a \\ 0,\ x \in [a,b] \\ \frac{1}{4}(x-b)^2\,,\ x \ge b \end{cases}\,,$$

pri čemu vrijedi $a \le x_0 \le b$.

Rješenja su dana i s

$$y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x-a)^2\,,\ x \le a \\ 0,\ x \ge a \end{cases}\,,$$

za $a \le x_0$ te

$$y(x) = \begin{cases} 0\,,\ x \le b \\ \frac{1}{4}(x-b)^2,\ x \ge b \end{cases}\,,$$

za $b \geq x_0$.

Sada ćemo još promotriti slučaj kad je točka početnog uvjeta $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ takva da je $y_0 \neq 0$. Promatrajući rješenja koja smo dosad generirali za inicijalni problem (1.33), vidimo da možemo pronaći rješenje jednadžbe $y' = \sqrt{|y|}$ čiji graf prolazi kroz točku (x_0, y_0), ali ga možemo izabrati na beskonačno mnogo načina. Drugim riječima, i za problem

$$
\begin{aligned}
&y' = \sqrt{|y|}\ , \\
&y(x_0) = y_0,\ y_0 \neq 0
\end{aligned} \tag{1.34}
$$

postoji beskonačno mnogo rješenja.

Preciznije, ako je $y_0 > 0$, onda u nekoj okolini točke x_0 za rješenje y inicijalnog problema (1.34) zbog neprekidnosti vrijedi $y > 0$, zbog čega je u toj okolini $y(x) = \frac{(x+C)^2}{4}$. Imamo dvije moguće vrijednosti konstante C, a to su $C = -x_0 \pm 2\sqrt{y_0}$. Kako to rješenje vrijedi za $x \geq -C = x_0 \pm 2\sqrt{y_0}$, dobivamo da je jedina mogućnost $C = -x_0 + 2\sqrt{y_0}$, odnosno imamo rješenje $y(x) = \frac{(x-x_0+2\sqrt{y_0})^2}{4}$ za $x \geq x_0 - 2\sqrt{y_0}$. Da bismo proširili to rješenje ulijevo, rješavamo problem

$$
\begin{aligned}
&y' = \sqrt{|y|}\ , \\
&y(x_0 - 2\sqrt{y_0}) = 0\ ,
\end{aligned}
$$

za koji znamo da ima beskonačno rješenja za $x \leq x_0 - 2\sqrt{y_0}$ (vidi rješenja inicijalnog problema (1.33)). Jednostavno je dokazati da spajanjem tih rješenja s već dobivenim rješenjem za $x \geq x_0 - 2\sqrt{y_0}$ dobivamo uvijek glatku funkciju pa su sve tako dobivene funkcije rješenja inicijalnog problema (1.34).

Primjećujemo da oko točke (x_0, y_0) možemo naći zatvoreni pravokutnik koji ne siječe x-os. Neka je to pravokutnik

$$
R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}\ .
$$

Dakle vrijedi $y_0 - b > 0$, a za točke $(x, \overline{y})$, $(x, \widetilde{y}) \in R$ imamo $y_0 - b \leq \overline{y},\ \widetilde{y} \leq y_0 + b$. Prema Teoremu srednje vrijednosti je

$$
|f(x, \overline{y}) - f(x, \widetilde{y})| = \left|\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\right| |\overline{y} - \widetilde{y}| \leq \frac{1}{2\sqrt{y_0 - b}} |\overline{y} - \widetilde{y}|\ ,
$$

za neki $\xi \in I(\overline{y}, \widetilde{y})$. Prema tome, f je Lipschitzova na R po y varijabli.

Analogan postupak možemo ponoviti oko proizvoljne točke $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ grafa rješenja za koju je $\overline{x}_0 > x_0 - 2\sqrt{y_0}$ te prema Picardovom teoremu opet dobivamo jedinstvenost rješenja na nekom intervalu oko $\overline{x}_0$.

Zaključujemo da je rješenje inicijalnog problema jedinstveno na intervalu $[x_0 - 2\sqrt{y_0}, +\infty\rangle$. Kao što smo vidjeli, na intervalu $\langle -\infty, x_0 - 2\sqrt{y_0}\rangle$ nije jedinstveno.

Na analogan način možemo provesti razmatranja i za inicijalni problem (1.34) kad je $y_0 < 0$ i dolazimo do zaključka da je rješenje jedinstveno do točke u kojoj graf rješenja dosegne x-os, a zatim se gubi jedinstvenost. Konkretno, rješenje u okolini x_0 je oblika $y = -\frac{(x+C)^2}{4}$ te uvrštavanjem početnog uvjeta dobivamo $C = -x_0 \pm 2\sqrt{-y_0}$. S obzirom da je to rješenje definirano za $x \leq -C = x_0 \pm 2\sqrt{-y_0}$, zaključujemo da je $C = -x_0 - 2\sqrt{-y_0}$. Dakle, imamo rješenje $y = \frac{(x - x_0 - 2\sqrt{-y_0})^2}{4}$ za $x \leq x_0 + 2\sqrt{-y_0}$. Za $x > x_0 + 2\sqrt{-y_0}$ rješenje nije jedinstveno.

Konačno zaključujemo da inicijalni problem (1.34) ima rješenje koje je proširivo na cijeli skup $\mathbb{R}$, odnosno ima globalno rješenje. Ni za koji izbor točke početnog uvjeta rješenje nije jedinstveno, ali imamo lokalnu jedinstvenost rješenja.

Prethodni primjer nam je pokazao da nedostatak Lipschitz-neprekidnosti kod desne strane sustava može utjecati na jedinstvenost rješenja. Pitamo se može li utjecati i na egzistenciju. Dakle, zanima nas što možemo zaključiti o egzistenciji inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \ , \\ \boldsymbol{y}(x_0) &= \boldsymbol{y}^{(0)} \ , \end{aligned} \tag{1.35}$$

ako je funkcija $\boldsymbol{f}$ samo neprekidna na svojoj domeni, odnosno ako nemamo pretpostavku Lipschitz-neprekidnosti za funkciju $\boldsymbol{f}$.

Teorem koji nam daje odgovor na to pitanje je Peanov teorem. U njegovom dokazu se pozivamo na Arzelin i Ascolijev teorem te ćemo prije iskaza tih teorema objasniti neke pojmove vezane uz njih.

Definicija 1.3 *Kažemo da je niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, ekvineprekidan ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za $x, \overline{x} \in [a,b]$, $|x - \overline{x}| < \delta$ vrijedi*

$$|f_n(x) - f_n(\overline{x})| < \varepsilon \ , \ \textit{za svako } n \in \mathbb{N} \ .$$

Primijetimo, ako je niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ekvineprekidan, onda je svaka funkcija članica niza uniformno neprekidna na $[a,b]$. Međutim, ne možemo ništa tvrditi o konvergenciji niza. Pogledajmo to na dva primjera.

Prvo, neka je niz funkcija zadan s $f_n(x) = (-1)^n$, $x \in [a,b]$. Očito se radi o konstantnim funkcijama i ne postoji $\lim_n f_n(x)$ ni za jedan $x \in [a,b]$. Dakle, niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira. S druge strane, kako je $|f_n(x) - f_n(\overline{x})| = 0$ za $x, \overline{x} \in [a,b]$, očito je da je niz funkcija ekvineprekidan.

Sada pogledajmo nešto općenitiji niz funkcija. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, niz neprekidnih funkcija na $[a,b]$ koje uniformno konvergiraju prema funkciji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dokazat ćemo da je taj niz ekvineprekidan.
Kako niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira prema f, funkcija f je neprekidna na $[a,b]$ pa je i uniformno neprekidna na $[a,b]$. Dakle, za zadani $\varepsilon > 0$ postoji $\overline{\delta} > 0$ takav da za x, $\overline{x} \in [a,b]$ za koje je $|x - \overline{x}| < \overline{\delta}$ vrijedi $|f(x) - f(\overline{x})| < \frac{\varepsilon}{3}$. Kako niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira uniformno prema f, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za $n > n_0$ i za svaki $x \in [a,b]$ vrijedi

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\ .$$

Tada za $n > n_0$ i x, $\overline{x} \in [a,b]$ takve da je $|x - \overline{x}| < \overline{\delta}$ imamo

$$|f_n(x) - f_n(\overline{x})| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(\overline{x})| + |f(\overline{x}) - f_n(\overline{x})| < \varepsilon\ .$$

Primijetimo još da zbog uniformne neprekidnosti funkcija $f_1, \ldots, f_{n_0}$ postoje δ_k, $k = 1, \ldots, n_0$ takvi da za x, $\overline{x} \in [a,b]$, $|x - \overline{x}| < \delta_k$ vrijedi $|f_k(x) - f_k(\overline{x})| < \varepsilon$.
Neka je sada $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_{n_0}, \overline{\delta}\}$. Konačno zaključujemo da za x, $\overline{x} \in [a,b]$, $|x - \overline{x}| < \delta$ imamo $|f_n(x) - f_n(\overline{x})| < \varepsilon$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Prema tome, postoje i ekvineprekidni nizovi koji konvergiraju.

Imamo i sljedeću definiciju:

Definicija 1.4 *Neka je dan niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Kažemo da je taj niz ekviograničen (ili uniformno ograničen) ako postoji konstanta $M > 0$ takva da vrijedi $|f_n(x)| \le M$ za svako $x \in [a,b]$ i $n \in \mathbb{N}$.*

Analogno definiramo i ekvineprekidnost i ekviograničenost nizova funkcija s $[a,b]$ u $\mathbb{R}^n$, koristeći vektorsku normu.

Konačno možemo iskazati sljedeće teoreme:

Teorem 1.8 (Ascoli) *Neka je $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ normirani prostor neprekidnih funkcija na $[a,b]$ s normom definiranom s*

$$\|\boldsymbol{f}\| = \max_{x\in[a,b]} \|\boldsymbol{f}(x)\|\ ,$$

(normu vektora $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definiramo s $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$). Tada je niz funkcija iz $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ relativno kompaktan u $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako je ekvineprekidan i ekviograničen.

□

Preciznije, ako za zadani niz funkcija iz $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ dokažemo da je ekvineprekidan i ekviograničen, iz Ascolijevog teorema slijedit će da je taj niz relativno kompaktan skup, odnosno da postoji podniz tog niza funkcija koji konvergira prema nekoj funkciji iz $C([a,b];\mathbb{R}^n)$.

U dokazu ekvineprekidnosti i ekviograničenosti niza može nam pomoći sljedeći rezultat:

Teorem 1.9 (Arzela) *Neka je $(\boldsymbol{f}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ niz funkcija iz $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ takvih da za svako $m\in\mathbb{N}$ vrijedi $\|\boldsymbol{f}_m(x)-\boldsymbol{f}_m(y)\| \le M|x-y|$, x, $y\in[a,b]$, gdje je $M>0$ neka konstanta. Tada je niz $(\boldsymbol{f}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ekvineprekidan.*
Ako još postoji i neki $x_0\in[a,b]$ takav da je skup $\{\boldsymbol{f}_m(x_0):\ m\in\mathbb{N}\}$ ograničen, onda je niz $(\boldsymbol{f}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ekviograničen.

$\square$

Koristeći prethodna dva teorema dokazat ćemo Peanov teorem, odnosno egzistenciju rješenja inicijalnog problema (1.35) u slučaju kad za desnu stranu sustava imamo samo pretpostavke neprekidnosti. U dokazu ćemo konstruirati jedno rješenje problema, iako znamo da je općenito moguće da takav inicijalni problem ima i beskonačno rješenja. To rješenje ćemo konstruirati kao limes određenih aproksimacija, slično kao u Picardovom teoremu. Konstrukcija aproksimacija temelji se na eksplicitnoj Eulerovoj metodi numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi, odnosno aproksimacije su tzv. Eulerove poligonalne linije.

Prije iskaza Peanovog teorema dokazat ćemo pomoćni rezultat egzistencije rješenja u slučaju kad je desna strana sustava definirana na nekom cilindru i ograničena, Takvo rješenje će biti globalno.

Lema 1.2 *Neka je $\Omega=[a,b]\times\mathbb{R}^n$, neka je $\boldsymbol{f}\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ funkcija koja je neprekidna na Ω te neka postoji konstanta $M>0$ takva da je $|f_i(x,\boldsymbol{y})|\le M$, za $(x,\boldsymbol{y})\in\Omega$, $i=1,\ldots,n$. Ako je $(x_0,\boldsymbol{y}^{(0)})\in\Omega$, tada postoji barem jedna funkcija $\boldsymbol{y}\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ takva da vrijedi*

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}'(x)=\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y}(x))\ ,\quad x\in[a,b]\ ,\\ &\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}^{(0)}\ .\end{aligned}$$

Dokaz. Da bismo dokazali tvrdnju leme, konstruirat ćemo niz funkcija $(\boldsymbol{\Phi}^{(m,P)})_{m\in\mathbb{N}}$. One neće biti definirane iterativno, već kao poligonalne linije, tj. radit će se o funkcijama koje su neprekidne i po dijelovima afine (dakle nisu diferencijabilne u svim točkama intervala $[a,b]$). Koristeći Arzelin te Ascolijev teorem dokazat ćemo da postoji podniz tog niza funkcija koji konvergira. Konačno, dokazat ćemo da spomenuti podniz konvergira prema jednom rješenju promatranog inicijalnog problema.

Rješenje ćemo zbog jednostavnosti zapisa konstruirati samo na intervalu $[x_0, b]$. Konstrukcija rješenja na intervalu $[a, x_0]$ je posve analogna.
Da bismo definirali funkciju $\mathbf{\Phi}^{(m,P)}$ za neko $m \in \mathbb{N}$, moramo podijeliti interval $[x_0, b]$ na m jednakih dijelova. Rubne točke odgovarajućih podintervala označimo s

$$x_{mj} = x_0 + \frac{b - x_0}{m} j \ , \ j = 0, \ldots, m \ .$$

Kao što smo već rekli, funkcija $\mathbf{\Phi}^{(m,P)}$ je po dijelovima afina. Nagib funkcije na svakom podintervalu određen je vrijednošću funkcije $\boldsymbol{f}$ u točki grafa funkcije $\mathbf{\Phi}^{(m,P)}$ koja odgovara lijevoj točki promatranog podintervala. Konkretno, definiramo za $j = 0, \ldots, m-1$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)} \ , \\
&\mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x) = \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj}) + \boldsymbol{f}(x_{mj}, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj}))(x - x_{mj}) \ , \ x_{mj} \le x \le x_{m(j+1)} \ .
\end{aligned}$$

Uvest ćemo i funkciju $\mathbf{\Psi}^{(m,P)}$ koja mjeri nagib komponenti funkcije $\mathbf{\Phi}^{(m,P)}$ po intervalima s

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Psi}^{(m,P)}(x) = \boldsymbol{f}(x_{mj}, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj})) \ , \ x_{mj} \le x < x_{m(j+1)} \ , \ \ j = 0, \ldots, m-1 \ , \\
&\mathbf{\Psi}^{(m,P)}(b) = \boldsymbol{f}(b, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(b)) \ .
\end{aligned}$$

Primjećujemo da je za $x_0 \le x \le x_{m1}$

$$\Phi_i^{(m,P)}(x) = y_i^{(0)} + f_i(x_0, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_0))(x - x_0) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \Psi_i^{(m,P)}(t)dt \ .$$

Ako pretpostavimo da za neki $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ vrijedi

$$\Phi_i^{(m,P)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \Psi_i^{(m,P)}(t)dt \ \text{ za } x \in [x_0, x_{mj}] \ ,$$

onda za $x \in [x_{mj}, x_{m(j+1)}]$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\Phi_i^{(m,P)}(x) &= \Phi_i^{(m,P)}(x_{mj}) + f_i(x_{mj}, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj}))(x - x_{mj}) \\
&= \left(y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x_{mj}} \Psi_i^{(m,P)}(t)dt \right) + \int_{x_{mj}}^{x} \Psi_i^{(m,P)}(t)dt \\
&= y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \Psi_i^{(m,P)}(t)dt \ .
\end{aligned}$$

Dakle, na taj način smo zapravo dokazali da na cijelom intervalu $[x_0, b]$ vrijedi jednakost

$$\Phi_i^{(m,P)}(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} \Psi_i^{(m,P)}(t)dt \ . \tag{1.36}$$

Uzmimo sada proizvoljne x, $\overline{x} \in [x_0, b]$. S obzirom na definiciju funkcije $\mathbf{\Psi}^{(m,P)}$, koristeći jednakost (1.36) dobivamo

$$|\Phi_i^{(m,P)}(x) - \Phi_i^{(m,P)}(\overline{x})| = \left| \int_{\overline{x}}^{x} \Psi_i^{(m,P)}(t)dt \right| \le M|x - \overline{x}| \ . \tag{1.37}$$

Kako su funkcije $\mathbf{\Phi}^{(m,P)}$, $m \in \mathbb{N}$, neprekidne na $[x_0, b]$, možemo primijeniti Arzelin teorem i zaključujemo da je $(\mathbf{\Phi}^{(m,P)})_{m\in\mathbb{N}}$ ekvineprekidan niz.

Nadalje, skup $\{\mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_0) : m \in \mathbb{N}\} = \{\boldsymbol{y}^{(0)}\}$ je očito ograničen. Opet, prema Arzelinom teoremu slijedi da je niz $(\mathbf{\Phi}^{(m,P)})_{m\in\mathbb{N}}$ i uniformno ograničen. Prema tome, možemo primijeniti Ascolijev teorem te zaključujemo da niz $(\mathbf{\Phi}^{(m,P)})_{m\in\mathbb{N}}$ ima konvergentan podniz. S obzirom na definiciju norme u $C([x_0, b]; \mathbb{R}^n)$, uočavamo da taj podniz konvergira uniformno na $[x_0, b]$. U nastavku ćemo ga radi jednostavnosti zapisa označavati opet kao $(\mathbf{\Phi}^{(m,P)})_{m\in\mathbb{N}}$ (s obzirom da nećemo više koristiti originalni niz).

Sada označimo limes dobivenog podniza s $\boldsymbol{y}$, tj. $\boldsymbol{y} := \lim_m \mathbf{\Phi}^{(m,P)}$. Želimo dokazati da relacija (1.36) povlači integralnu reprezentaciju zadanog inicijalnog problema (1.35), odnosno relaciju

$$y_i(x) = y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{y}(t))dt\ , \quad x \in [x_0, b]\ , \quad i = 1, \ldots, n\ .$$

Prije toga ćemo dokazati da funkcija $\mathbf{\Psi}^{(m,P)}$ konvergira uniformno prema funkciji $\boldsymbol{g}$ na $[x_0, b]$, pri čemu definiramo $\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x))$.

Primijetimo prvo da iz jednakosti (1.36) za $x \in [x_0, b]$ i $m \in \mathbb{N}$ slijedi

$$|\Phi_i^{(m,P)}(x) - y_i^{(0)}| = \left| \int_{x_0}^{x} \Psi_i^{(m,P)}(t)dt \right| \leq M|x - x_0| \leq M|b - x_0|\ .$$

Označimo $d := M|b - x_0|$. Dakle, za $x \in [x_0, b]$ vrijedi $(x, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x)) \in R$, gdje je

$$R := [x_0, b] \times [y_1^{(0)} - d, y_1^{(0)} + d] \times \cdots \times [y_n^{(0)} - d, y_n^{(0)} + d]\ .$$

Naravno, zbog zatvorenosti od R je i $(x, \boldsymbol{y}(x)) \in R$. Kako je R kompaktan skup, funkcija f_i je uniformno neprekidna na R pa postoji $\delta > 0$ takav da za $(\overline{x}, \overline{\boldsymbol{y}})$, $(\widetilde{x}, \widetilde{\boldsymbol{y}}) \in R$ za koje je $|\overline{x} - \widetilde{x}| < \delta$, $\|\overline{\boldsymbol{y}} - \widetilde{\boldsymbol{y}}\|_\infty < \delta$ vrijedi $|f_i(\overline{x}, \overline{\boldsymbol{y}}) - f_i(\widetilde{x}, \widetilde{\boldsymbol{y}})| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Kako je funkcija $\boldsymbol{y}$ uniformno neprekidna na $[x_0, b]$, postoji $\overline{\delta} > 0$ takav da $\overline{x}$, $\widetilde{x} \in [x_0, b]$, $|\overline{x} - \widetilde{x}| < \overline{\delta}$ povlači $\|\boldsymbol{y}(\overline{x}) - \boldsymbol{y}(\widetilde{x})\|_\infty < \delta$.

Neka je sada zadan neki $\varepsilon > 0$, neka je $x \in [x_0, b]$ te $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ako je $x \neq b$, onda postoji $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ takav da je $x \in [x_{mj}, x_{m(j+1)}\rangle$ te je $\Psi_i^{(m,P)}(x) = f_i(x_{mj}, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj}))$. Za $x = b$ vrijedi ista jednakost uz $j = m$. Označimo $h := \frac{b - x_0}{m}$. Prvo imamo

$$\begin{aligned} |g_i(x) - \Psi_i^{(m,P)}(x)| &= |f_i(x, \boldsymbol{y}(x)) - f_i(x_{mj}, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj}))| \\ &\leq |f_i(x, \boldsymbol{y}(x)) - f_i(x, \boldsymbol{y}(x_{mj}))| \\ &\quad + |f_i(x, \boldsymbol{y}(x_{mj})) - f_i(x, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj}))| \\ &\quad + |f_i(x, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj})) - f_i(x_{mj}, \mathbf{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj}))|\ . \end{aligned} \quad (1.38)$$

Postoji $m_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $h < \overline{\delta}$ za sve $m \geq m_1$. Dakle, za $m \geq m_1$ i za promatrani x vrijedi $|x - x_{mj}| \leq h < \overline{\delta}$ pa je $\|\boldsymbol{y}(x) - \boldsymbol{y}(x_{mj})\|_\infty < \delta$, odnosno

$$|f_i(x, \boldsymbol{y}(x)) - f_i(x, \boldsymbol{y}(x_{mj}))| < \frac{\varepsilon}{3} \, .$$

Nadalje, kako niz $(\boldsymbol{\Phi}^{(m,P)})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira prema $\boldsymbol{y}$, postoji $m_2 \in \mathbb{N}$ takav da za $m \geq m_2$ vrijedi $\|\boldsymbol{y}(x_{mj}) - \boldsymbol{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj})\|_\infty < \delta$ (zbog uniformne konvergencije m_2 ne ovisi o x_{mj}). Prema tome

$$|f_i(x, \boldsymbol{y}(x_{mj})) - f_i(x, \boldsymbol{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj}))| < \frac{\varepsilon}{3} \, .$$

Također, postoji $m_3 \in \mathbb{N}$ takav da je $h < \delta$ za sve $m \geq m_3$. Dakle $|x - x_{mj}| \leq h < \delta$ pa je i

$$|f_i(x, \boldsymbol{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj})) - f_i(x_{mj}, \boldsymbol{\Phi}^{(m,P)}(x_{mj}))| < \frac{\varepsilon}{3} \, .$$

Konačno iz nejednakosti (1.38) slijedi da za $m \geq m_0 := \max\{m_1, m_2, m_3\}$ imamo $|g_i(x) - \Psi_i^{(m,P)}(x)| < \varepsilon$ za svaki $x \in [x_0, b]$, odnosno niz funkcija $(\boldsymbol{\Psi}^{(m,P)})_{m\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira prema funkciji $\boldsymbol{g}$. Ta činjenica nam je dovoljna da prijeđemo na limes u jednakosti (1.36) iz čega slijedi da je $\boldsymbol{y}$ rješenje zadanog inicijalnog problema (1.35).

$\square$

Sada koristeći prethodnu lemu dokazujemo Peanov teorem:

Teorem 1.10 (Peano) *Neka je dan zatvoreni pravokutnik*

$$R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |x - x_0| \leq a, \ |y_i - y_i^{(0)}| \leq b_i, \ i = 1, \ldots, n\} \, ,$$

oko točke $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *za neke* a, $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ *i funkcija* $\boldsymbol{f} \colon R \to \mathbb{R}^n$ *koja je neprekidna na* R. *Tada postoji barem jedna neprekidno diferencijabilna funkcija* $\boldsymbol{y} \colon \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \to \mathbb{R}^n$, *za neko* $\delta \leq a$, *takva da vrijedi*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}(x)) \, , \ \ x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \, , \\ &\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)} \, . \end{aligned}$$

Dokaz. Da bismo iskoristili prethodnu lemu, zamijenit ćemo funkciju $\boldsymbol{f}$ funkcijom $\boldsymbol{g}$ koja je definirana na cilindru $\Omega = [x_0 - a, x_0 + a] \times \mathbb{R}^n$ s $\boldsymbol{g}(x, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(x, r_1(y_1), \ldots, r_n(y_n))$, pri čemu je za $i = 1, \ldots, n$

$$r_i(v) = \begin{cases} y_i^{(0)} - b_i \, , & v \ \leq \ y_i^{(0)} - b_i \\ v \, , & y_i^{(0)} - b_i \ \leq \ v \leq y_i^{(0)} + b_i \\ y_i^{(0)} + b_i \, , & v \ \geq \ y_i^{(0)} + b_i \end{cases} \, .$$

Sada promatramo inicijalni problem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}' &= \boldsymbol{g}(x, \boldsymbol{z}) \ , \\ \boldsymbol{z}(x_0) &= \boldsymbol{y}^{(0)} \ . \end{aligned} \tag{1.39}$$

Primjećujemo da je funkcija $\boldsymbol{g}$ ograničena (jer joj je slika $\boldsymbol{f}(R)$, što je ograničen skup). Prema tome, možemo primijeniti prethodnu lemu i dobivamo barem jedno rješenje $\boldsymbol{z}$ inicijalnog problema (1.39), definirano na $[x_0 - a, x_0 + a]$. Ukoliko je $|z_i(x) - y_i^{(0)}| \leq b_i$, $i = 1, \ldots, n$, na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ za neki $\delta \leq a$, onda je $\boldsymbol{z}$ ujedno i rješenje zadanog inicijalnog problema (1.35) na tom intervalu jer je za x iz tog intervala $\boldsymbol{g}(x, \boldsymbol{z}(x)) = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z}(x))$. Neka je $\varepsilon = \min_{i=1}^{n} b_i$. Zbog neprekidnosti funkcije $\boldsymbol{z}$, postoji δ takav da za $|x - x_0| < \delta$ vrijedi $|z_i(x) - y_i^{(0)}| < \varepsilon \leq b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Za postavljeni ε dobili smo rješenje $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}|_{\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle}$ zadanog inicijalnog problema (1.35). □

Primjer 1.9 *Zadan je inicijalni problem*

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2 + 2\sqrt{|x - 1|} \ , \\ y_2' &= \sqrt{|y_1 + 2|} + y_2 \ , \\ y_1(x_0) = y_1^{(0)}, &\ \ y_2(x_0) = y_2^{(0)} \ . \end{aligned}$$

Diskutirat ćemo mogu li se primijeniti Picardov i Peanov teorem, ovisno o početnim uvjetima. Definiramo $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) = (f_1(x, \boldsymbol{y}), f_2(x, \boldsymbol{y})) = (y_1^2 + 2\sqrt{|x - 1|}, \sqrt{|y_1 + 2|} + y_2)$. *Primjećujemo da je* $\boldsymbol{f}$ *neprekidna na* $\mathbb{R}^3$. *Prema tome, Peanov teorem možemo primijeniti za svaku točku početnog uvjeta* $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)}) \in \mathbb{R}^3$, *i to na proizvoljnom zatvorenom pravokutniku oko te točke. Dobivamo rješenje na nekom intervalu oblika* $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, *pri čemu* δ *ovisi o točki početnog uvjeta i izboru pravokutnika. Za to rješenje ne možemo tvrditi da je jedinstveno.*

Neka je točka početnog uvjeta oblika $(x_0, -2, y_2^{(0)})$ *te neka je* R *neki zatvoreni pravokutnik oko te točke oblika*

$$R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^3 : \ |x - x_0| \leq a, \ |y_1 + 2| \leq b, \ |y_2 - y_2^{(0)}| \leq b\} \ .$$

Pretpostavimo da je f_2 *Lipshitz neprekidna po varijabli* y_1 *na* R *s konstantom* L. *Tada za* $(x, \overline{\boldsymbol{y}})$, $(x, \widetilde{\boldsymbol{y}}) \in R$ *takve da je* $\overline{y}_1$, $\widetilde{y}_1 > -2$ *vrijedi*

$$|f_2(x, \overline{y}_1, y_2) - f_2(x, \widetilde{y}_1, y_2)| = |\sqrt{\overline{y}_1 + 2} - \sqrt{\widetilde{y}_1 + 2}| \leq L|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| = L|(\overline{y}_1 + 2) - (\widetilde{y}_1 + 2)| \ .$$

Iz te nejednakosti slijedi

$$|\sqrt{\overline{y}_1 + 2} + \sqrt{\widetilde{y}_1 + 2}| \geq \frac{1}{L} \ .$$

Međutim, izraz na lijevoj strani može biti proizvoljno blizu nule te smo tako došli do kontradikcije. Dakle, f_2 *nije Lipshitz neprekidna na* R *po* y_1 *pa za točke početnog* *uvjeta navedenog oblika ne možemo primijeniti Picardov teorem.*

Sada promatramo točke $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)})$ *za koje je* $y_1^{(0)} \neq -2$*. Kao i prije, možemo zaključiti da nije moguće dokazati Lipshitzovost funkcije* f_2 *po* y_1 *varijabli na pravokutniku koji siječe skup* $y_1 = -2$*.*
Neka je $y_1^{(0)} > -2$*. Uzmimo pravokutnik* R *oblika*

$$R = \{(x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^3 : \; |x - x_0| \leq a, \; \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^{(0)}\|_\infty \leq b\} \tag{1.40}$$

koji ne siječe $y_1 = -2$*. Tada vrijedi* $y_1^{(0)} - b > -2$*. Imamo*

$$|f_1(x, \overline{y}_1, y_2) - f_1(x, \widetilde{y}_1, y_2)| = |\overline{y}_1^2 - \widetilde{y}_1^2| = 2|\xi_1||\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \, ,$$

za neki $\xi_1 \in I(\overline{y}_1, \widetilde{y}_1)$*. Kako na* R *vrijedi* $|y_1| \leq |y_1 - y_1^{(0)}| + |y_1^{(0)}| \leq b + |y_1^{(0)}|$*, imamo*

$$|f_1(x, \overline{y}_1, y_2) - f_1(x, \widetilde{y}_1, y_2)| \leq 2(b + |y_1^{(0)}|)|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \, .$$

Dakle, $L_{11} = 2(b + |y_1^{(0)}|)$*. Očito je* $L_{12} = 0$ *i* $L_{22} = 1$*.*
Konačno,

$$|f_2(x, \overline{y}_1, y_2) - f_2(x, \widetilde{y}_1, y_2)| = |\sqrt{\overline{y}_1 + 2} - \sqrt{\widetilde{y}_1 + 2}| = \frac{1}{2\sqrt{\xi_2 + 2}}|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \, ,$$

gdje je $\xi_2 \in I(\overline{y}_1, \widetilde{y}_1)$ *pa imamo ocjenu* $\xi_2 > y_1^{(0)} - b > -2$*, odnosno* $\xi_2 + 2 > y_1^{(0)} - b + 2 > 0$*. Dakle*

$$|f_2(x, \overline{y}_1, y_2) - f_2(x, \widetilde{y}_1, y_2)| \leq \frac{1}{2\sqrt{y_1^{(0)} - b + 2}}|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \, .$$

Znači, $L_{21} = \frac{1}{2\sqrt{y_1^{(0)} - b + 2}}$ *pa je* $\boldsymbol{f}$ *Lipschitz-neprekidna po* y *varijablama. Prema Picardovom teoremu, imamo jedinstveno rješenje na nekom intervalu oblika* $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$*.*
Ako je $y_1^{(0)} < -2$*, možemo opet uzeti samo pravokutnik oblika (1.40) oko* $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)})$ *koji ne siječe* $y_1 = -2$*. Zbog toga je* $y_1^{(0)} + b < -2$*. Tada kod izvoda Lipschitz-neprekidnosti funkcije* f_2 *po* y_1 *imamo*

$$|f_2(x, \overline{y}_1, y_2) - f_2(x, \widetilde{y}_1, y_2)| = |\sqrt{-\overline{y}_1 - 2} - \sqrt{-\widetilde{y}_1 - 2}| = \frac{1}{2\sqrt{-\xi_3 - 2}}|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \, ,$$

za $\xi_3 \in I(\overline{y}_1, \widetilde{y}_1)$*. Vrijedi,* $\xi_3 < y_1^{(0)} + b$*, odnosno* $-\xi_3 - 2 > -y_1^{(0)} - b - 2 > 0$ *pa je*

$$|f_2(x, \overline{y}_1, y_2) - f_2(x, \widetilde{y}_1, y_2)| \leq \frac{1}{2\sqrt{-y_1^{(0)} - b - 2}}|\overline{y}_1 - \widetilde{y}_1| \, .$$

Dakle, opet možemo primijeniti Picardov teorem i dobivamo lokalno jedinstveno rješenje.

1.8 Proširivost rješenja pomoću Teorema o apriornim ocjenama

U Peanovom teoremu smo konstruirali samo lokalno rješenje inicijalnog problema (1.35). Opet se možemo pitati može li se rješenje proširiti. U sljedećem teoremu ćemo vidjeti neke pretpostavke uz koje imamo globalno rješenje tog inicijalnog problema.

Teorem 1.11 (O apriornim ocjenama) *Neka je $\boldsymbol{y}$ jedno rješenje inicijalnog problema*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \ , \\ \boldsymbol{y}(x_0) &= \boldsymbol{y}^{(0)} \ , \end{aligned}$$

pri čemu je $\boldsymbol{f}\colon \Omega := [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ neprekidna i $(x_0, \boldsymbol{y}^{(0)}) \in \Omega$. Neka je rješenje $\boldsymbol{y}$ definirano na neproširivom intervalu egzistencije i neka je na tom intervalu ograničeno. Tada je rješenje $\boldsymbol{y}$ definirano na čitavom intervalu $[a, b]$.

Dokaz. Promatrat ćemo samo desni maksimalni interval egzistencije rješenja $\boldsymbol{y}$, u odnosu na x_0. Kao i prije (v. 18. str.), možemo dokazati da je on jednak $[x_0, b]$ ili da se radi o poluotvorenom intervalu $[x_0, \omega\rangle$, $\omega \leq b$. Ako imamo prvi slučaj, tvrdnja teorema za desni interval egzistencije odmah slijedi.
U drugom slučaju rješenje $\boldsymbol{y}$ nije dakle definirano u točki ω. Međutim, po pretpostavci teorema rješenje $\boldsymbol{y}$ je ograničeno na intervalu $[x_0, \omega\rangle$ pa postoji konstanta $M > 0$ takva da je $|y_i(x)| \leq M$ za $x \in [x_0, \omega\rangle$, $i = 1, \ldots, n$.
Kako je $\boldsymbol{f}$ neprekidna funkcija, postoji konstanta $\overline{M} > 0$ takva da za $i = 1, \ldots, n$ vrijedi

$$|f_i(x, \boldsymbol{y})| \leq \overline{M} \ , \ (x, \boldsymbol{y}) \in [x_0, b] \times [-M, M]^n \ . \tag{1.41}$$

Sada za x, $\overline{x} \in [x_0, \omega\rangle$, te $i = 1, \ldots, n$ imamo

$$\begin{aligned} y_i(x) &= y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \boldsymbol{y}(t)) dt \ , \\ y_i(\overline{x}) &= y_i^{(0)} + \int_{x_0}^{\overline{x}} f_i(t, \boldsymbol{y}(t)) dt \end{aligned}$$

pa zbog ocjene (1.41) vrijedi

$$|y_i(x) - y_i(\overline{x})| = \left| \int_{\overline{x}}^{x} f_i(t, \boldsymbol{y}(t)) dt \right| \leq \overline{M} |x - \overline{x}| \ . \tag{1.42}$$

Prema tome, y_i je uniformno neprekidna na $[x_0, \omega\rangle$ pa postoji $\lim_{x \to \omega^-} y_i(x)$. Zaključujemo da se $\boldsymbol{y}$ može dodefinirati po neprekidnosti u ω, odnosno da je tako dodefinirana funkcija $\boldsymbol{y}$ rješenje zadanog inicijalnog problema na $[x_0, \omega]$. Time smo proširili maksimalni interval egzistencije rješenja $\boldsymbol{y}$ pa dolazimo do kontradikcije.

Prema tome, rješenje $\boldsymbol{y}$ je definirano na $[x_0, b]$.
Analogno dobivamo da je lijevi maksimalni interval egzistencije rješenja $\boldsymbol{y}$ jednak $[a, x_0]$. $\square$

Napomena: Pri primjeni Teorema o apriornim ocjenama važno je dokazati da je rješenje ograničeno na maksimalnom intervalu egzistencije. Npr., ako imamo pretpostavke Picardovog teorema, njegovom primjenom dobivamo u pravilu samo lokalno rješenje $\boldsymbol{y}$ definirano na nekom intervalu oblika $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Kako je funkcija $\boldsymbol{y}$ kao rješenje inicijalnog problema neprekidna, ona je i ograničena na tom intervalu. Međutim, to nije dovoljno za primjenu Teorema o apriornim ocjenama jer ograničenost moramo dokazati na čitavom maksimalnom intervalu egzistencije.

Primjer 1.10 *Zadan je inicijalni problem*

$$\begin{aligned} y_1' &= \cos y_2 \ , \\ y_2' &= \sin y_1 \ , \\ y_1(0) &= 0, \ y_2(0) = 0 \ . \end{aligned}$$

Neka je desna strana sustava definirana kao $\boldsymbol{f} \colon \Omega_a := [-a, a] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *Neka je* $I \subseteq [-a, a]$ *maksimalni interval egzistencije nekog rješenja* $\boldsymbol{y}$ *inicijalnog problema. Tada za* $x \in I$ *vrijedi*

$$y_1(x) = \int_0^x \cos y_2(t) dt$$

pa je $|y_1(x)| \leq |x| \leq a$.

Analogno je

$$y_2(x) = \int_0^x \sin y_1(t) dt$$

pa dobivamo $|y_2(x)| \leq |x| \leq a$.

Drugim riječima rješenje $\boldsymbol{y}$ *je ograničeno na* I *pa se prema Teoremu o apriornim ocjenama može proširiti do cijelog intervala* $[-a, a]$. *Kako je* $a \in \mathbb{R}$ *proizvoljan, rješenje je proširivo na* $\mathbb{R}$.

Analogan rezultat mogli smo dobiti tako da smo primijenili teorem 1.4, jer je funkcija $\boldsymbol{f}$ *neprekidna i ograničena na* Ω_a *te Lipschitz-neprekidna po* y *varijablama na svakom zatvorenom pravokutniku u* Ω_a. *Dakle, imamo i jedinstvenost rješenja. Može se dokazati i globalna Lipschitz-neprekidnost funkcije* $\boldsymbol{f}$ *na* Ω_a, *odnosno imamo i pretpostavke teorema 1.5.*

Primjer 1.11 *Zadan je inicijalni problem*

$$y' = \frac{\sqrt{|y|}}{1+\sqrt{|y|}} \;,$$
$$y(0) = 0 \;.$$

Za proizvoljan $a > 0$ *imamo desnu stranu jednadžbe zadanu s* $f\colon \Omega_a := [-a,a]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, gdje je* $f(x,y) = \frac{\sqrt{|y|}}{1+\sqrt{|y|}}$*. Funkcija* f *je neprekidna na* Ω_a *pa možemo primijeniti Peanov teorem i dobivamo barem jedno rješenje* y*. Pretpostavimo da ga možemo proširiti najviše do intervala* $I \subset [-a,a]$*. Tada za* $x \in I$ *vrijedi*

$$|y(x)| = \left|\int_0^x \frac{\sqrt{|y(t)|}}{1+\sqrt{|y(t)|}}dt\right| \le |x| \le a \;.$$

Dakle, rješenje y *je ograničeno na svom maksimalnom intervalu egzistencije* I *pa se prema Teoremu o apriornim ocjenama može proširiti do čitavog intervala* $[-a,a]$ *za proizvoljan* $a > 0$ *pa samim tim i na čitav* $\mathbb{R}$*.*

Primijetimo da je za $y > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2} \;.$$

Pretpostavimo da je f *Lipschitz-neprekidna po varijabli* y *na nekom zatvorenom pravokutniku* $R \subset \mathbb{R}^2$ *oko* $(0,0)$*. Tada postoji konstanta* $L > 0$ *takva da za* $(x,y) \in R$ *vrijedi*

$$|f(x,y) - f(x,0)| \le L|y| \;.$$

Ako je $y > 0$*, postoji* $\xi \in \langle 0, y\rangle$ *takav da je*

$$f(x,y) - f(x,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)y \;,$$

odnosno vrijedi

$$\left|\frac{1}{2\sqrt{\xi}(1+\sqrt{\xi})^2}\right| \le L \;.$$

Međutim, za dovoljno mali y*, izraz na lijevoj strani će biti veći od* L*, tj. dobili smo kontradikciju.*

Dakle, funkcija f *nije Lipschitz-neprekidna ni na jednom pravokutniku oko točke* $(0,0)$*. Znači ne možemo primijeniti Picardov teorem pa ne možemo na taj način dokazati jedinstvenost rješenja, ali smo pomoću Teorema o apriornim ocjenama uspjeli proširiti svako rješenje na čitavi skup* $\mathbb{R}$*. Jedinstvenost rješenja možemo eventualno ispitati direktnim rješavanjem zadanog problema, kao što ćemo napraviti u sljedećem primjeru.*

Primjer 1.12 *Zadan je inicijalni problem*

$$
\begin{aligned}
&y' = \sqrt{|y|}(y-1) \ , \\
&y(0) = 0 \ .
\end{aligned}
$$

Promatramo neko rješenje y zadanog problema. S obzirom da ne znamo je li to rješenje ograničeno, a funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{|y|}(y-1)$ nije ograničena na $\mathbb{R}^2$ (poput funkcije iz prethodnog primjera), ne možemo primijeniti Teorem o apriornim ocjenama.

Ipak, potražit ćemo eksplicitno rješenje problema. Riješimo prvo jednadžbu uz pretpostavku $y > 0$. Separacijom varijabli dobivamo

$$
\frac{dy}{\sqrt{y}(y-1)} = dx \ ,
$$

iz čega supstitucijom $y = t^2$ $(t > 0)$ slijedi

$$
\frac{2dt}{t^2-1} = dx \ .
$$

Integriranjem dobivamo

$$
\frac{t-1}{t+1} = Ce^x
$$

odnosno

$$
y(x) = \left(\frac{Ce^x+1}{1-Ce^x}\right)^2 \ .
$$

Iz $y(0) = 0$ slijedi $C = -1$ pa imamo

$$
y(x) = \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2 \ .
$$

Uvrštavanjem u početnu jednadžbu nakon sređivanja dobivamo $1 - e^x = |1-e^x|$ pa to rješenje vrijedi za $x \leq 0$.

Analogno, ako je $y < 0$, jednadžba glasi

$$
y' = \sqrt{-y}(y-1) \ .
$$

Separacijom varijabli i supstitucijom $y = -t^2$ $(t > 0)$, dobivamo

$$
\frac{2dt}{t^2+1} = dx \ ,
$$

odnosno

$$
t = \operatorname{tg}\left(\frac{x+C}{2}\right) \ .
$$

Dakle,
$$y = -\operatorname{tg}^2\left(\frac{x+C}{2}\right) .$$
Iz početnog uvjeta dobivamo $C = 2k\pi$*, odnosno* $y = -\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$*. Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu slijedi* $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ *pa dobiveno rješenje zadovoljava jednadžbu ako je* $\operatorname{tg}\frac{x}{2} \geq 0$*. Najširi povezani interval desno od nule (koji uključuje nulu) na kojem vrijedi ta nejednakost je interval* $[0,\pi\rangle$*.*

Zaključujemo da je
$$y = \begin{cases} \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2 \ , \ x \leq 0 \\ \\ -\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} \ , \ 0 \leq x < \pi \end{cases}$$
jedno rješenje inicijalnog problema. Primijetimo da je za to rješenje $y'(0) = 0$ *i* $\lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = 0$ *pa je rješenje uistinu glatko.*

Primjećujemo da se ne može proširiti na cijeli $\mathbb{R}$ *(ne postoji* $\lim_{x\to\pi^-} y(x)$*). Dakle, svaka restrikcija tog rješenja na neki interval oblika* $\langle -\delta, \delta\rangle$ *za neki* $\delta < \pi$ *(odnosno interval egzistencije kakav dobivamo primjenom Peanovog teorema) može se maksimalno proširiti ulijevo na* $\mathbb{R}^-$*, ali se ne može proširiti maksimalno udesno, odnosno na* $\mathbb{R}^+$*.*

Rješenje koje smo dobili nije jedino rješenje problema. Npr. imamo i rješenje $y \equiv 0$*, zatim rješenje*
$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)^2 \ , \ x \leq 0 \\ \\ 0 \ , \ x \geq 0 \end{cases} ,$$
kao i rješenje
$$y(x) = \begin{cases} 0 \ , \ x \leq 0 \\ \\ -\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} \ , \ 0 \leq x < \pi \end{cases} .$$

Zaključujemo da je moguće dobiti i rješenje koje je maksimalno proširivo i ono koje nije maksimalno proširivo u pozitivnom smjeru.

Da smo mogli primijeniti Teorem o apriornim ocjenama, sva rješenja bi bila maksimalno proširiva, odnosno globalna.

Poglavlje 2

Sustavi linearnih jednadžbi

2.1 Egzistencija rješenja

U ovom poglavlju promatrat ćemo sustave tipa (1.6) koji su ujedno i linearni. Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval. Konkretno, općenit linearan sustav dan je s

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + b_1(x) \ , \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + b_2(x) \ , \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \ , \end{aligned} \tag{2.1}$$

pri čemu su a_{ij}, $b_i \colon I \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$ zadane funkcije koje su neprekidne na I.

Ako zadamo još i inicijalni uvjet $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)}$, za neke $x_0 \in I$, $\boldsymbol{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, opet se pitamo ima li dobiveni inicijalni problem rješenje, je li jedinstveno i koji mu je maksimalni interval egzistencije.

Funkcije f_i, $i = 1, \ldots, n$, su definirane s

$$f_i(x, \boldsymbol{y}) = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}(x)y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n + b_i(x) \ .$$

Uzmimo proizvoljne točke $(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, \overline{y}_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)$, $(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, \widetilde{y}_j, y_{j+1}, \ldots, y_n) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, gdje je $[a, b] \subset I$ proizvoljan interval. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} &|f_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, \overline{y}_j, y_{j+1}, \ldots, y_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, \widetilde{y}_j, y_{j+1}, \ldots, y_n)| \\ &= |a_{ij}(x)(\overline{y}_j - \widetilde{y}_j)| \leq M|\overline{y}_j - \widetilde{y}_j| \ , \end{aligned}$$

gdje je $M = \max_{i,j=1}^{n} \|a_{ij}\|_{\infty,[a,b]}$.

Dakle, funkcija $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n) \colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je Lipschitz-neprekidna po svim y varijablama na čitavoj svojoj domeni. Stoga primjenom Picardovog teorema dobivamo jedinstveno lokalno rješenje promatranog inicijalnog problema na nekom intervalu oko x_0 koje se zatim može proširiti do čitavog intervala $[a,b]$ (v. teorem 1.5). Zbog proizvoljnosti intervala $[a,b]$ konačno možemo zaključiti da postoji jedinstveno rješenje zadanog inicijalnog problema na intervalu I.

2.2 Homogen sustav i fundamentalna matrica

Primijetimo da sustav (2.1) možemo zapisati u matričnoj formi. Definiramo

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} , \ \boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} , \ \boldsymbol{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix} .$$

Tada sustav zapisujemo s

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x) .$$

Ako je $\boldsymbol{b} \equiv 0$, sustav je homogen, inače je nehomogen. Prvo ćemo proučiti strukturu skupa rješenja homogenog sustava.

Teorem 2.1 *Neka je $\boldsymbol{A} \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$. Rješenja homogenog sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ čine vektorski potprostor od $C^1(I; M_{n1}(\mathbb{R}))$ dimenzije n.*

Dokaz. Neka su $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ dva rješenja zadanog sustava i neka su α, $\beta \in \mathbb{R}$. Dakle, za $x \in I$ vrijedi $\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{u}(x)$, $\boldsymbol{v}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{v}(x)$. Definiramo funkciju $\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$. Tada je $\boldsymbol{z}'(x) = \alpha\boldsymbol{u}'(x) + \beta\boldsymbol{v}'(x) = \alpha\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{u}(x) + \beta\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{v}(x) = \boldsymbol{A}(x)(\alpha\boldsymbol{u}(x) + \beta\boldsymbol{v}(x)) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{z}(x)$, $x \in I$. Dakle, funkcija $\boldsymbol{z}$ je također rješenje zadanog sustava. Prema tome, rješenja sustava čine potprostor vektorskog prostora $C^1(I; M_{n1}(\mathbb{R}))$.

Nadalje, želimo naći jednu bazu za prostor rješenja sustava. Neka je $\{\boldsymbol{\psi}_1, \dots, \boldsymbol{\psi}_n\}$ neka baza za $M_{n1}(\mathbb{R})$. Odaberimo neki $x_0 \in I$. Tada za svako $i = 1, \dots, n$ postoji jedinstveno rješenje inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} , \\ \boldsymbol{y}(x_0) &= \boldsymbol{\psi}_i . \end{aligned}$$

Označimo to rješenje s $\boldsymbol{\phi}_i$. Znamo da je $\boldsymbol{\phi}_i \in C^1(I; M_{n1}(\mathbb{R}))$.

Dokažimo prvo linearnu nezavisnost skupa $\{\boldsymbol{\phi}_i : \ i = 1, \dots, n\}$. Neka su dani skalari $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ i neka je $\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i = 0$. Tada za $x = x_0$ dobivamo $\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{\phi}_i(x_0) = 0$, odnosno $\sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{\psi}_i = 0$. Zbog nezavisnosti vektora $\boldsymbol{\psi}_i$, $i = 1, \dots, n$ slijedi $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ pa su i funkcije $\boldsymbol{\phi}_i$, $i = 1, \dots, n$ linearno nezavisne.

Dokazat ćemo i da je skup $\{\boldsymbol{\phi}_i: \ i = 1, \ldots, n\}$ sustav izvodnica za prostor rješenja. Dakle, želimo dokazati da se svako rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ može zapisati kao linearna kombinacija funkcija $\boldsymbol{\phi}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Neka je stoga $\boldsymbol{\phi}$ neko rješenje sustava i neka je $\boldsymbol{\phi}(x_0) = \boldsymbol{\xi}$. Tada postoje skalari $\beta_i \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{\psi}_i$. Neka je $\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{\phi}_i$. S obzirom da je $\boldsymbol{z}$ linearna kombinacija rješenja zadanog sustava, i sama funkcija $\boldsymbol{z}$ je rješenje istog sustava. S druge strane je $\boldsymbol{z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{\phi}_i(x_0) = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{\psi}_i = \boldsymbol{\xi}$ pa $\boldsymbol{z}$ zadovoljava isti početni uvjet kao i $\boldsymbol{\phi}$. Zbog jedinstvenosti rješenja inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} \ , \\ \boldsymbol{y}(x_0) &= \boldsymbol{\xi} \end{aligned}$$

dobivamo $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^n \beta_i \boldsymbol{\phi}_i$. □

U slučaju da je $\boldsymbol{A}$ konstantna matrica i $\lambda \in \mathbb{R}$ njezina svojstvena vrijednost, lako je konstruirati jedno rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$. Prije svega primijetimo da je zbog konstantnosti matrice sustava maksimalni interval egzistencije svakog rješenja sustava jednak $\mathbb{R}$.

Teorem 2.2 *Neka je $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ njena svojstvena vrijednost te neka je $\boldsymbol{\xi} \in M_{n1}(\mathbb{R})$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Tada je funkcija $\boldsymbol{y}\colon \mathbb{R} \to M_{n1}(\mathbb{R})$ definirana s $\boldsymbol{y}(x) = e^{\lambda x}\boldsymbol{\xi}$ (jedno) rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.*

Dokaz. Neka je funkcija $\boldsymbol{y}\colon \mathbb{R} \to M_{n1}(\mathbb{R})$ definirana s $\boldsymbol{y}(x) = e^{\lambda x}\boldsymbol{\xi}$. Vrijedi

$$\boldsymbol{y}'(x) = \lambda e^{\lambda x}\boldsymbol{\xi} = e^{\lambda x}(\lambda\boldsymbol{\xi}) = e^{\lambda x}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A}(e^{\lambda x}\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x)$$

pa je $\boldsymbol{y}$ rješenje zadanog sustava. □

Iako nas u konačnici zanimaju samo realna rješenja sustava, ima smisla promatrati i kompleksna rješenja. Neka je dana funkcija $\boldsymbol{y}\colon I \to M_{n1}(\mathbb{C})$ s $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{u} + i\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\colon I \to M_{n1}(\mathbb{R})$. Ako je $\boldsymbol{y}$ rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{A} \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$, onda za $x \in I$ vrijedi $\boldsymbol{u}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{u}(x)$ i $\boldsymbol{v}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{v}(x)$ pa su $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ također rješenja danog sustava, ali radi se o realnim rješenjima. U tom smislu, prethodni teorem vrijedi i ako imamo kompleksnu svojstvenu vrijednost λ i kompleksan svojstveni vektor $\boldsymbol{y}_0$.

Primjer 2.1 *Riješit ćemo sustav*

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \ .$$

Neka je $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. *Prvo ćemo naći svojstvene vrijednosti matrice* $\boldsymbol{A}$. *Iz* $det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$ *slijedi* $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ *pa imamo dva rješenja* $\lambda_1 = -2$ *i* $\lambda_2 = 5$. *Tada je*

$$V_{\boldsymbol{A}}(-2) = \left[\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right] \;\; , \;\; V_{\boldsymbol{A}}(5) = \left[\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}\right] \; ,$$

gdje ćemo s $V_{\boldsymbol{A}}(\lambda)$ *označavati svojstveni potprostor matrice* $\boldsymbol{A}$ *koji odgovara svojstvenoj vrijednosti* λ. *Prema prethodnom teoremu znamo da su funkcije* $\boldsymbol{u}$ *i* $\boldsymbol{v}$ *definirane s*

$$\boldsymbol{u}(x) = e^{-2x}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \;\; , \;\; \boldsymbol{v}(x) = e^{5x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

dva rješenja zadanog sustava.

Ako su dani skalari $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $\alpha_1 \boldsymbol{u} + \alpha_2 \boldsymbol{v} = 0$ *na* $\mathbb{R}$, *onda specijalno za* $x = 0$ *dobivamo*

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \, , \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0 \, , \end{aligned}$$

iz čega slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. *Dakle, funkcije* $\boldsymbol{u}$ *i* $\boldsymbol{v}$ *su linearno nezavisne pa stoga predstavljaju bazu za prostor rješenja zadanog sustava. Drugim riječima, skup svih rješenja sustava dan je s*

$$\{c_1 \boldsymbol{u} + c_2 \boldsymbol{v} : \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Primjer 2.2 *Zadan je sustav*

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \, .$$

Svojstvene vrijednosti matrice $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ *zadovoljavaju jednadžbu* $\lambda^2 + 4 = 0$ *pa dobivamo svojstvene vrijednosti* $\lambda_1 = 2i$ *i* $\lambda_2 = -2i$. *Dovoljno je izračunati svojstveni vektor pridružen* λ_1. *Imamo*

$$V_{\boldsymbol{A}}(2i) = \left[\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}\right\}\right] \, .$$

Koristeći napomenu iza Teorema 2.2 zaključujemo da je $\boldsymbol{y} \colon \mathbb{R} \to M_{n1}(\mathbb{C})$,

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{2ix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} = (\cos(2x) + i\sin(2x))\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

jedno kompleksno rješenje zadanog sustava. Mi međutim želimo naći skup realnih rješenja. Kako je

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{u}(x) + i\boldsymbol{v}(x) \ ,$$

pri čemu je

$$\boldsymbol{u}(x) = \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ \cos(2x) - 2\sin(2x) \end{pmatrix} \ , \ \ \boldsymbol{v}(x) = \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ 2\cos(2x) + \sin(2x) \end{pmatrix} \ ,$$

zaključujemo da su funkcije $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ realna rješenja sustava. Kao i u prethodnom primjeru, možemo dokazati da su ta rješenja linearno nezavisna. Konačno, kako je dimenzija prostora rješenja jednaka dva, prostor rješenja dan je s

$$\{c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v} : \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Primijetimo da navedena metoda rješavanja sustava funkcionira za sustave s konstantnim matricama koje se mogu dijagonalizirati, odnosno kojima su algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti jednake geometrijskima. Ukoliko to nije slučaj, moramo matricu svesti na Jordanovu formu, ali o tome će više riječi biti na kolegiju "Dinamički sustavi".

Sada opet promatramo homogeni sustav s općenito nekonstantnom matricom sustava definiranom na intervalu I. Sustavu $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ možemo pridružiti matričnu jednadžbu $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$, u kojoj je nepoznanica matrična funkcija $\boldsymbol{Y}$, reda n. Ako s $\boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_n$ označimo stupce matrice $\boldsymbol{Y}$, možemo primijetiti da je ta matrična jednadžba ekvivalentna s n sustava $\boldsymbol{Y}_i' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Znamo da je svako rješenje $\boldsymbol{Y}_i$ definirano na čitavom intervalu I pa je rješenje matrične jednadžbe funkcija oblika $\boldsymbol{Y} : I \to M_n(\mathbb{R})$. S obzirom da je svaki stupac rješenja matrične jednadžbe jedno rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, linearnom kombinacijom tih stupaca opet dobivamo neko rješenje istog sustava. Dakle, za svaki konstantni stupac $\boldsymbol{c} \in M_{n1}(\mathbb{R})$ funkcija $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{c}$ predstavlja jedno rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$.

Pogledajmo još i inicijalni problem pridružen matričnoj jednadžbi. Neka je zadan s

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}' &= \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y} \ , \\ \boldsymbol{Y}(x_0) &= \boldsymbol{Y}^{(0)} \ , \end{aligned}$$

gdje je $x_0 \in I$, a $\boldsymbol{Y}^{(0)} \in M_n(\mathbb{R})$ proizvoljna matrica reda n. Označimo njezine stupce redom s $\boldsymbol{Y}_1^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{Y}_n^{(0)}$. Tada je problem ekvivalentan s n (stupčastih) inicijalnih problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} \ , \\ \boldsymbol{y}(x_0) &= \boldsymbol{Y}_i^{(0)} \ , \end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, n$. Znamo da za svako $i = 1, \ldots, n$ imamo jedinstveno rješenje na I pa zaključujemo da i inicijalni problem pridružen matričnoj jednadžbi ima jedinstveno rješenje na I.

Nadalje definiramo fundamentalnu matricu sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$:

Definicija 2.1 *Zadana je neprekidna matrična funkcija $\boldsymbol{A}\colon I \to M_n(\mathbb{R})$. Matrična funkcija $\boldsymbol{\Phi} \in C^1(I; M_n(\mathbb{R}))$ je fundamentalna matrica sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ ako je $\boldsymbol{\Phi}$ rješenje pripadne matrične jednadžbe $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$ te ako su stupci matrice $\boldsymbol{\Phi}$ linearno nezavisne funkcije u $C^1(I; M_{n1}(\mathbb{R}))$.*

Sada želimo pronaći način na koji ćemo što jednostavnije otkriti je li neko rješenje matrične jednadžbe $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$ fundamentalna matrica sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$. U tome nam može pomoći sljedeći teorem kojeg samo navodimo:

Teorem 2.3 (Liouville) *Neka je $\boldsymbol{\Phi}$ rješenje matrične jednadžbe $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$ i neka je $x_0 \in I$. Tada vrijedi*

$$det\,\boldsymbol{\Phi}(x) = e^{\int_{x_0}^{x} tr(\boldsymbol{A}(t))dt} det\,\boldsymbol{\Phi}(x_0)\ , \quad x \in I\ .$$

$\square$

Iz prethodnog teorema možemo zaključiti da je determinanta funkcije $\boldsymbol{\Phi}$ u svakoj točki intervala I jednakog predznaka. Također, ako je jednaka nula u nekoj točki intervala, onda je jednaka nula na cijelom intervalu.

Sada možemo dokazati sljedeće:

Teorem 2.4 *Neka je $\boldsymbol{\Phi}$ neko rješenje matrične jednadžbe $\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}$. Tada vrijedi:*

i) Stupci matrice $\boldsymbol{\Phi}$ su linearno nezavisne funkcije ako i samo ako je $det\,\boldsymbol{\Phi}(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$;

ii) Stupci matrice $\boldsymbol{\Phi}$ su linearno zavisne funkcije ako i samo ako je $det\,\boldsymbol{\Phi}(x) = 0$ za svaki $x \in I$.

Dokaz. Dokazat ćemo samo prvu tvrdnju (druga tvrdnja je ekvivalentna prvoj).

Neka su stupci matrične funkcije $\boldsymbol{\Phi}$ označeni s $\boldsymbol{\Phi}_1, \ldots, \boldsymbol{\Phi}_n$ i neka predstavljaju linearno nezavisne funkcije. Uzmimo neku točku $x_0 \in I$. Želimo dokazati da su i stupci $\boldsymbol{\Phi}_1(x_0), \ldots, \boldsymbol{\Phi}_n(x_0)$ linearno nezavisni. Uzmimo dakle skalare α_i, $i = 1, \ldots, n$, takve da vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\Phi}_i(x_0) = 0$. Definiramo nadalje funkciju $\boldsymbol{z} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\Phi}_i$. Pogledajmo inicijalni problem

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}\ ,$$

$$\boldsymbol{y}(x_0) = 0 \ .$$

Primjećujemo da je funkcija $\boldsymbol{z}$ rješenje tog problema. Isto tako i nul funkcija je rješenje tog problema. Zbog jedinstvenosti rješenja vrijedi $\boldsymbol{z} = 0$. Dakle, dobivamo da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\Phi}_i = 0$. Kako se tu radi o linearnoj kombinaciji linearno nezavisnih funkcija, slijedi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Dakle, i stupci $\boldsymbol{\Phi}_1(x_0), \ldots, \boldsymbol{\Phi}_n(x_0)$ su linearno nezavisni pa je $\det\boldsymbol{\Phi}(x_0) \neq 0$. Iz Liouvilleovog teorema sada zaključujemo da je $\det\boldsymbol{\Phi}(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$.

Obratno, neka je $\det\boldsymbol{\Phi}(x) \neq 0$ za svako $x \in I$. Neka su dani skalari $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, takvi da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\Phi}_i = 0$. Neka je $x_0 \in I$. Tada vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{\Phi}_i(x_0) = 0$. Kako je specijalno $\det\boldsymbol{\Phi}(x_0) \neq 0$, stupci $\boldsymbol{\Phi}_1(x_0), \ldots, \boldsymbol{\Phi}_n(x_0)$ su linearno nezavisni pa je $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Dakle, funkcije $\boldsymbol{\Phi}_i$, $i = 1, \ldots, n$ su linearno nezavisne. $\square$

Važno je primijetiti da ne možemo ispitati linearnu nezavisnost bilo kojih n funkcija s I u $M_{n1}(\mathbb{R})$ tako da ih postavimo u stupce matrice i ispitamo vrijednost njezine determinante u bilo kojoj točki intervala I. Tu tvrdnju smo dokazali samo za funkcije koje su rješenja sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$. Pogledajmo npr. funkcije $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ zadane s

$$\boldsymbol{u}(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \ \boldsymbol{v}(x) = \begin{pmatrix} x|x| \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Definiramo matričnu funkciju $\boldsymbol{Y}$ s

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} x^2 & x|x| \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Imamo sada npr. $\det\boldsymbol{Y}(0) = 0$, $\det\boldsymbol{Y}(1) = 0$, $\det\boldsymbol{Y}(-1) = 2$. Dakle, vrijednost determinante je u nekim točkama nula, ali nije na cijeloj domeni funkcije $\boldsymbol{Y}$, tj. na $\mathbb{R}$. Drugim riječima, funkcije $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ ne predstavljaju rješenja sustava oblika $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$. Koristeći definiciju linearne nezavisnosti možemo dokazati da su funkcije $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ linearno nezavisne.

Primijetimo još da ako je $\boldsymbol{\Phi}$ fundamentalna matrica sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, onda se svako rješenje $\boldsymbol{y}$ tog sustava može zapisati u obliku $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c}$, gdje je $\boldsymbol{c} \in M_{n1}(\mathbb{R})$ neki konstantni stupac. Naime, stupci matrice $\boldsymbol{\Phi}$ predstavljaju n linearno nezavisnih rješenja danog sustava, odnosno bazu za prostor svih rješenja. Dakle, postoje skalari c_i, $i = 1, \ldots, n$ takvi da vrijedi $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\Phi}_i = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{c}$, gdje je

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \ .$$

Ako je zadan još i početni uvjet $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)}$, gdje je $\boldsymbol{y}^{(0)} \in M_{n1}(\mathbb{R})$, onda vrijedi $\boldsymbol{\Phi}(x_0)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}^{(0)}$. Zbog regularnosti matrice $\boldsymbol{\Phi}(x_0)$ slijedi $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{\Phi}(x_0))^{-1}\boldsymbol{y}^{(0)}$.

S obzirom da se baza za prostor rješenja sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ može izabrati na beskonačno mnogo načina, možemo zaključiti da i fundamentalnih matrica za takav sustav ima beskonačno. Zanima nas kakva je struktura tog skupa, odnosno kako se mogu opisati sve fundamentalne matrice.

Teorem 2.5 *Neka je $\boldsymbol{\Phi}$ neka fundamentalna matrica sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{A} \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$. Tada je skup svih fundamentalnih matrica tog sustava dan s*

$$S = \{\boldsymbol{\Phi C} : \ \boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{R}) \text{ je regularna } \} .$$

Dokaz. Dokažimo za početak da su sve matrične funkcije iz S fundamentalne matrice zadanog sustava. Kako je $\boldsymbol{\Phi}$ fundamentalna matrica zadanog sustava, vrijedi $\boldsymbol{\Phi}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)$, $\det\boldsymbol{\Phi}(x) \neq 0$, $x \in I$. Neka je $\boldsymbol{\Psi} \in S$. Tada postoji regularna matrica $\boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi C}$. Dakle, vrijedi $\boldsymbol{\Psi}'(x) = \boldsymbol{\Phi}'(x)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Psi}(x)$, za $x \in I$. Prema tome, $\boldsymbol{\Psi}$ je rješenje pripadne matrične jednadžbe sustava. Za $x \in I$ vrijedi još $\det\boldsymbol{\Psi}(x) = \det(\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}) = \det\boldsymbol{\Phi}(x)\det\boldsymbol{C}$. Kako je $\boldsymbol{C}$ regularna, dobivamo $\det\boldsymbol{\Psi}(x) \neq 0$, za $x \in I$. Prema tome, $\boldsymbol{\Psi}$ je fundamentalna matrica zadanog sustava.

Obratno, neka je $\boldsymbol{\Psi}$ fundamentalna matrica zadanog sustava. Tražimo regularnu matricu $\boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{R})$ takvu da vrijedi $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi C}$. Ako postoji takva matrica, onda za neki $x_0 \in I$ imamo $\boldsymbol{\Psi}(x_0) = \boldsymbol{\Phi}(x_0)\boldsymbol{C}$, odnosno $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\Phi}(x_0))^{-1}\boldsymbol{\Psi}(x_0)$. Dakle, ideja je definirati $\boldsymbol{C} := (\boldsymbol{\Phi}(x_0))^{-1}\boldsymbol{\Psi}(x_0)$. Želimo dokazati da jednakost $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi C}$, za tako definiran $\boldsymbol{C}$, vrijedi za svaki $x \in I$, a ne samo za x_0. Neka je zadana matrična funkcija $\boldsymbol{U} \colon I \to M_n(\mathbb{R})$ s $\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$. Lako je kao i prije dokazati da je $\boldsymbol{U}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{U}(x)$, $x \in I$, a vrijedi i $\boldsymbol{U}(x_0) = \boldsymbol{\Psi}(x_0)$. Dakle, imamo dvije matrične funkcije $\boldsymbol{\Psi}$ i $\boldsymbol{U}$ koje su rješenja inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}' &= \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y} , \\ \boldsymbol{Y}(x_0) &= \boldsymbol{\Psi}(x_0) . \end{aligned}$$

Zbog jedinstvenosti rješenja tog problema, dobivamo $\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$ za svaki $x \in I$.

□

2.3 Eksponencijalna matrična funkcija

Sada želimo naći algoritam za pronalaženje jedne fundamentalne matrice sustava

$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, dakle sustava s konstantnom matricom, odnosno autonomnog linearnog homogenog sustava. Prisjetimo se, za $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$ definiramo eksponencijalnu matričnu funkciju $e^{\boldsymbol{A}\cdot} \colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ s

$$e^{\boldsymbol{A}x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \boldsymbol{A}^k \ .$$

Pritom vrijedi $\frac{d}{dx} e^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{A} e^{\boldsymbol{A}x}$. Prema tome, eksponencijalna matrična funkcija pridružena matrici $\boldsymbol{A}$ rješenje je inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}' &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} \ , \\ \boldsymbol{Y}(0) &= \boldsymbol{I} \ . \end{aligned}$$

Također, kako je $\det e^{\boldsymbol{A}x} = \det \boldsymbol{I} \neq 0$ za $x = 0$, prema teoremu 2.4 vrijedi i $\det e^{\boldsymbol{A}x} \neq 0$ za $x \in \mathbb{R}$ pa je $e^{\boldsymbol{A}x}$ fundamentalna matrica sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$.

Primijetimo, ako je zadan inicijalni problem

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{A} y \ , \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}^{(0)} \ , \end{aligned}$$

onda je njegovo rješenje dano s $\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{y}^{(0)}$.

U sljedećem teoremu navest ćemo još neka svojstva eksponencijalne matrične funkcije.

Teorem 2.6 *Neka su $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{R})$ i neka je pritom $\boldsymbol{C}$ regularna matrica. Tada za svako $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi*

i) $e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{A}y} = e^{\boldsymbol{A}(x+y)}$;

ii) $(e^{\boldsymbol{A}x})^{-1} = e^{(-\boldsymbol{A})x}$;

iii) $e^{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}x} = \boldsymbol{C} e^{\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{C}^{-1}$.

Ako još vrijedi $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, onda imamo i sljedeće jednakosti:

iv) $e^{\boldsymbol{A}x} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} e^{\boldsymbol{A}x}$;

v) $e^{\boldsymbol{A}x} e^{\boldsymbol{B}x} = e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})x}$.

□

Napomenimo da se u dokazu tih jednakosti opet pozivamo na jedinstvenost rješenja određenih inicijalnih problema. Dokažimo npr. tvrdnju i).

Fiksiramo $y \in \mathbb{R}$ i definiramo funkciju $\boldsymbol{\Psi}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}e^{\boldsymbol{A}y} - e^{\boldsymbol{A}(x+y)}$. Vrijedi

$$\boldsymbol{\Psi}'(x) = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}x}e^{\boldsymbol{A}y} - \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}(x+y)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Psi}(x)\ , x \in \mathbb{R}\ .$$

Kako je $\boldsymbol{\Psi}(0) = 0$, a nul matrica je također rješenje inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Y}' &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}\ , \\ \boldsymbol{Y}(0) &= 0\ , \end{aligned}$$

zbog jedinstvenosti njegovog rješenja vrijedi $\boldsymbol{\Psi}(x) = 0$, za $x \in \mathbb{R}$. Zbog proizvoljnosti izbora $y \in \mathbb{R}$ slijedi tvrdnja i).

Eksponencijalnu matričnu funkciju možemo odrediti npr. pomoću Putzerovog algoritma:

Teorem 2.7 (Putzerov algoritam) *Neka je $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$ te neka su λ_i, $i = 1, \ldots, n$, svojstvene vrijednosti matrice $\boldsymbol{A}$. Tada vrijedi*

$$e^{\boldsymbol{A}x} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(x)\boldsymbol{M}_k\ ,$$

gdje je $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{M}_k = \Pi_{i=1}^{k}(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I})$, $k = 1, \ldots, n$, a funkcija $\boldsymbol{p}\colon \mathbb{R} \to M_{n1}(\mathbb{R})$,

$$\boldsymbol{p}(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix}\ ,$$

je rješenje inicijalnog problema

$$\boldsymbol{p}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \boldsymbol{p}\ ,\ \ \boldsymbol{p}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Dokaz. Prvo primijetimo da među svojstvenim vrijednostima $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, možemo imati i višestruke vrijednosti. Također iz Hamilton-Cayleyevog teorema slijedi $\boldsymbol{M}_n = 0$.

Definiramo sada funkciju $\boldsymbol{\Phi}\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ s

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(x)\boldsymbol{M}_k\ .$$

Imamo $\mathbf{\Phi}(0) = \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{I}$. S druge strane za $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$p_1'(x) = \lambda_1 p_1(x) \ , \quad p_i'(x) = p_{i-1}(x) + \lambda_i p_i(x) \ , \quad i = 2, \ldots, n \ .$$

Vrijedi još $\boldsymbol{M}_k = (\boldsymbol{A} - \lambda_k \boldsymbol{I})\boldsymbol{M}_{k-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_{k-1} - \lambda_k \boldsymbol{M}_{k-1}$ za $k = 1, \ldots, n$. Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Phi}'(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}'(x)\boldsymbol{M}_k = p_1'(x)\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{k+1}'(x)\boldsymbol{M}_k \\
&= \lambda_1 p_1(x)\boldsymbol{I} + \sum_{k=1}^{n-1}(p_k(x)\boldsymbol{M}_k + \lambda_{k+1}p_{k+1}(x)\boldsymbol{M}_k) \\
&= p_1(x)(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{M}_1) + \sum_{k=1}^{n-1}(p_k(x)\boldsymbol{M}_k + p_{k+1}(x)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}_k - \boldsymbol{M}_{k+1})) \\
&= \boldsymbol{A}(p_1(x)\boldsymbol{M}_0) - p_1(x)\boldsymbol{M}_1 + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(x)\boldsymbol{M}_k + \boldsymbol{A}\left(\sum_{k=1}^{n-1} p_{k+1}(x)\boldsymbol{M}_k\right) - \sum_{k=2}^{n} p_k(x)\boldsymbol{M}_k \\
&= \boldsymbol{A}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1}(x)\boldsymbol{M}_k\right) = \boldsymbol{A}\mathbf{\Phi}(x) \ .
\end{aligned}$$

Dakle, matrična funkcija $\mathbf{\Phi}$ je rješenje inicijalnog problema

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} \ , \quad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{I}$$

pa je opet zbog jedinstvenosti rješenja $\mathbf{\Phi}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}$. □

Primjer 2.3 *Sada ćemo riješiti inicijalni problem*

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \ , \quad \boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \ .$$

Rješenje sustava smo već našli (v. Primjer 2.1) pa pomoću njega možemo formirati jednu fundamentalnu matricu:

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & e^{5x} \\ -e^{-2x} & 2e^{5x} \end{pmatrix} \ .$$

Vidimo da je $\mathbf{\Phi}(0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *pa ova matrična funkcija nije eksponencijalna.*

Rješenje inicijalnog problema se može zapisati u obliku $\boldsymbol{y} = \mathbf{\Phi}\boldsymbol{c}$, *pri čemu je* $\boldsymbol{c} \in M_{21}(\mathbb{R})$. *Dakle, vrijedi* $\boldsymbol{y}(0) = \mathbf{\Phi}(0)\boldsymbol{c}$ *pa stupac* $\boldsymbol{c}$ *nalazimo pomoću relacije* $\boldsymbol{c} = (\mathbf{\Phi}(0))^{-1}\boldsymbol{y}(0)$ *ili rješavamo sustav* $\boldsymbol{y}(0) = \mathbf{\Phi}(0)\boldsymbol{c}$:

$$3c_1 + c_2 = -3 \ ,$$

$$-c_1 + 2c_2 = 8 \, .$$

Dakle, imamo $c_1 = -2$, $c_2 = 3$. *Konačno dobivamo*

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} -6e^{-2x} + 3e^{5x} \\ 2e^{-2x} + 6e^{5x} \end{pmatrix} \, .$$

Riješit ćemo inicijalni problem i na drugi način, koristeći eksponencijalnu matričnu funkciju, za koju znamo da je jedna fundamentalna matrica sustava. Naći ćemo ju pomoću Putzerovog algoritma.

Prvo imamo $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 5$. *Dakle,* $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{I}$ *i*

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \, .$$

Moramo još riješiti trokutasti sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{aligned} p_1' &= -2p_1 \, , \\ p_2' &= p_1 + 5p_2 \, , \end{aligned}$$

uz uvjet $p_1(0) = 1$, $p_2(0) = 0$.

Rješenje prve jednadžbe je $p_1(x) = Ce^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$. *Iz početnog uvjeta slijedi* $C = 1$. *Uvrstimo li* p_1 *u drugu jednadžbu, dobivamo*

$$p_2' = e^{-2x} + 5p_2 \, .$$

Ovu jednadžbu možemo npr. riješiti varijacijom konstanti. Rješenje pripadne homogene jednadžbe je $p_2^{(H)}(x) = De^{5x}$, $D \in \mathbb{R}$. *Dakle, tražimo rješenje nehomogene jednadžbe u obliku* $p_2(x) = D(x)e^{5x}$. *Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo*

$$p_2'(x) = D'(x)e^{5x} + 5D(x)e^{5x} = e^{-2x} + 5D(x)e^{5x}$$

odakle slijedi $D'(x) = e^{-7x}$ *pa je* $D(x) = -\frac{1}{7}e^{-7x} + \widetilde{D}$, $\widetilde{D} \in \mathbb{R}$. *Iz početnog uvjeta* $p_2(0) = 0$ *slijedi* $D(0) = 0$ *te dobivamo* $\widetilde{D} = \frac{1}{7}$. *Konačno imamo* $p_2(x) = \left(-\frac{1}{7}e^{-7x} + \frac{1}{7}\right) e^{5x} = -\frac{1}{7}e^{-2x} + \frac{1}{7}e^{5x}$. *Sada možemo izračunati*

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}x} &= p_1(x)\boldsymbol{M}_0 + p_2(x)\boldsymbol{M}_1 = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{7}e^{-2x} + \frac{1}{7}e^{5x}\right) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7}e^{-2x} + \frac{1}{7}e^{5x} & -\frac{3}{7}e^{-2x} + \frac{3}{7}e^{5x} \\ -\frac{2}{7}e^{-2x} + \frac{2}{7}e^{5x} & \frac{1}{7}e^{-2x} + \frac{6}{7}e^{5x} \end{pmatrix} \, . \end{aligned}$$

Dakle, rješenje zadanog inicijalnog problema je $\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{y}(0)$ *pa opet dobivamo*

$$\boldsymbol{y}(x) = \begin{pmatrix} -6e^{-2x} + 3e^{5x} \\ 2e^{-2x} + 6e^{5x} \end{pmatrix} \, .$$

Primjer 2.4 *Sada ćemo pomoću Putzerovog algoritma pronaći eksponencijalnu matričnu funkciju pridruženu matrici sustava iz Primjera 2.2, tj. matrici*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} .$$

Znamo već da su svojstvene vrijednosti te matrice jednake $\lambda_1 = 2i$ *i* $\lambda_2 = -2i$. *Imamo opet* $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{I}$ *te*

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -1-2i & 1 \\ -5 & 1-2i \end{pmatrix} .$$

Moramo riješiti i inicijalni problem

$$\begin{aligned} &p_1' = 2ip_1 \, , \\ &p_2' = p_1 - 2ip_2 \, , \\ &p_1(0) = 1 \, , \; p_2(0) = 0 \, . \end{aligned}$$

Opće rješenje prve jednadžbe je $p_1(x) = Ce^{2ix}$, $C \in \mathbb{C}$. *Iz početnog uvjeta dobivamo* $C = 1$. *Sada druga jednadžba glasi*

$$p_2' = -2ip_2 + e^{2ix} .$$

Rješenje pripadne homogene jednadžbe je $p_2^{(H)}(x) = De^{-2ix}$, $D \in \mathbb{C}$ *pa rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku* $p_2(x) = D(x)e^{-2ix}$. *Uvrštavanjem u drugu jednadžbu slijedi* $D'(x)e^{-2ix} = e^{2ix}$, *odnosno* $D(x) = \frac{1}{4i}e^{4ix} + \widetilde{D}$, $\widetilde{D} \in \mathbb{C}$. *Vrijedi još i* $p_2(0) = 0$, *odnosno* $D(0) = 0$ *pa je* $\widetilde{D} = -\frac{1}{4i}$. *Konačno dobivamo* $p_2(x) = \frac{1}{4i}e^{2ix} - \frac{1}{4i}e^{-2ix}$.

Sada vrijedi

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}x} &= p_1(x)\boldsymbol{M}_0 + p_2(x)\boldsymbol{M}_1 \\ &= e^{2ix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4i}e^{2ix} - \frac{1}{4i}e^{-2ix}\right)\begin{pmatrix} -1-2i & 1 \\ -5 & 1-2i \end{pmatrix} \\ &= (\cos(2x) + i\sin(2x))\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sin(2x)\begin{pmatrix} -1-2i & 1 \\ -5 & 1-2i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x) & \frac{1}{2}\sin(2x) \\ -\frac{5}{2}\sin(2x) & \cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Napomena: Eksponencijalnu matričnu funkciju možemo naravno ponekad naći i jednostavnije, bez Putzerovog algoritma. Izračunat ćemo ju koristeći tvrdnje iz Teorema 2.6 za matricu

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Primijetimo da je $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ pri čemu je $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$, dok je

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Također, očito je i $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{CB}$ pa prema Teoremu 2.6 imamo $e^{\boldsymbol{A}x} = e^{(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})x} = e^{\boldsymbol{B}x}e^{\boldsymbol{C}x}$. Prvo je

$$e^{\boldsymbol{B}x} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} .$$

Kako je $\boldsymbol{C}^3 = 0$, imamo $e^{\boldsymbol{C}x} = \boldsymbol{I} + x\boldsymbol{C} + \frac{x^2}{2}\boldsymbol{C}^2$, odnosno

$$e^{\boldsymbol{C}x} = \begin{pmatrix} 1 & 2x & 2x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Konačno je

$$e^{\boldsymbol{A}x} = e^x \begin{pmatrix} 1 & 2x & 2x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

2.4 Nehomogeni sustav

Sada se vratimo na nehomogeni sustav $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)$, gdje je $\boldsymbol{A} \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$, a $\boldsymbol{b} \in C(I; M_{n1}(\mathbb{R}))$. Promotrimo njegovu strukturu. Označimo s $\boldsymbol{y}_P$ neko njegovo rješenje (partikularno rješenje), a s $\mathcal{F}$ vektorski prostor, dimenzije n, rješenja pripadnog homogenog sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$. Neka je $\boldsymbol{y}$ bilo koje rješenje nehomogenog sustava. Tada za $x \in I$ vrijedi

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(x) &= \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x) , \\ \boldsymbol{y}_P'(x) &= \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}_P(x) + \boldsymbol{b}(x) . \end{aligned}$$

Označimo $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_P$. Tada iz prethodnih jednakosti za $x \in I$ imamo $\boldsymbol{z}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{z}(x)$ pa je $\boldsymbol{z}$ rješenje pripadnog homogenog sustava, odnosno $\boldsymbol{z} \in \mathcal{F}$. Analogno, svaka funkcija oblika $\boldsymbol{y}_P + \boldsymbol{z}$, gdje je $\boldsymbol{z} \in \mathcal{F}$, rješenje je nehomogenog sustava.

Zaključujemo da je skup rješenja nehomogenog sustava dan s $\boldsymbol{y}_P + \mathcal{F} := \{\boldsymbol{y}_P + \boldsymbol{z} : \boldsymbol{z} \in \mathcal{F}\}$, odnosno radi se o linearnoj mnogostrukosti.

Koristeći proizvoljnu fundamentalnu matricu pridruženog homogenog sustava možemo izvesti formulu za (jedinstveno) rješenje bilo kojeg inicijalnog problema pridruženog nehomogenom linearnom sustavu:

Teorem 2.8 *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Neka su $\boldsymbol{A}\colon I \to M_n(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{b}\colon I \to M_{n1}(\mathbb{R})$ neprekidne funkcije i neka je $\boldsymbol{\Phi}\colon I \to M_n(\mathbb{R})$ proizvoljna fundamentalna matrica sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$. Ako je $x_0 \in I$ i $\boldsymbol{y}^{(0)} \in M_{n1}(\mathbb{R})$, tada je rješenje inicijalnog problema*

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x) \ , \\ &\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)} \end{aligned}$$

dano s

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{\Phi}(x_0))^{-1}\boldsymbol{y}^{(0)} + \boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}(\boldsymbol{\Phi}(t))^{-1}\boldsymbol{b}(t)dt \ , \quad x \in I \ .$$

Dokaz. S obzirom da postoji jedinstveno rješenje zadanog inicijalnog problema, dovoljno je provjeriti da je ponuđeno rješenje $\boldsymbol{y}$ uistinu rješenje tog problema. Očito je $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)}$. Imamo još i

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(x) \ &= \boldsymbol{\Phi}'(x)(\boldsymbol{\Phi}(x_0))^{-1}\boldsymbol{y}^{(0)} + \boldsymbol{\Phi}'(x)\int_{x_0}^{x}(\boldsymbol{\Phi}(t))^{-1}\boldsymbol{b}(t)dt + \boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{\Phi}(x))^{-1}\boldsymbol{b}(x) \\ &= \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{\Phi}(x_0))^{-1}\boldsymbol{y}^{(0)} + \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}(\boldsymbol{\Phi}(t))^{-1}\boldsymbol{b}(t)dt + \boldsymbol{b}(x) \\ &= \boldsymbol{A}(x)\left(\boldsymbol{\Phi}(x)(\boldsymbol{\Phi}(x_0))^{-1}\boldsymbol{y}^{(0)} + \boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}(\boldsymbol{\Phi}(t))^{-1}\boldsymbol{b}(t)dt\right) + \boldsymbol{b}(x) \\ &= \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{b}(x) \ , \end{aligned}$$

pa je $\boldsymbol{y}$ i rješenje zadanog sustava. □

Primijetimo još, ako je matrica sustava $\boldsymbol{A}$ konstantna, onda je $e^{\boldsymbol{A}x}$ jedna fundamentalna matrica sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}x$. Prema tome, rješenje inicijalnog problema

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x) \ , \\ &\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)} \end{aligned}$$

dobivamo npr. pomoću formule

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}(x-x_0)}\boldsymbol{y}^{(0)} + e^{\boldsymbol{A}x}\int_{x_0}^{x} e^{-\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{b}(t)dt \ .$$

Primjer 2.5 *Riješimo sada inicijalni problem*

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \ \boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Iz Primjera 2.3 znamo da je matrica

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & e^{5x} \\ -e^{-2x} & 2e^{5x} \end{pmatrix}$$

jedna fundamentalna matrica sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Primijetimo da nije jednaka matrici $e^{\boldsymbol{A}x}$ jer je $\boldsymbol{\Phi}(0) \neq I$. Sada imamo

$$(\boldsymbol{\Phi}(x))^{-1} = \frac{1}{7e^{3x}} \begin{pmatrix} 2e^{5x} & -e^{5x} \\ e^{-2x} & 3e^{-2x} \end{pmatrix} \ .$$

Dakle, rješenje inicijalnog problema dano je s

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}(x) &= \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & e^{5x} \\ -e^{-2x} & 2e^{5x} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7e^3} \begin{pmatrix} 2e^5 & -e^5 \\ e^{-2} & 3e^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & e^{5x} \\ -e^{-2x} & 2e^{5x} \end{pmatrix} \int_1^x \frac{1}{7e^{3t}} \begin{pmatrix} 2e^{5t} & -e^{5t} \\ e^{-2t} & 3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \frac{1}{7e^3} \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & e^{5x} \\ -e^{-2x} & 2e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^5 \\ 4e^{-2} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & e^{5x} \\ -e^{-2x} & 2e^{5x} \end{pmatrix} \int_1^x \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ e^{-5t} \end{pmatrix} dt \\
&= \frac{1}{7e^3} \begin{pmatrix} 3e^{5-2x} + 4e^{5x-2} \\ -e^{5-2x} + 8e^{5x-2} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3e^{-2x} & e^{5x} \\ -e^{-2x} & 2e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} - e^2 \\ -\frac{1}{5}e^{-5x} + \frac{1}{5}e^{-5} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3e^{2-2x} + 4e^{5x-5} \\ -e^{2-2x} + 8e^{5x-5} \end{pmatrix} \\
&+ \frac{1}{7} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} - 3e^{2-2x} + \frac{1}{5}e^{5x-5} \\ -\frac{7}{5} + e^{2-2x} + \frac{2}{5}e^{5x-5} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} \frac{14}{5} + \frac{21}{5}e^{5x-5} \\ -\frac{7}{5} + \frac{42}{5}e^{5x-5} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 + 3e^{5x-5} \\ -1 + 6e^{5x-5} \end{pmatrix} \ .
\end{aligned}$$

2.5 Stabilnost trivijalnog rješenja

Primijetimo da je $\boldsymbol{y} \equiv 0$ jedno od rješenja sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, za svaku matricu $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$. Također, $\boldsymbol{y} \equiv 0$ je jedinstveno rješenje inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \ , \\ \boldsymbol{y}(0) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Promotrimo sada što će se dogoditi s rješenjem inicijalnog problema ako napravimo malu grešku u početnom uvjetu. Konkretno, zanima nas kako se ponaša jedinstveno rješenje inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \ , \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}^{(0)} \end{aligned}$$

za "male" $\boldsymbol{y}^{(0)}$ i $x \geq 0$. Iako ćemo možda intuitivno pretpostaviti da se neće previše razlikovati od trivijalnog rješenja, to općenito ne mora vrijediti. Pogledajmo npr. inicijalni problem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \ , \ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^{(0)} \ .$$

Rješenje je dano s (v. Primjer 2.3)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(x) &= e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{y}^{(0)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{7}e^{-2x} + \frac{1}{7}e^{5x} & -\frac{3}{7}e^{-2x} + \frac{3}{7}e^{5x} \\ -\frac{2}{7}e^{-2x} + \frac{2}{7}e^{5x} & \frac{1}{7}e^{-2x} + \frac{6}{7}e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ y_2^{(0)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\frac{6}{7}e^{-2x} + \frac{1}{7}e^{5x})y_1^{(0)} + (-\frac{3}{7}e^{-2x} + \frac{3}{7}e^{5x})y_2^{(0)} \\ (-\frac{2}{7}e^{-2x} + \frac{2}{7}e^{5x})y_1^{(0)} + (\frac{1}{7}e^{-2x} + \frac{6}{7}e^{5x})y_2^{(0)} \end{pmatrix} \ . \end{aligned}$$

Odaberemo li npr. $y_1^{(0)}, y_2^{(0)} > 0$, očito je da $y_1(x)$, $y_2(x) \to +\infty$, kad $x \to +\infty$.

Sad ćemo označiti rješenje inicijalnog problema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{A}y \ , \\ \boldsymbol{y}(0) &= \boldsymbol{y}^{(0)} \end{aligned}$$

s $\boldsymbol{\phi}(\cdot, \boldsymbol{y}^{(0)})$.

Imamo sljedeću definiciju

Definicija 2.2 *Trivijalno rješenje sustava* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ *je*

i) stabilno na $[0, +\infty\rangle$ *ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za* $\|\boldsymbol{y}^{(0)}\| < \delta$ *vrijedi* $\|\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}^{(0)})\| < \varepsilon$, $x \in [0, +\infty\rangle$;

ii) nestabilno na $[0, +\infty\rangle$ ako nije stabilno na $[0, +\infty\rangle$;

iii) globalno asimptotički stabilno na $[0, +\infty\rangle$ ako je stabilno na $[0, +\infty\rangle$ i ako za svako $\boldsymbol{y}^{(0)} \in M_{n1}(\mathbb{R})$ vrijedi $\lim_{x\to+\infty} \boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}^{(0)}) = 0$.

Pomoću svojstvenih vrijednosti matrice $\boldsymbol{A}$ možemo odrediti stabilnost trivijalnog rješenja. Imamo naime sljedeći rezultat:

Teorem 2.9 (Teorem o stabilnosti) *Neka je $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

i) Trivijalno rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ je globalno asimptotički stabilno na $[0, +\infty\rangle$ ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti matrice $\boldsymbol{A}$ imaju realne dijelove strogo manje od nula;

ii) Trivijalno rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ je stabilno na $[0, +\infty\rangle$ (ali ne i globalno asimptotički stabilno) ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti matrice $\boldsymbol{A}$ imaju realan dio manji ili jednak nula, pri čemu postoji barem jedna svojstvena vrijednost s realnim dijelom jednakim nula, a sve svojstvene vrijednosti kojima je realan dio nula imaju jednaku algebarsku i geometrijsku kratnost;

iii) Trivijalno rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ je nestabilno na $[0, +\infty\rangle$ ako i samo ako za svojstvene vrijednosti matrice $\boldsymbol{A}$ ne vrijedi nijedan od uvjeta pod i) i ii).

Dokaz. Da bismo dokazali prethodno navedene tvrdnje, primijetimo da je rješenje inicijalnog problema $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^{(0)}$ dano s $\boldsymbol{y}(x) = e^{\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{y}^{(0)}$, pri čemu vrijedi $e^{\boldsymbol{A}x} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}x}\boldsymbol{P}^{-1}$. Matrica $\boldsymbol{P}$ je pritom matrica prijelaza matrice $\boldsymbol{A}$ na Jordanovu formu $\boldsymbol{J}$ (odnosno vrijedi $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}$), dok matrica $e^{\boldsymbol{J}x}$ ima oblik $e^{\boldsymbol{J}x} = \operatorname{diag}(e^{\boldsymbol{J}_1x}, \ldots, e^{\boldsymbol{J}_px})$, pri čemu su blokovi u toj matrici pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima. Svaki od tih blokova je oblika $e^{\boldsymbol{J}_jx} = \operatorname{diag}(e^{\boldsymbol{B}_{j1}x}, \ldots, e^{\boldsymbol{B}_{jr_j}x})$, $j = 1, \ldots, p$ (detalji se mogu vidjeti u skripti iz kolegija "Dinamički sustavi").
Neka je elementarni blok $e^{\boldsymbol{B}_{jk}x}$ matrice $e^{\boldsymbol{J}x}$ pridružen nekoj svojstvenoj vrijednosti λ. Ukoliko je $\lambda \in \mathbb{R}$, onda je taj blok oblika

$$e^{\lambda x}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \ldots & \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & x & \ldots & \frac{x^{m-3}}{(m-3)!} & \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \frac{x^{m-4}}{(m-4)!} & \frac{x^{m-3}}{(m-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako je svojstvena vrijednost λ takva da joj se geometrijska i algebarska kratnost podudaraju, svaki pripadni blok je duljine 1.

Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$ i $\lambda = a + bi$, tada je elementarni blok oblika

$$e^{ax}\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & x\boldsymbol{R} & \frac{x^2}{2!}\boldsymbol{R} & \dots & \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\boldsymbol{R} & \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\boldsymbol{R} \\ 0 & \boldsymbol{R} & x\boldsymbol{R} & \dots & \frac{x^{m-3}}{(m-3)!}\boldsymbol{R} & \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\boldsymbol{R} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{R} & \dots & \frac{x^{m-4}}{(m-4)!}\boldsymbol{R} & \frac{x^{m-3}}{(m-3)!}\boldsymbol{R} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{R} & x\boldsymbol{R} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \boldsymbol{R} \end{pmatrix},$$

gdje je

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos(bx) & -\sin(bx) \\ \sin(bx) & \cos(bx) \end{pmatrix}.$$

Ako je svojstvena vrijednost λ takva da joj se geometrijska i algebarska kratnost podudaraju, svaki pripadni blok je duljine 2.

Komponente rješenja inicijalnog problema $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^{(0)}$ zapisuju se kao linearne kombinacije funkcija koje pripadaju navedenim blokovima. Nadalje, zaključujemo da će za $x \geq 0$ i matrice $\boldsymbol{A}$ koje zadovoljavaju uvjete pod i) i ii) vrijediti $|(e^{\boldsymbol{J}x})_{ij}| \leq C$, $i, j = 1, \dots, n$, pri čemu je C pozitivna konstanta. Dakle, $\|\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}^{(0)})\| \leq C\|\boldsymbol{y}^{(0)}\|$, $x \geq 0$. Za zadani $\varepsilon > 0$ i $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ imamo da $\|\boldsymbol{y}^{(0)}\| < \delta$ povlači $\|\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}^{(0)})\| < \varepsilon$, $x \in [0, +\infty\rangle$. Prema tome, tada je trivijalno rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ stabilno na $[0, +\infty\rangle$. Iz oblika funkcija u matrici $e^{\boldsymbol{J}x}$ zaključujemo i da će, ako matrica $\boldsymbol{A}$ zadovoljava uvjete pod i), rješenje $\boldsymbol{\phi}(\cdot, \boldsymbol{y}^{(0)})$ težiti u nulu kad $x \to +\infty$. Ako matrica $\boldsymbol{A}$ zadovoljava uvjete pod ii), tada postoji barem jedna komponenta matrice $e^{\boldsymbol{J}x}$ koja je konstanta ili periodička, stoga trivijalno rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ u ovom slučaju nije asimptotički stabilno. U svim ostalim slučajevima u matrici $e^{\boldsymbol{J}x}$ imamo barem jednu neograničenu funkciju na $[0, +\infty\rangle$, zbog čega trivijalno rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ nije stabilno na $[0, +\infty\rangle$. $\square$

Primjer 2.6 *Trivijalno rješenje obične diferencijalne jednadžbe $y' = y$ je prema prethodnom teoremu nestabilno na $[0, +\infty\rangle$ jer je pripadna svojstvena vrijednost jednaka 1. Nestabilnost rješenja možemo lako dokazati i direktno. Naime, inicijalni problem $y' = y$, $y(0) = y_0$ ima rješenje $y(x) = y_0 e^x$. Dakle, za svaki početni uvjet $y_0 \in \mathbb{R}$ rješenje je neograničeno na $[0, +\infty\rangle$ (za razliku od intervala $\langle -\infty, 0]$ gdje je ograničeno). Kad bi trivijalno rješenje bilo stabilno na $[0, +\infty\rangle$, rješenje navedenog inicijalnog problema bi bilo ograničeno na $[0, +\infty\rangle$ za početni uvjet iz neke okoline nule, što ovdje nije slučaj.*

S druge strane, prema Teoremu o stabilnosti 2.9, trivijalno rješenje jednadžbe $y' = -y$ je globalno asimptotički stabilno na $[0, +\infty\rangle$ jer je pripadna svojstvena vrijednost jednaka -1. Rješenje inicijalnog problema $y' = -y$, $y(0) = y_0$ sada je $y(x) = y_0 e^{-x}$. Vrijedi $|y(x)| \leq |y_0|$, $x \geq 0$, pa i iz te ocjene vidimo da imamo stabilnost rješenja. Također je $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0$.

Konačno, jednadžba $y' = 0$ ima konstantna rješenja pa trivijalno rješenje nije asimptotički stabilno, nego je samo stabilno na $[0, +\infty\rangle$. Odgovarajuća svojstvena vrijednost je nula te stabilnost možemo opet dobiti i iz Teorema o stabilnosti.

Primjer 2.7 *Zadan je sustav*

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \; .$$

Svojstvene vrijednosti matrice sustava su $\pm i$, odnosno sve imaju realan dio nula i jednostruke su. Dakle, prema Teoremu o stabilnosti možemo zaključiti da je trivijalno rješenje stabilno na $[0, +\infty\rangle$, ali nije asimptotički stabilnosti.

Pokažimo to i na sljedeći način. Nađimo rješenje sustava uz početni uvjet $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^{(0)}$. Imamo $y_1' = y_2$, $y_2' = -y_1$ pa je $y_1'' + y_1 = 0$, odnosno $y_1(x) = A\cos x + B \sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$. Dakle, $y_2(x) = y_1'(x) = -A \sin x + B \cos x$. Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo $A = y_1^{(0)}$, $B = y_2^{(0)}$ te je $\|\boldsymbol{y}(x)\| = \|\boldsymbol{y}^{(0)}\|$ iz čega slijedi stabilnost trivijalnog rješenja sustava na $[0, +\infty\rangle$. Primijetimo da su rješenja sustava periodička pa trivijalno rješenje nije asimptotički stabilno.

Primjer 2.8 *Promotrimo i sustav*

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \; .$$

Matrica sustava ima svojstvene vrijednosti -5 te $-1 \pm \sqrt{10}$. Kako je $-1 + \sqrt{10} > 0$, trivijalno rješenje je nestabilno na $[0, +\infty\rangle$.

Primjer 2.9 *Riješimo sada sustav*

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \; ,$$

svođenjem na obične diferencijalne jednadžbe. Iz prve dvije jednadžbe dobivamo $y_1'' + y_1 = 0$ pa je $y_1(x) = A\cos x + B \sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$. Tada je $y_2(x) = y_1'(x) = -A \sin x + B \cos x$. Analogno iz zadnje dvije jednadžbe dobivamo $y_3(x) = C\cos x + D \sin x$, $C, D \in \mathbb{R}$, odnosno $y_4(x) = -C \sin x + D \cos x$. Uz početni uvjet $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^{(0)}$ imamo

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_1^{(0)} \cos x + y_2^{(0)} \sin x \; , \\
y_2(x) &= -y_1^{(0)} \sin x + y_2^{(0)} \cos x \; , \\
y_3(x) &= y_3^{(0)} \cos x + y_4^{(0)} \sin x \; , \\
y_4(x) &= -y_3^{(0)} \sin x + y_4^{(0)} \cos x \; .
\end{aligned}$$

Sada vidimo da je za $x \in \mathbb{R}$ $(y_1(x))^2 + (y_2(x))^2 = (y_1^{(0)})^2 + (y_2^{(0)})^2$ *i* $(y_3(x))^2 + (y_4(x))^2 = (y_3^{(0)})^2 + (y_4^{(0)})^2$ *pa je* $\|\boldsymbol{y}(x)\| = \|\boldsymbol{y}^{(0)}\|$ *iz čega slijedi stabilnost trivijalnog rješenja sustava na* $[0, +\infty\rangle$*. Vidimo da je rješenje sustava periodičko pa očito nemamo asimptotičku stabilnost trivijalnog rješenja.*

Lako je provjeriti da su svojstvene vrijednosti matrice sustava jednake $\pm i$ *te da su im geometrijske i algebarske kratnosti jednake 2. Primjenom Teorema o stabilnosti možemo i direktno zaključiti da je trivijalno rješenje sustava stabilno na* $[0, +\infty\rangle$ *te da nije asimptotički stabilno.*

Primjer 2.10 *Sada ćemo riješiti sustav*

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

uz uvjet $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^{(0)}$*. Matrica sustava ima jednake svojstvene vrijednosti kao u prethodnom primjeru, ali ovaj put su im algebarske kratnosti jednake 2, dok su im geometrijske jednake 1. Iz Teorema o stabilnosti zaključujemo da je trivijalno rješenje sustava nestabilno na* $[0, +\infty\rangle$*.*

Uvjerimo se u to i rješavanjem inicijalnog problema. Kao i u prošlom primjeru dobivamo

$$\begin{aligned} y_3(x) &= y_3^{(0)} \cos x + y_4^{(0)} \sin x \ , \\ y_4(x) &= -y_3^{(0)} \sin x + y_4^{(0)} \cos x \ . \end{aligned}$$

Prve dvije jednadžbe sustava glase

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_4 \ , \\ y_2' &= -y_1 \ . \end{aligned}$$

Dakle, imamo $y_2'' = -y_1' = -y_2 - y_4$*, odnosno*

$$y_2'' + y_2 = y_3^{(0)} \sin x - y_4^{(0)} \cos x \ .$$

Rješenje pripadne homogene jednadžbe je $y_2^{(H)}(x) = A\cos x + B \sin x$*, dok partikularno rješenje tražimo pomoću metode neodređenih koeficijenata. Rješenje možemo naći u obliku* $y_2^{(P)}(x) = x(a\cos x + b \sin x)$*. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo*

$$2(-a \sin x + b \cos x) = y_3^{(0)} \sin x - y_4^{(0)} \cos x \ ,$$

odnosno $a = -\frac{1}{2} y_3^{(0)}$*,* $b = -\frac{1}{2} y_4^{(0)}$*. Prema tome je*

$$y_2(x) = \quad A \cos x + B \sin x - \frac{x}{2}(y_3^{(0)} \cos x + y_4^{(0)} \sin x) \ ,$$

$$
\begin{aligned}
y_1(x) = \quad & -y_2'(x) = A\sin x - B\cos x + \frac{1}{2}(y_3^{(0)}\cos x + y_4^{(0)}\sin x) \\
& + \frac{x}{2}(-y_3^{(0)}\sin x + y_4^{(0)}\cos x)\ .
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta dobivamo $A = y_2^{(0)}$, $B = \frac{1}{2}y_3^{(0)} - y_1^{(0)}$. *Kako god odabrali početni uvjet, očito je da je rješenje pripadnog inicijalnog problema neograničeno na* $[0, +\infty\rangle$ *pa trivijalno rješenje zadanog sustava nije stabilno.*

2.6 Periodički sustavi

Sada ćemo promatrati periodičke linearne sustave, odnosno sustave oblika $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ neprekidna periodička funkcija s periodom ω. Takve sustave zovemo još Floquetovi sustavi.

Pitamo se je li rješenje inicijalnog problema pridruženog Floquetovom sustavu uvijek periodička funkcija. Pogledajmo za početak inicijalne probleme

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}\ , \\
&\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)}
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}\ , \\
&\boldsymbol{y}(x_0 + \omega) = \boldsymbol{y}^{(0)}\ ,
\end{aligned}
$$

za neke $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\boldsymbol{y}^{(0)} \in M_{n1}(\mathbb{R})$. Neka je $\boldsymbol{u}\colon \mathbb{R} \to M_{n1}(\mathbb{R})$ rješenje prvog problema, a $\boldsymbol{v}\colon \mathbb{R} \to M_{n1}(\mathbb{R})$ rješenje drugog. Definiramo funkciju $\boldsymbol{z}$ sa $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{v}(x+\omega)$, $x \in \mathbb{R}$. Tada je $\boldsymbol{z}'(x) = \boldsymbol{v}'(x+\omega) = \boldsymbol{A}(x+\omega)\boldsymbol{v}(x+\omega) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{z}(x)$. Također je $\boldsymbol{z}(x_0) = \boldsymbol{v}(x_0+\omega) = \boldsymbol{y}^{(0)}$. Prema tome, funkcija $\boldsymbol{z}$ je također rješenje prvog problema pa je zbog jedinstvenosti rješenja $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{u}(x)$, odnosno $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{v}(x+\omega)$, $x \in \mathbb{R}$. Međutim, kako je općenito $\boldsymbol{u}(x_0) \neq \boldsymbol{u}(x_0+\omega)$, kada proširujemo rješenje $\boldsymbol{u}$ s intervala $[x_0, x_0+\omega]$, ne dobivamo uvijek periodičko rješenje prvog inicijalnog problema.

Pogledajmo npr. inicijalni problem $y' = y\sin x$, $y(0) = 1$. Rješenje je $y(x) = e^{1-\cos x}$, što je periodička funkcija. S druge strane, rješenje inicijalnog problema $y' = y\sin^2 x$, $y(0) = 1$ je $y(x) = e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)}$ koje nije periodičko. Funkcija $x \mapsto \sin^2 x$ je perioda π. Vidimo da imamo rješenje za koje je $y(0) = 1$, $y(\pi) = e^{\frac{\pi}{2}}$. Dakle, unatoč periodičnosti funkcije koja određuje jednadžbu nismo postigli periodičko rješenje inicijalnog problema, s obzirom da se vrijednosti rješenja u rubovima temeljnog intervala ne podudaraju. U nastavku će nas zanimati uz koje uvjete će rješenje ipak biti periodičko.

Rješenje prethodnog inicijalnog problema u sebi sadrži kao faktor periodičku funkciju p, $p(x) = e^{-\frac{1}{4}\sin(2x)}$. Pokazat ćemo da se ta činjenica može generalizirati. Za početak izrecimo jedan pomoćni rezultat:

Teorem 2.10 *Neka je $\boldsymbol{A} \in M_n(\mathbb{R})$ regularna matrica. Tada postoji (općenito kompleksna) matrica $\boldsymbol{B}$ reda n takva da je $e^{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A}$. Matricu $\boldsymbol{B}$ pritom zovemo logaritam matrice $\boldsymbol{A}$.*

□

Sada možemo dokazati:

Teorem 2.11 (Floquet) *Neka je $\boldsymbol{\Phi}$ neka fundamentalna matrica Floquetovog sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{A}\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ neprekidna periodička matrična funkcija s periodom ω. Tada je matrična funkcija $\boldsymbol{\Psi}\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ definirana s $\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x+\omega)$, $x \in \mathbb{R}$, također fundamentalna matrica tog sustava.*
Nadalje, postoje periodička neprekidno diferencijabilna regularna matrična funkcija $\boldsymbol{P}\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$, perioda ω, i konstantna matrica $\boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{C})$ tako da vrijedi $\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{P}(x)e^{\boldsymbol{B}x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Kako je $\boldsymbol{\Phi}$ fundamentalna matrica zadanog sustava, vrijedi $\boldsymbol{\Phi}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)$, $\det\boldsymbol{\Phi}(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Prvo je $\boldsymbol{\Psi}'(x) = \boldsymbol{\Phi}'(x+\omega) = \boldsymbol{A}(x+\omega)\boldsymbol{\Phi}(x+\omega) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Psi}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, pa je $\boldsymbol{\Psi}$ rješenje pripadne matrične jednadžbe sustava. Vrijedi još i $\det\boldsymbol{\Psi}(x) = \det\boldsymbol{\Phi}(x+\omega) \neq 0$. Dakle, i $\boldsymbol{\Psi}$ je fundamentalna matrica zadanog sustava.

Kako su $\boldsymbol{\Psi}$ i $\boldsymbol{\Phi}$ fundamentalne matrice zadanog sustava, prema Teoremu 2.5 postoji regularna matrica $\boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $\boldsymbol{\Psi}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x+\omega) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}$ (ako stavimo npr. $x = 0$, dobivamo $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\Phi}(0))^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\omega)$). Neka je $\widetilde{\boldsymbol{B}} \in M_n(\mathbb{C})$ logaritam matrice $\boldsymbol{C}$ i neka je $\boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega}\widetilde{\boldsymbol{B}}$. Dakle, vrijedi $\boldsymbol{C} = e^{\boldsymbol{B}\omega}$. Sada definiramo funkciju $\boldsymbol{P}\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ s $\boldsymbol{P}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)e^{-\boldsymbol{B}x}$. Sva svojstva funkcije $\boldsymbol{P}$ su očita osim periodičnosti. Za $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\boldsymbol{P}(x+\omega) = \boldsymbol{\Phi}(x+\omega)e^{-\boldsymbol{B}(x+\omega)} = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}e^{-\boldsymbol{B}(\omega+x)} = \boldsymbol{\Phi}(x)e^{\boldsymbol{B}\omega}e^{-\boldsymbol{B}\omega}e^{-\boldsymbol{B}x} = \boldsymbol{P}(x)$$

te smo time dokazali da je $\boldsymbol{P}$ perioda ω. □

Sada definiramo Floquetove multiplikatore pomoću kojih možemo dokazati egzistenciju periodičkih rješenja te utvrditi stabilnost trivijalnog rješenja Floquetovog sustava.

Definicija 2.3 *Neka je $\boldsymbol{\Phi}$ proizvoljna fundamentalna matrica Floquetovog sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{A}$ perioda ω. Floquetovi multiplikatori tog sustava su svojstvene vrijednosti matrice $(\boldsymbol{\Phi}(0))^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\omega)$.*

Kako fundamentalnih matrica ima beskonačno mnogo, potrebno je provjeriti je li prethodna definicija jednoznačna. Neka je dakle $\boldsymbol{\Psi}$ neka druga fundamentalna matrica istog sustava. Tada postoji regularna matrica $\boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi B}$. Neka je $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{\Phi}(0))^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\omega)$ i $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{\Psi}(0))^{-1}\boldsymbol{\Psi}(\omega)$. Tada je

$$\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{\Phi}(0)\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\omega)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{\Phi}(0))^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\omega)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}$$

pa su matrice $\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{D}$ slične, odnosno imaju isti skup svojstvenih vrijednosti. Time smo dokazali da je definicija Floquetovih multiplikatora korektna.

Pomoću Floquetovih multiplikatora možemo ponekad zaključiti da sustav ima periodičko rješenje.

Teorem 2.12 *Neka je zadan Floquetov sustav $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{A}$ perioda ω. Tada je $\mu \in \mathbb{R}$ Floquetov multiplikator zadanog sustava ako i samo ako postoji netrivijalno rješenje $\boldsymbol{y}$ sustava takvo da vrijedi $\boldsymbol{y}(x+\omega) = \mu\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Dakle, zadani sustav ima netrivijalno periodičko rješenje perioda ω ako i samo ako je $\mu = 1$ Floquetov multiplikator sustava.*

Dokaz. Neka je $\mu \in \mathbb{R}$ Floquetov multiplikator zadanog sustava i neka je $\boldsymbol{\Phi}$ proizvoljna fundamentalna matrica sustava. Tada je μ svojstvena vrijednost matrice $\boldsymbol{C} := (\boldsymbol{\Phi}(0))^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\omega)$. Također, postoji netrivijalni vektor $\boldsymbol{y}_0 \in M_{n1}(\mathbb{R})$ takav da vrijedi $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_0 = \mu\boldsymbol{y}_0$. Definiramo funkciju $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{y}_0$, $x \in \mathbb{R}$. Ona je očito rješenje danog sustava. Iz dokaza Floquetovog teorema znamo da je $\boldsymbol{\Phi}(x+\omega) = \boldsymbol{\Phi}(x)C$, $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, $\boldsymbol{y}(x+\omega) = \boldsymbol{\Phi}(x+\omega)\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{C}y_0 = \boldsymbol{\Phi}(x)(\mu\boldsymbol{y}_0) = \mu\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{y}_0 = \mu\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{y}$ trivijalno rješenje. Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada je $\boldsymbol{y}_0 = (\boldsymbol{\Phi}(x))^{-1}\boldsymbol{y}(x) = 0$, čime dobivamo kontradikciju.

Dokažimo i obrat. Neka je $\mu \in \mathbb{R}$ i neka postoji netrivijalno rješenje $\boldsymbol{y}$ zadanog sustava za koje vrijedi $\boldsymbol{y}(x+\omega) = \mu\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Rješenje $\boldsymbol{y}$ se može napisati u obliku $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{y}_0$, gdje je $\boldsymbol{\Phi}$ proizvoljna fundamentalna matrica sustava, a $\boldsymbol{y}_0 \in M_{n1}(\mathbb{R})$ konstantan vektor. Ako je $\boldsymbol{y}_0 = 0$, onda je $\boldsymbol{y} \equiv 0$, što nije moguće. Dalje je $\boldsymbol{\Phi}(x+\omega)\boldsymbol{y}_0 = \mu\boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{y}_0$, $x \in \mathbb{R}$. Ako uvrstimo $x = 0$, dobivamo $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}_0 = \mu\boldsymbol{y}_0$, gdje je $\boldsymbol{C} := (\boldsymbol{\Phi}(0))^{-1}\boldsymbol{\Phi}(\omega)$. Kako je $\boldsymbol{y}_0 \neq 0$, zaključujemo da je μ svojstvena vrijednost matrice $\boldsymbol{C}$, odnosno Floquetov multiplikator zadanog sustava. □

Primijetimo, ako Floquetov sustav nema Floquetov multiplikator 1, to ne mora nužno značiti da nema nijedno periodičko rješenje. Teorem 2.12 nam u tom slučaju samo osigurava da nema rješenje perioda ω. Pretpostavimo npr. da Floquetov sustav nema Floquetov multiplikator 1, ali ima Floquetov multiplikator -1. Tada prema prethodnom teoremu postoji netrivijalno rješenje sustava $\boldsymbol{y}$ za koje vrijedi $\boldsymbol{y}(x+\omega) = -\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, pa je $\boldsymbol{y}(x+2\omega) = -\boldsymbol{y}(x+\omega) = \boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Drugim riječima, sustav ima netrivijalno periodičko rješenje perioda 2ω.

Koristeći Floquetov teorem možemo dokazati da se svaki Floquetov sustav pogodnom supstitucijom može svesti na homogen linearan autonoman sustav:

Teorem 2.13 *Neka je $\boldsymbol{\Phi}$ neka fundamentalna matrica sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, gdje je $\boldsymbol{A}$ perioda ω. Neka je $\boldsymbol{P}\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{C})$ regularna periodička matrična funkcija s periodom ω i $\boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{C})$ takva da je $\boldsymbol{\Phi}(x) = \boldsymbol{P}(x)e^{\boldsymbol{B}x}$, $x \in \mathbb{R}$. Ako je $\boldsymbol{y}$ rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, tada je funkcija $\boldsymbol{z}$ definirana sa $\boldsymbol{z}(x) = (\boldsymbol{P}(x))^{-1}\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, (općenito kompleksno) rješenje sustava $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}$.*

Dokaz. Kao prvo, primijetimo da za zadanu fundamentalnu matricu $\boldsymbol{\Phi}$, funkcija $\boldsymbol{P}$ i matrica $\boldsymbol{B}$ postoje prema Floquetovom teoremu.

Neka je $\boldsymbol{y}$ rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$. Tada postoji konstantan vektor $\boldsymbol{c} \in M_{n1}(\mathbb{R})$ takav da je $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}$, $x \in \mathbb{R}$. Neka je $\boldsymbol{z}(x) = (\boldsymbol{P}(x))^{-1}\boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Tada imamo $\boldsymbol{z}(x) = (\boldsymbol{P}(x))^{-1}\boldsymbol{P}(x)e^{\boldsymbol{B}x}\boldsymbol{c} = e^{\boldsymbol{B}x}\boldsymbol{c}$, $x \in \mathbb{R}$. Deriviranjem po x dobivamo $\boldsymbol{z}'(x) = \boldsymbol{B}e^{\boldsymbol{B}x}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}(x)$ čime je tvrdnja dokazana.

$\square$

Primijetimo, možemo dokazati i obrat. Neka je $\boldsymbol{z}$ (kompleksno) rješenje sustava $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}$. Definiramo $\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{z}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'(x) &= \boldsymbol{P}'(x)\boldsymbol{z}(x) + \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{z}'(x) \\ &= \boldsymbol{P}'(x)\boldsymbol{z}(x) + \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}(x) = (\boldsymbol{P}'(x) + \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{B})\boldsymbol{z}(x)\ . \end{aligned} \tag{2.2}$$

S druge strane je

$$\boldsymbol{\Phi}'(x) = (\boldsymbol{P}(x)e^{\boldsymbol{B}x})' = (\boldsymbol{P}'(x) + \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{B})e^{\boldsymbol{B}x}\ .$$

Dakle, $\boldsymbol{P}'(x) + \boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Phi}'(x)e^{-\boldsymbol{B}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{\Phi}(x)e^{-\boldsymbol{B}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{P}(x)$. Uvrštavanjem u jednakost (2.2) imamo

$$\boldsymbol{y}'(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)\ .$$

Prema tome, $\boldsymbol{y}$ je (općenito kompleksno) rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$.

Primijetimo još da je sustav $\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}$ općenito sustav s kompleksnom matricom $\boldsymbol{B}$. Dakle pripada široj klasi sustava od one koju smo dosad promatrali.

U nastavku za matricu $\boldsymbol{R} \in M_n(\mathbb{C})$ koristimo operatorsku normu

$$\|\boldsymbol{R}\| = \sup_{\boldsymbol{w} \in M_{n1}(\mathbb{C}),\, \|\boldsymbol{w}\|=1} \|\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}\|$$

pri čemu je $\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |w_i|^2}$. Vrijedi $\|\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{R}\| \cdot \|\boldsymbol{w}\|$, $\boldsymbol{w} \in M_{n1}(\mathbb{C})$. Ako je $\boldsymbol{y}$ neko rješenje sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$, onda prema teoremu 2.13 znamo da se funkcija $\boldsymbol{z}$, definirana s $\boldsymbol{z}(x) = (\boldsymbol{P}(x))^{-1}\boldsymbol{y}(x)$ može zapisati kao $\boldsymbol{z}(x) = e^{\boldsymbol{B}x}\boldsymbol{c}$, za neki $\boldsymbol{c} \in M_{n1}(\mathbb{R})$. Još vrijedi i

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{y}(x)\| &= \|\boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{z}(x)\| \leq \|\boldsymbol{P}(x)\| \cdot \|\boldsymbol{z}(x)\| \leq C_1\|\boldsymbol{z}(x)\| \,, \\ \|\boldsymbol{z}(x)\| &= \|(\boldsymbol{P}(x))^{-1}\boldsymbol{y}(x)\| \leq \|(\boldsymbol{P}(x))^{-1}\| \cdot \|\boldsymbol{y}(x)\| \leq C_2\|\boldsymbol{y}(x)\| \,, \end{aligned}$$

za neke konstante C_1, $C_2 > 0$. Te konstante postoje jer su $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{P}^{-1}$ periodičke funkcije, pa su i ograničene. Ponašanje funkcije $\boldsymbol{y}$ dobivamo tako da raspišemo izraz za $\boldsymbol{z}$ na analogan način kao u teoremu 2.9 te na taj način stabilnost i asimptotičku stabilnost trivijalnog rješenja sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ povezujemo s matricom $\boldsymbol{B}$. S obzirom da su Floquetovi multiplikatori sustava svojstvene vrijednosti matrice $e^{\boldsymbol{B}\omega}$, moguće je, koristeći Jordanovu kanonsku formu, dokazati da je skup Floquetovih multiplikatora sustava jednak $\{e^{\lambda\omega} : \lambda \in \sigma(\boldsymbol{B})\}$, gdje smo sa $\sigma(\boldsymbol{B})$ označili spektar matrice $\boldsymbol{B}$. Za svaki Floquetov multiplikator pripadni λ ćemo zvati eksponentom tog multiplikatora.

Na taj način dolazimo do sljedećeg rezultata:

Teorem 2.14 *Neka je $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$ Floquetov sustav i neka su $\mu_1, \ldots, \mu_n$ njegovi Floquetovi multiplikatori. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

i) Ako je $|\mu_i| \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$, te ako multiplikatori μ sa svojstvom $|\mu| = 1$ imaju eksponente koji su jednake algebarske i geometrijske kratnosti, trivijalno rješenje sustava je stabilno na $[0, +\infty\rangle$;

ii) Ako je $|\mu_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, trivijalno rješenje je globalno asimptotički stabilno na $[0, +\infty\rangle$;

iii) Ako postoji barem jedan multiplikator μ takav da je $|\mu| > 1$ ili postoji multiplikator μ takav da je $|\mu| = 1$, a algebarska i geometrijska kratnost njegovog eksponenta se ne podudaraju, trivijalno rješenje je nestabilno na $[0, +\infty\rangle$.

□

Napomenimo još da je stabilnost trivijalnog rješenja Floquetovog sustava definirana na posve isti način kao i kod linearnog homogenog autonomnog sustava.

Primjer 2.11 *Odredit ćemo Floquetove multiplikatore sustava*

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \cos x & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} \,.$$

Iz prve jednadžbe sustava dobivamo $y_1(x) = C_1 e^{-x}$. Uvrštavanjem u drugu slijedi $y_2' = C_1 e^{-x}\cos x - y_2$ pa y_2 tražimo u obliku $y_2(x) = C_2(x)e^{-x}$. Tada je $C_2'(x)e^{-x} = C_1 e^{-x}\cos x$, odnosno $C_2(x) = C_1 \sin x + C_2$. Prema tome je opće rješenje sustava jednako

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} \\ C_1 e^{-x}\sin x + C_2 e^{-x} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x}\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{pmatrix} \,.$$

Nakon što smo našli bazu prostora rješenja, definiramo:

$$\mathbf{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ e^{-x}\sin x & e^{-x} \end{pmatrix} .$$

S obzirom da je $\det \mathbf{\Phi}(0) = 1$*, matrična funkcija* $\mathbf{\Phi}$ *je uistinu fundamentalna matrica zadanog sustava. Sada je*

$$(\mathbf{\Phi}(0))^{-1}\mathbf{\Phi}(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} \end{pmatrix} .$$

Sustav dakle ima jedan dvostruki Floquetov multiplikator koji je jednak $e^{-2\pi}$*. Kako je* $|e^{-2\pi}| < 1$*, prema teoremu 2.14 zaključujemo da je trivijalno rješenje sustava globalno asimptotički stabilno na* $[0, +\infty\rangle$*.*

Poglavlje 3

Autonomni sustavi

3.1 Fazni dijagram

U ovom poglavlju proučavamo sustave oblika

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \tag{3.1}$$

koji su podvrsta klase sustava (1.6) i zovemo ih autonomni sustavi. Primjećujemo da kod takvih sustava funkcija desne strane sustava ne ovisi o varijabli x. Odsad nadalje pretpostavljat ćemo da je funkcija $\boldsymbol{f}$ definirana na čitavom skupu $\mathbb{R}^n$ te da je $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ neprekidno diferencijabilna. Uz tu pretpostavku možemo primijeniti Picardov teorem na inicijalni problem

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \ , \\ &\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}^{(0)} \ , \end{aligned}$$

za proizvoljne $x_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Inicijalni problem ima jedinstveno rješenje na nekom intervalu oko x_0. Naravno, općenito nije proširivo na čitav skup $\mathbb{R}$, odnosno ne dobivamo uvijek globalno rješenje.

Definicija 3.1 *Neka je $\boldsymbol{y}$ neko rješenje sustava (3.1) s neproširivim intervalom egzistencije $\langle \alpha, \omega \rangle$. Skup $\{\boldsymbol{y}(x) :\ x \in \langle \alpha, \omega \rangle\}$ zovemo orbita sustava (3.1).*

Primijetimo da orbita predstavlja sliku rješenja $\boldsymbol{y}$. Orbita može predstavljati sliku više rješenja sustava.

Poseban tip orbite čine orbite koje se sastoje od samo jedne točke. Kod takvih orbita, slika pripadnog rješenja je jednočlan skup, odnosno radi se o slici konstantnog rješenja. U tom slučaju orbita je slika samo jednog rješenja. Neka je to rješenje dano s $\boldsymbol{y} \equiv \boldsymbol{y}_0$, za neki $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Tada iz sustava (3.1) dobivamo $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) = 0$. Time dolazimo do sljedeće definicije:

Definicija 3.2 *Kritične točke sustava (3.1) su točke $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ za koje vrijedi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) =$* 0.

Definicija 3.3 *Kažemo da je kritična točka* $\boldsymbol{y}_0$ *sustava (3.1) izolirana ako postoji okolina* U *te točke takva da skup* $U\backslash\{\boldsymbol{y}_0\}$ *ne sadrži nijednu kritičnu točku sustava.*

Primjer 3.1 *Pogledajmo jednadžbu* $y' = y$. *Jedina kritična točka jednadžbe je* $y_0 = 0$. *Ona je slika konstantnog rješenja* $y \equiv 0$. *Dakle, jedna orbita sustava je točka* 0. *Opće rješenje jednadžbe je dano s* $y(x) = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$. *Neka je* y *proizvoljno rješenje jednadžbe za koje je* $C > 0$. *Slika tog rješenja je skup* $\langle 0, +\infty\rangle$. *Analogno, rješenja za koja je* $C < 0$ *imaju sliku* $\langle -\infty, 0\rangle$.

Dakle, sustav ima tri orbite: $\{0\}$, $\langle 0, +\infty\rangle$, $\langle -\infty, 0\rangle$. *Pritom je orbita* $\langle 0, +\infty\rangle$ *orijentirana udesno. Naime, svako rješenje kojem je ta orbita slika rastuća je funkcija. Analogno zaključujemo da je orbita* $\langle -\infty, 0\rangle$ *orijentirana ulijevo.*

Skup svih orbita čini fazni dijagram. Iz faznog dijagrama dakle, za razliku od dijagrama koji prikazuje grafove funkcija, ne možemo vidjeti kako konkretno izgledaju rješenja sustava za zadani početni uvjet, odnosno ne možemo očitati vrijednost rješenja u pojedinoj točki, ali možemo uočiti kakve sve vrijednosti rješenja mogu poprimiti, možemo odrediti tok rješenja, uočiti ograničenost i periodičnost rješenja i slično.

Pri crtanju faznog dijagrama važno je ucrtati sve tipove orbita, odnosno sve karakteristične orbite i njihove orijentacije. Crtanje započinjemo određivanjem kritičnih točaka sustava. Važno je također uočiti da se orbite sustava (3.1) ne mogu sjeći:

Teorem 3.1 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

i) Neka je $\boldsymbol{y}$ *rješenje sustava* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ *na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Tada je funkcija* $\overline{\boldsymbol{y}}\colon \langle a+h, b+h\rangle \to \mathbb{R}^n$ *definirana s* $\overline{\boldsymbol{y}}(x) = \boldsymbol{y}(x-h)$ *također rješenje istog sustava;*

ii) Ako dvije orbite sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ *imaju zajedničku točku, onda se one podudaraju.*

Dokaz.

i) Ako je $\boldsymbol{y}$ definirana na $\langle a, b\rangle$, očito je da će $\overline{\boldsymbol{y}}$ biti definirana na $\langle a+h, b+h\rangle$. Nadalje, za $x \in \langle a+h, b+h\rangle$ vrijedi

$$\overline{\boldsymbol{y}}'(x) = \boldsymbol{y}'(x-h) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(x-h)) = \boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{y}}(x))$$

pa je $\overline{\boldsymbol{y}}$ također rješenje zadanog sustava.

ii) Neka su zadane dvije orbite koje se sijeku u točki $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Tada postoje rješenja $\boldsymbol{y}$ i $\overline{\boldsymbol{y}}$ zadanog sustava kojima su slike jednake danim orbitama i postoje x_0, $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $\boldsymbol{y}(x_0) = \overline{\boldsymbol{y}}(\overline{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$.

Neka je $\langle \alpha, \omega\rangle$ maksimalni interval egzistencije rješenja $\overline{\boldsymbol{y}}$. Definiramo sada funkciju $\boldsymbol{z}\colon \langle \alpha + x_0 - \overline{x}_0, \omega + x_0 - \overline{x}_0\rangle$, sa $\boldsymbol{z}(x) = \overline{\boldsymbol{y}}(x - x_0 + \overline{x}_0)$. Prema tvrdnji i), funkcija $\boldsymbol{z}$ je također rješenje zadanog sustava. Primijetimo da je $\boldsymbol{z}(x_0) = \overline{\boldsymbol{y}}(\overline{x}_0) = \boldsymbol{y}(x_0)$. Kako su $\boldsymbol{y}$ i $\boldsymbol{z}$ rješenja istog inicijalnog problema, zbog jedinstvenosti rješenja imamo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ na $\langle \alpha + x_0 - \overline{x}_0, \omega + x_0 - \overline{x}_0\rangle$. Konačno, slike funkcija $\overline{\boldsymbol{y}}$ i $\boldsymbol{z}$, a samim tim i $\boldsymbol{y}$ su jednake, odnosno zadane orbite se podudaraju.

□

U nastavku ćemo (kao i u poglavlju o stabilnosti linearnih autonomnih sustava) s $\boldsymbol{\phi}(\cdot, \boldsymbol{y}^{(0)})$ označavati rješenje inicijalnog problema $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^{(0)}$. Dokažimo sada jedno važno svojstvo rješenja zadanog autonomnog sustava:

Teorem 3.2 (Svojstvo polugrupe) *Neka je $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ i neka je $\langle \alpha, \omega\rangle$ maksimalni interval egzistencije rješenja $\boldsymbol{\phi}(\cdot, \boldsymbol{y}_0)$ sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$. Tada vrijedi*

$$\boldsymbol{\phi}(x_1 + x_2, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{\phi}(x_1, \boldsymbol{\phi}(x_2, \boldsymbol{y}_0)) ,$$

za x_1, x_2 takve da je $x_2 \in \langle \alpha, \omega\rangle$, $x_1 + x_2 \in \langle \alpha, \omega\rangle$.

Dokaz. Neka je $x_2 \in \langle \alpha, \omega\rangle$. Definiramo funkciju $\boldsymbol{\psi}\colon \langle \alpha - x_2, \omega - x_2\rangle \to \mathbb{R}^n$ s $\boldsymbol{\psi}(x) = \boldsymbol{\phi}(x + x_2, \boldsymbol{y}_0)$. Prema teoremu 3.1 ona je rješenje promatranog sustava. Definiramo nadalje funkciju $\boldsymbol{z}$ sa $\boldsymbol{z}(x) = \boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{\phi}(x_2, \boldsymbol{y}_0))$. Tada je $\boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{\phi}(x_2, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{\psi}(0)$. Zbog jedinstvenosti rješenja inicijalnog problema je $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\psi}$ na $\langle \alpha - x_2, \omega - x_2\rangle$, odnosno za x iz tog intervala vrijedi

$$\boldsymbol{\phi}(x + x_2, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{\phi}(x_2, \boldsymbol{y}_0)) . \tag{3.2}$$

Uzmimo $x_1 \in \langle \alpha, \omega\rangle$ takav da je $x_1 + x_2 \in \langle \alpha, \omega\rangle$. Tada je $x_1 \in \langle \alpha - x_2, \omega - x_2\rangle$ pa zbog jednakosti (3.2) vrijedi

$$\boldsymbol{\phi}(x_1 + x_2, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{\phi}(x_1, \boldsymbol{\phi}(x_2, \boldsymbol{y}_0)) .$$

□

Ako je orbita autonomnog sustava slika periodičkog rješenja, očito je da je ta orbita zatvorena krivulja. S druge strane, ako imamo zatvorenu orbitu, nije posve jasno hoće li se prolasci kroz orbitu odvijati uvijek na posve isti način u vremenskom smislu, tj. hoće li orbita biti slika periodičkog rješenja. Međutim, tu tvrdnju možemo dokazati pomoću Svojstva polugrupe.

Teorem 3.3 *Ako je orbita sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ zatvorena krivulja, ona je slika periodičkog rješenja.*

Dokaz. Neka je $\boldsymbol{y}$ proizvoljno rješenje sustava čija je slika jednaka zadanoj orbiti. Kako je orbita zatvorena, rješenje je ograničeno pa se prema Teoremu o apriornim ocjenama može proširiti na čitav $\mathbb{R}$.

Neka je $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}(0)$. Nadalje, neka je $T > 0$ najmanji broj za koji je $\boldsymbol{y}(T) = \boldsymbol{y}_0$ (taj broj postoji jer bi u protivnom zadana orbita sadržavala kritičnu točku). Želimo dokazati da je $\boldsymbol{y}(x+T) = \boldsymbol{y}(x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Primijetimo da je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\phi}(\cdot, \boldsymbol{y}_0)$. Prema Teoremu 3.2 je

$$\boldsymbol{\phi}(x+T, \boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{\phi}(T, \boldsymbol{y}_0)) = \boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}_0) \ ,$$

odnosno $\boldsymbol{y}(x+T) = \boldsymbol{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. □

Neka je sada zadan sustav

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \ , \\ y' &= g(x,y) \ , \end{aligned}$$

s nepoznatim funkcijama $x = x(t)$, $y = y(t)$, pri čemu su f, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcije klase C^1. Fazni dijagram ovakvog sustava možemo nacrtati tako da iz njega eliminiramo varijablu t i dobijemo jednadžbe krivulja kojima pripadaju orbite. Konkretno, ako je (x,y) neko rješenje sustava, onda za $f(x,y) \neq 0$ vrijedi

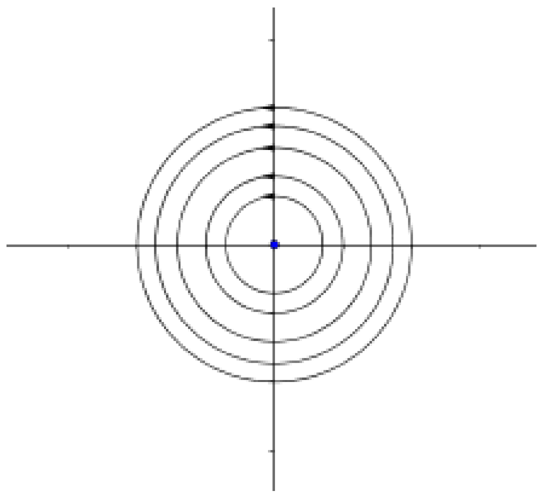
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \ . \tag{3.3}$$

Svaka od krivulja koja se dobiva rješavanjem jednadžbe (3.3) može se općenito sastojati od više orbita. Pretpostavimo da je dana krivulja $\mathcal{C}$ koja je rješenje jednadžbe (3.3). Neka je $\boldsymbol{z}_0 = (x_0, y_0)$ njezina točka, koja nije kritična točka sustava, za koju postoji $\delta_0 > 0$ i dvije različite orbite sustava, Γ_1 i Γ_2, tako da je za svaki $\delta \leq \delta_0$ krivulja $\mathcal{C} \cap B(\boldsymbol{z}_0, \delta)$ unija dviju krivulja Γ_δ^1 i Γ_δ^2 koje se ne sijeku i pritom je $\Gamma_\delta^1 \subset \Gamma_1$, $\Gamma_\delta^2 \subset \Gamma_2$. Tada, $\boldsymbol{z}_0$ pripada ili orbiti Γ_1 ili orbiti Γ_2. Neka je npr. $\boldsymbol{z}_0 \in \Gamma_1$ te neka je Γ_1 slika rješenja $(x,y) = (x(t), y(t))$. Tada imamo dva moguća slučaja:

1. Postoji $t_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $(x(t_0), y(t_0)) = \boldsymbol{z}_0$ i interval oblika $\langle a, t_0]$ ili $[t_0, b\rangle$ na kojem je vrijednost rješenja (x,y) konstantna. Tada je $(f(\boldsymbol{z}_0), g(\boldsymbol{z}_0)) = (f(x(t_0), y(t_0)), g(x(t_0), y(t_0))) = (x'(t_0), y'(t_0)) = (0,0)$, pa je $\boldsymbol{z}_0$ kritična točka sustava, čime smo došli do kontradikcije;

2. Orbita Γ_1 u točki $\boldsymbol{z}_0$ mijenja orijentaciju i to u trenutku t_0. Tada postoje intervali oblika $\langle a, t_0]$ i $[t_0, b\rangle$ takvi da su slike tih intervala po funkciji x jednake. Nadalje, postoje nizovi realnih brojeva $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ i $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ koji oba konvergiraju prema t_0 takvi da je $a_m \in \langle a, t_0\rangle$, $b_m \in \langle t_0, b\rangle$ te $x(a_m) = x(b_m)$, za svaki $m \in \mathbb{N}$. Prema Teoremu srednje vrijednosti tada za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji $c_m \in \langle a_m, b_m\rangle$ takav da je $x'(c_m) = 0$. Kako je funkcija x klase C^1 i $c_m \to t_0$, zaključujemo da je $x'(t_0) = 0$. Analogno je i $y'(t_0) = 0$ pa kao i u prošlom slučaju zaključujemo da je $(f(\boldsymbol{z}_0), g(\boldsymbol{z}_0)) = (0,0)$, odnosno da je $\boldsymbol{z}_0$ kritična točka sustava, čime opet dobivamo kontradikciju.

Konačno, možemo zaključiti da ako na krivulji dobivenoj iz jednadžbe (3.3) imamo više orbita, one su razdvojene kritičnim točkama. Također, orbita ni u jednom trenutku ne može promijeniti orijentaciju. Naime, neki dio orbite može biti slika različitih podintervala maksimalnog intervala egzistencije pripadnog rješenja, ali pri svakom prolasku kroz isti dio orbite i orijentacija je ista.



Slika 3.1

Primjer 3.2 *Promotrimo sustav*

$$\begin{aligned} x' &= -y \ , \\ y' &= x \ . \end{aligned}$$

Tada je $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ *pa separacijom varijabli i integriranjem dobivamo da orbite sustava pripadaju krivuljama oblika*

$$x^2 + y^2 = C \ , \quad C > 0 \ ,$$

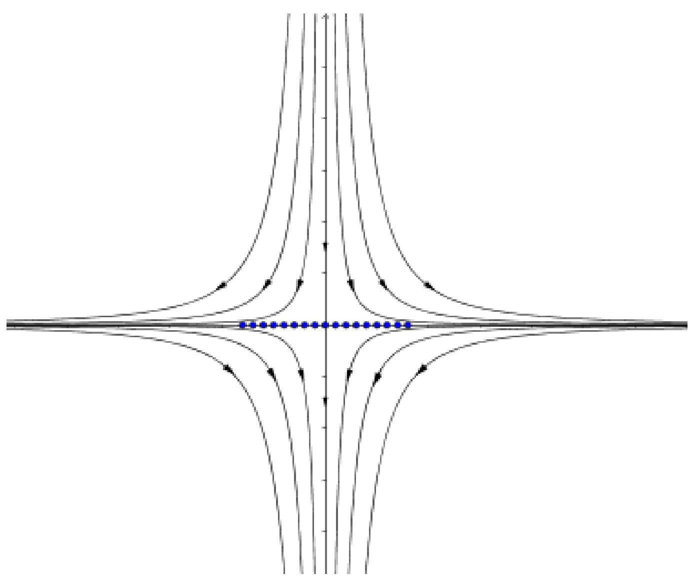
odnosno kružnicama sa središtem u ishodištu. Jedina kritična točka sustava je $(0,0)$*. Dakle, kružnice ne sadrže kritične točke pa su prema prethodnoj napomeni čitave kružnice orbite (slika 3.1). Orijentaciju orbita možemo očitati iz bilo koje od jednadžbi. Npr. iz druge jednadžbe vidimo da u prvom kvadrantu* y *koordinata točaka na orbiti mora rasti. Primjećujemo da sustav ima samo jedno konstantno rješenje i to je trivijalno rješenje. Sva ostala rješenja sustava su prema teoremu 3.3 periodička jer su im orbite zatvorene krivulje. Primijetimo da je sustav linearan. Iz Teorema o stabilnosti znamo da je trivijalno rješenje sustava stabilno, ali nije asimptotički stabilno. Iz faznog dijagrama također možemo očitati stabilnost trivijalnog rješenja. Naime, ako je zadan* $\varepsilon > 0$ *i* $\delta = \varepsilon$*, tada za* $0 < \|\boldsymbol{y}^{(0)}\| < \delta$ *promatramo orbitu koja* *prolazi kroz točku* $\boldsymbol{y}^{(0)}$. *Ona je kružnica te se očito čitava nalazi u* $B(0, \varepsilon)$. *To znači da je* $\|\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}^{(0)})\| < \varepsilon$ *za* $x \geq 0$, *odnosno trivijalno rješenje je stabilno. Kako se nijedna orbita, koja nije kritična točka, ne približava točki* $(0,0)$, *trivijalno rješenje sustava nije asimptotički stabilno.*

Primjer 3.3 *Pogledajmo i sustav*

$$x' = 2xy \ ,$$
$$y' = -4y^2 \ .$$

Da bismo pronašli kritične točke sustava, rješavamo sustav $2xy = 0$, $-4y^2 = 0$. *Kritične točke sustava su dakle sve točke oblika* $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$. *Primijetimo da nijedna od tih kritičnih točaka nije izolirana.*

Imamo $\frac{dy}{dx} = -2\frac{y}{x}$, *iz čega separacijom varijabli slijedi da netrivijalne orbite (za koje je* x, $y \neq 0$*) pripadaju krivuljama oblika* $y = \frac{C}{x^2}$, $C \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. *Iz druge jednadžbe vidimo da su te orbite orijentirane prema dolje.*
Preostaje promotriti y*-os. Na njoj se nalazi samo jedna kritična točka (ishodište) pa imamo još i orbite* $\{(0, y) : \ y > 0\}$ *i* $\{(0, y) : \ y < 0\}$. *One su također orijentirane prema dolje (slika 3.2).*



Slika 3.2

Primjer 3.4 *Promatramo sada sustav*

$$x' = y \ ,$$
$$y' = x - x^3 \ .$$

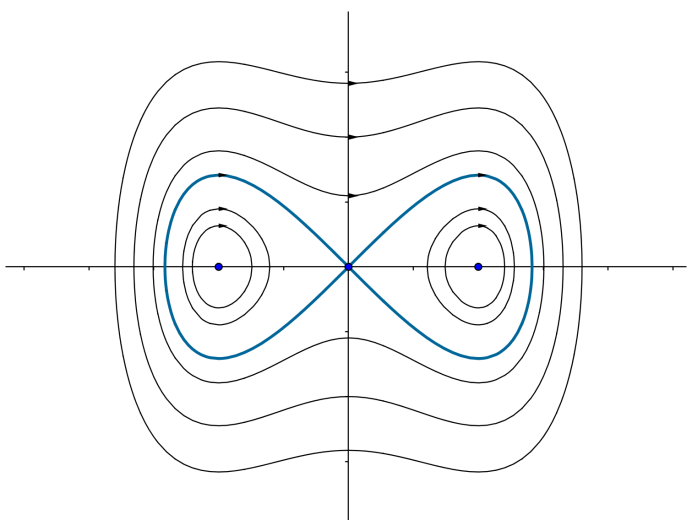
Tada imamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^3}{y} \ .$$

Separacijom varijabli i integriranjem dobivamo jednadžbe krivulja kojima pripadaju netrivijalne orbite sustava:

$$y^2 = x^2 - \frac{x^4}{2} + C \ , \quad C \in \mathbb{R} \ . \tag{3.4}$$

Za kritične točke sustava vrijedi $y = 0$ i $x - x^3 = 0$ pa imamo tri takve točke: $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$.



Slika 3.3

Krivulju tipa (3.4) koja prolazi kroz kritičnu točku $(0, 0)$ dobivamo za $C = 0$, tj. radi se o krivulji $y^2 = x^2 - \frac{x^4}{2}$. Primijetimo da je ta krivulja simetrična s obzirom na koordinatne osi. Dovoljno ju je promatrati u prvom kvadrantu, odnosno analiziramo pripadnu funkciju $x \mapsto \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{2}}$, $x \geq 0$. Vidimo da su joj nultočke 0 i $\sqrt{2}$, odnosno definirana je samo na $[0, \sqrt{2}]$. Maksimum postiže u točki 1, a vrijednost maksimuma je $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Simetrično nadocrtamo ostatak krivulje. Na krivulji $y^2 = x^2 - \frac{x^4}{2}$ imamo tri orbite:

$$(0, 0) \ , \ \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x \leq \sqrt{2}, \ y = \pm\sqrt{x^2 - \frac{x^4}{2}} \right\} \ ,$$

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ -\sqrt{2}\le x<0,\ y=\pm\sqrt{x^2-\frac{x^4}{2}}\right\}\ .$$

Orijentaciju netrivijalnih orbita možemo očitati iz prve jednadžbe sustava. S obzirom da su orbite ograničene, prema Teoremu o apriornim ocjenama rješenja koja one predstavljaju mogu se proširiti maksimalno, odnosno na čitav skup $\mathbb{R}$. *Primijetimo da ovaj put to možemo zaključiti samo iz faznog dijagrama, a ne i iz samog sustava jer desna strana sustava nije ograničena. Također primjećujemo da za takva rješenja* (x,y) *vrijedi* $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t),y(t))=(0,0)$.

Pogledajmo nadalje za koje je $C\in\mathbb{R}$ *skup zadan jednadžbom (3.4) neprazan. Stavimo supstituciju* $z=x^2$. *Ako je diskriminanta* $1+2C<0$, *vrijedi* $z-\frac{z^2}{2}+C<0$ *za svaki* $z\in\mathbb{R}$. *Dakle, krivulje možemo crtati samo za* $C\ge-\frac{1}{2}$. *Za* $C=-\frac{1}{2}$ *dobivamo ostale dvije kritične točke* $(-1,0)$ *i* $(1,0)$.

Nadalje razlikujemo dva slučaja:

i) Pretpostavimo da je $C\in\langle-\frac{1}{2},0\rangle$. *Imamo četiri realna rješenja bikvadratne jednadžbe* $x^2-\frac{x^4}{2}+C=0$, *a to su* $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{1+2C}}$. *Primijetimo da je*

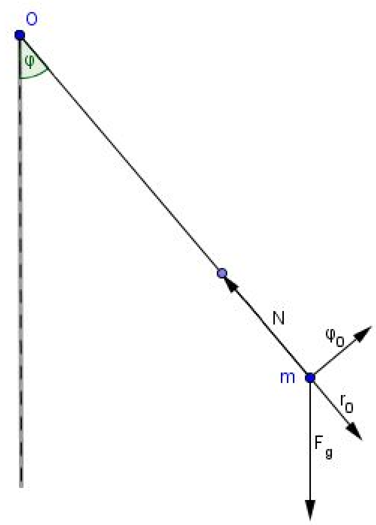
$$0<\sqrt{1-\sqrt{1+2C}}<1\ \ ,\ \ 1<\sqrt{1+\sqrt{1+2C}}<\sqrt{2}\ .$$

Krivulju u prvom kvadrantu crtamo samo između te dvije točke. Funkcija $x\mapsto\sqrt{x^2-\frac{x^4}{2}+C}$ *za* $x>0$ *postiže lokalni maksimum u* $x=1$. *Zaključujemo da se za ovako odabrani* C *krivulja* $y^2=x^2-\frac{x^4}{2}+C$ *sastoji od dva nepovezana dijela koja su simetrična jedan drugom u odnosu na* y*-os i predstavljaju dvije orbite. Svaka od tih orbita je simetrična s obzirom na* x*-os i zatvorena. Prema tome, te orbite pripadaju periodičkim rješenjima (slika 3.3).*

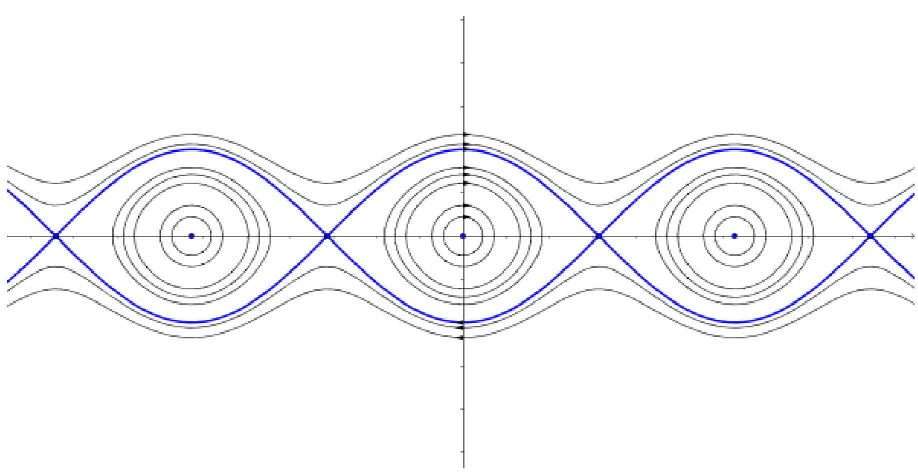
ii) Preostaje razmotriti slučaj kad je $C>0$. *Tada imamo dva realna rješenja jednadžbe* $x^2-\frac{x^4}{2}+C=0$ *i to su* $x_{1,2}=\pm\sqrt{1+\sqrt{1+2C}}$ *te krivulju crtamo između tih točaka. Krivulja* $y^2=x^2-\frac{x^4}{2}+C$ *je u ovom slučaju povezana i predstavlja jednu orbitu, koja je simetrična s obzirom na koordinatne osi. Zatvorena je pa je slika periodičkih rješenja. Funkcija* $x\mapsto\sqrt{x^2-\frac{x^4}{2}+C}$ *ima lokalne maksimume u* $x=\pm1$ *te lokalni minimum u* $x=0$ *pa koristeći tu činjenicu možemo detaljnije skicirati orbitu (slika 3.3).*

Pomoću faznog dijagrama sustava možemo analizirati ponašanje rješenja za neki zadani početni uvjet. Neka je npr. vrijednost rješenja u $t=0$ *točka* $(\frac{1}{2},\sqrt{\frac{7}{32}})$. *Lako je provjeriti da ta točka pripada orbiti* $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0<x\le\sqrt{2},\ y=\pm\sqrt{x^2-\frac{x^4}{2}}\right\}$. *Prema tome, znamo da je* $\lim_{t\to\pm\infty}(x(t),y(t))=(0,0)$. *Nadalje funkcija* x *raste na*

intervalu $\langle -\infty, a\rangle$ *za neki* $a > 0$ *(ne možemo ga odrediti iz faznog dijagrama) do maksimalne vrijednosti* $\sqrt{2}$*, te nakon toga pada i približava se nuli kad* $t \to +\infty$*. Funkcija* x *je strogo pozitivna. S druge strane, funkcija* y *raste na intervalu* $\langle -\infty, b\rangle$ *do maksimalne vrijednosti* $\frac{\sqrt{2}}{2}$*. Znamo da je* $x(b) = 1$ *i* $0 < b < a$*. Također je* $y(a) = 0$*. Nakon* $t = b$ *funkcija* y *pada na intervalu* $\langle b, c\rangle$*, gdje je* $c > a$*, do minimalne vrijednosti* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$*, a zatim opet raste i približava se nuli kad* $t \to +\infty$*.*



Slika 3.4



Slika 3.5

Primjer 3.5 *Sad proučavamo gibanje matematičkog njihala. Masa m spojena je na štap duljine ℓ zanemarive mase (slika 3.4). Štap može slobodno rotirati oko objesišta O. Na masu m djeluju sila teža $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_g$ i napetost štapa $\overrightarrow{\boldsymbol{N}}$ pa jednadžba gibanja glasi (v. npr. kolegij "Metode matematičke fizike")*

$$m\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\boldsymbol{F}}_g + \overrightarrow{\boldsymbol{N}} \; .$$

U cilindričkim koordinatama ta jednadžba glasi

$$m\left[(r'' - r(\varphi')^2)\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0 + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\varphi')\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}_0\right] = mg(\cos\varphi\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0 - \sin\varphi\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}_0) - N\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0 \; .$$

Kako je r konstanta funkcija, odnosno $r(t) = \ell$, uz vektor $\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}_0$ imamo

$$m\ell\varphi'' = -mg\sin\varphi \; .$$

Sada skaliramo vrijeme, odnosno uvodimo supstituciju $\varphi(t) = x(\tau)$, gdje je $\tau = \sqrt{\frac{g}{\ell}}t$. Tada je $x''(\tau) = -\sin x(\tau)$, pri čemu smo označili $x'(\tau) = \frac{dx}{d\tau}(\tau)$. Stavimo još $y = x'$ pa dobivamo sustav

$$\begin{aligned} x' &= y \; , \\ y' &= -\sin x \; . \end{aligned}$$

Poznato je još da je $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = r'\overrightarrow{\boldsymbol{r}}_0 + (r\varphi')\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}_0 = (\ell\varphi')\overrightarrow{\boldsymbol{\varphi}}_0$. Prema tome, $\|\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\| = \ell|\varphi'|$. Dakle, točka (x, y) u faznom dijagramu odgovara položaju njihala (kutu) i njegovoj brzini (do na multiplikativnu konstantu).

Iz $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{y}$ dobivamo

$$y^2 = 2\cos x + C \; . \tag{3.5}$$

Kritične točke sustava su oblika $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ i one odgovaraju slučaju kad masa stoji u najvišoj ili najnižoj točki, i brzina joj je nula.

Orbitu koja spaja kritične točke $(-\pi, 0)$ i $(\pi, 0)$ određujemo uvrštavanjem tih točaka u jednadžbu (3.5). Dobivamo $C = 2$. Radi se zapravo o dvije orbite koje zadovoljavaju to svojstvo, i one su simetrične s obzirom na x-os. Svaka od orbita je simetrična s obzirom na y-os. Zbog periodičnosti krivulja, za svaki C dovoljno je proučavati orbite za koje je $x \in [-\pi, \pi]$. Krivulje su neprazni skupovi ako je $y^2 = 2\cos x + C \geq 0$ za barem jedan x. Dakle, trebamo imati rješenje nejednadžbe $\cos x \geq -\frac{C}{2}$, a to imamo za $-\frac{C}{2} \leq 1$, odnosno $C \geq -2$.

Ako je $C \in \langle -2, 2\rangle$, krivulja (3.5) siječe x-os u dvije točke iz intervala $[-\pi, \pi]$, koje su međusobno simetrične. Krivulja je zatvorena i simetrična s obzirom na koordinatne osi. Predstavlja naravno periodička rješenja.

Za $C > 2$, krivulja (3.5) nema presjek s x-osi. Funkcija $y(x) = \sqrt{2\cos x + C}$ ima lokalni minimum u $x = \pm\pi$ i lokalni maksimum u $x = 0$.

Dijagram koji smo nacrtali za $x \in [-\pi, \pi]$ periodički proširimo. Krivulja (3.5) za $C = 2$ dakle razdvaja dva različita tipa orbita pa ju možemo zvati separatorom.

Ako odaberemo točku početnog kuta i brzine na nekoj orbiti koja je unutar separatora (slika 3.5), gibanje je periodičko i odvija se između dva položaja, simetrična s obzirom na najniži položaj njihala. Pritom, njihalo ni u jednom trenutku ne dostiže najviši mogući položaj.

Ako odaberemo početne podatke na separatoru, pripadna rješenja su zbog ograničenosti orbita, prema Teoremu o apriornim ocjenama, definirana na $\mathbb{R}$ i njihalo će se za $t \to \pm\infty$ približavati asimptotički prema najvišem položaju, ali ga nikad neće dostići.

Ako je točka početnog kuta i brzine izvan separatora, gibanje je opet periodičko. Naime, orbite nisu zatvorene, ali pomak kuta za $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ predstavlja fizikalno isti položaj pa ipak dobivamo periodičko gibanje. Pritom će njihalo periodički dostizati najviši mogući položaj, odnosno sve moguće položaje. Drugim riječima, gibanje je kružno.

Slika 3.6

Primjer 3.6 *Sada promatramo poznati problem iz biologije, tzv. plijen-grabežljivac model. S $g = g(t)$ označavamo funkciju koja prati broj grabežljivaca u nekoj populaciji. S druge strane, $p = p(t)$ je funkcija koja opisuje broj životinja u populaciji koje su plijen. Postavljamo sljedeći sustav diferencijalnih jednadžbi koji opisuje međusobnu ovisnost te dvije veličine:*

$$p' = \alpha p \left(1 - \frac{p}{k}\right) - \beta g p \ ,$$

$$g' = \gamma g p - \delta g \ ,$$

gdje su α, β, γ, $\delta > 0$ konstante. Konstanta $k > 0$ predstavlja kapacitet okoliša. Primijetimo da je prva jednadžba nastala proširenjem logističke jednadžbe

$$p' = \alpha p \left(1 - \frac{p}{k}\right)$$

koja opisuje rast populacije plijena u okolišu u kojem nema grabežljivaca. Kritične točke te jednadžbe su $p = 0$ i $p = k$. Na slici 3.6 vidimo fazni dijagram jednadžbe. Pritom nas naravno, zbog prirode problema, zanima samo dio dijagrama između točaka 0 i k.

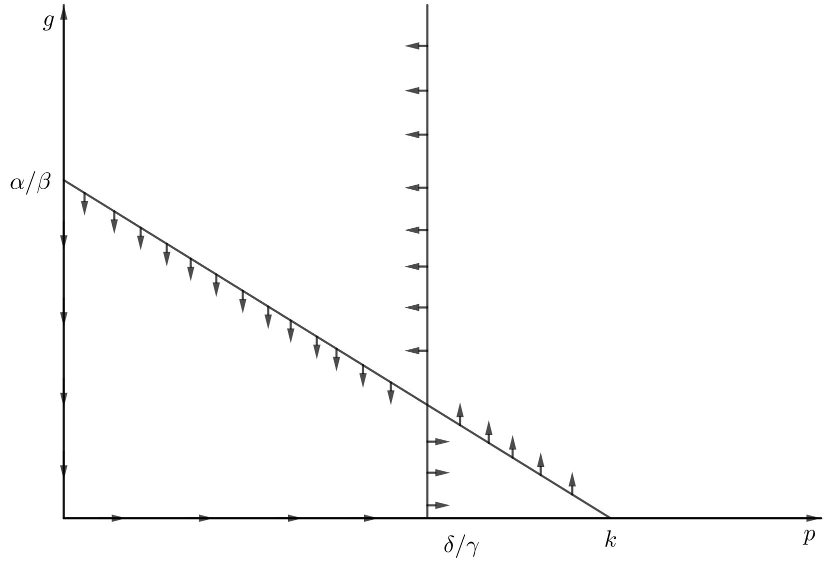
Odredimo sada kritične točke sustava. Za njih vrijedi

$$\begin{aligned} &\alpha p \left(1 - \frac{p}{k}\right) - \beta g p = 0 \\ &\gamma g p - \delta g = 0 \ . \end{aligned}$$

Rješenja tog sustava su točke $(p, g) \in \left\{(0,0), (k,0), \left(\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{\delta}{\gamma k}\right)\right)\right\}$. Dakle, imamo tri različite kritične točke, osim u slučaju $\delta = \gamma k$ kad imamo samo dvije kritične točke $(0,0)$ i $(k,0)$.

Crtanje faznog dijagrama za ovaj sustav metodom eliminacije vremenske varijable je prekomplicirano, kao i eksplicitno rješavanje sustava. O ponašanju orbita možemo ponešto naslutiti određivanjem točaka dijagrama u kojima je tangenta na pripadnu orbitu paralelna nekoj od osi dijagrama. Imamo da je $p' = 0$ ako i samo ako je $p = 0$ ili $g = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \frac{p}{k}\right)$, dok je $g' = 0$ za $g = 0$ i $p = \frac{\delta}{\gamma}$. Smjerove orbita u tim točkama vidimo na slici 3.7. Na temelju informacija o derivacijama rješenja sustava možemo nacrtati smjerove orbita i u ostalim područjima dijagrama iako je za to praktičnije iskoristiti neki program poput Matlaba. Te su nam informacije još uvijek nedovoljne da odredimo ponašanje orbita oko kritičnih točaka. Na kolegiju "Dinamički sustavi" vidjet ćemo da možemo odrediti tip kritične točke, u ovisnosti o parametrima sustava, tako da sustav prethodno lineariziramo.

U nastavku ćemo nacrtati fazne dijagrame nekoliko linearnih sustava. Pritom ćemo koristiti eksplicitna rješenja sustava jer je kod ovakvih sustava prekomplicirano koristiti metodu eliminacije nezavisne varijable. Proučit ćemo nekoliko različitih slučajeva, ovisno o predznacima svojstvenih vrijednosti matrice sustava. Iz Teorema o stabilnosti 2.9 znamo da svojstvene vrijednosti, posebno predznaci njihovih realnih dijelova, znatno utječu na stabilnost rješenja. Vidjet ćemo da je stabilnost trivijalnog rješenja moguće očitati i iz faznog dijagrama.



Slika 3.7

Primjer 3.7 *Za početak promatramo sustav*

$$x' = 3x + y \; ,$$
$$y' = 2x + 2y \; .$$

Sustav je linearan pa mu možemo naći opće rješenje. Svojstvene vrijednosti matrice sustava su 1 i 4. Pripadni svojstveni vektori su redom

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \; , \; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; .$$

Prema tome, opće rješenje sustava je

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} \; ,$$
$$y(t) = -2C_1 e^t + C_2 e^{4t} \; .$$

Jedina kritična točka sustava je $(0,0)$*. Pogledajmo rješenja za koja je* $C_1 = 0$*. Tada je* $x(t) = y(t)$ *pa orbite tih rješenja leže na pravcu* $y = x$ *(slika 3.8). Kritična točka razdvaja orbite rješenja za* $C_2 > 0$ *(nalaze se u prvom kvadrantu) i* $C_2 < 0$*. Analogno, ako je* $C_2 = 0$*, imamo* $y(t) = -2x(t)$*, pa odgovarajuće orbite pripadaju pravcu* $y = -2x$*. Orbita rješenja za* $C_1 > 0$ *pripada četvrtom kvadrantu.*

U ostalim slučajevima možemo primijetiti sljedeće:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} e^t(C_1 + C_2 e^{3t}) = \begin{cases} +\infty \; , & C_2 > 0 \\ -\infty \; , & C_2 < 0 \end{cases} \; ,$$
$$\lim_{t\to-\infty} x(t) = 0 \; ,$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty} e^t(-2C_1 + C_2e^{3t}) = \begin{cases} +\infty\ , & C_2 > 0 \\ -\infty\ , & C_2 < 0 \end{cases} \quad , \\
&\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0\ .
\end{aligned}
$$

Ispitajmo još približavaju li se orbite u beskonačnosti nekim pravcima. Računamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{-2C_1e^t + C_2e^{4t}}{C_1e^t + C_2e^{4t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{-2C_1e^{-3t} + C_2}{C_1e^{-3t} + C_2} = 1\ , \\
\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t\to-\infty} \frac{-2C_1e^t + C_2e^{4t}}{C_1e^t + C_2e^{4t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{-2C_1 + C_2e^{3t}}{C_1 + C_2e^{3t}} = -2\ .
\end{aligned}
$$

Dakle, kad $t \to +\infty$, orbite se približavaju pravcu $y = x$, a za $t \to -\infty$ približavaju se pravcu $y = -2x$. Na slici 3.8 se to svojstvo ne uočava jer se konvergencija počinje primjećivati tek za "jako velike" t.

Također, iz ponašanja rješenja kad $t \to +\infty$ vidimo da orbite desno od pravca $y = -2x$ odgovaraju rješenjima sustava za koje je $C_2 > 0$. Da bismo odredili ovisnost o konstanti C_1, zapišimo rješenja u obliku

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1e^t + C_2e^{4t} = e^{4t}(C_1e^{-3t} + C_2)\ , \\
y(t) &= -2C_1e^t + C_2e^{4t} = e^{4t}(-2C_1e^{-3t} + C_2)\ .
\end{aligned}
$$

Kad $t \to -\infty$, predznak funkcija x i y ovisi o konstanti C_1. Za $C_1 > 0$ je funkcija x pozitivna, a y negativna kad je orbita u okolini ishodišta i taj slučaj odgovara orbitama koje su ispod pravca $y = x$.

Primjer 3.8 *Pogledajmo i sustav*

$$
\begin{aligned}
x' &= -3x - y \\
y' &= -2x - 2y\ .
\end{aligned}
$$

Primjećujemo vezu sa sustavom iz prethodnog primjera, odnosno da su pripadne matrice sustava međusobno suprotne. Stavimo stoga supstituciju $u(t) = x(-t)$, $v(t) = y(-t)$.

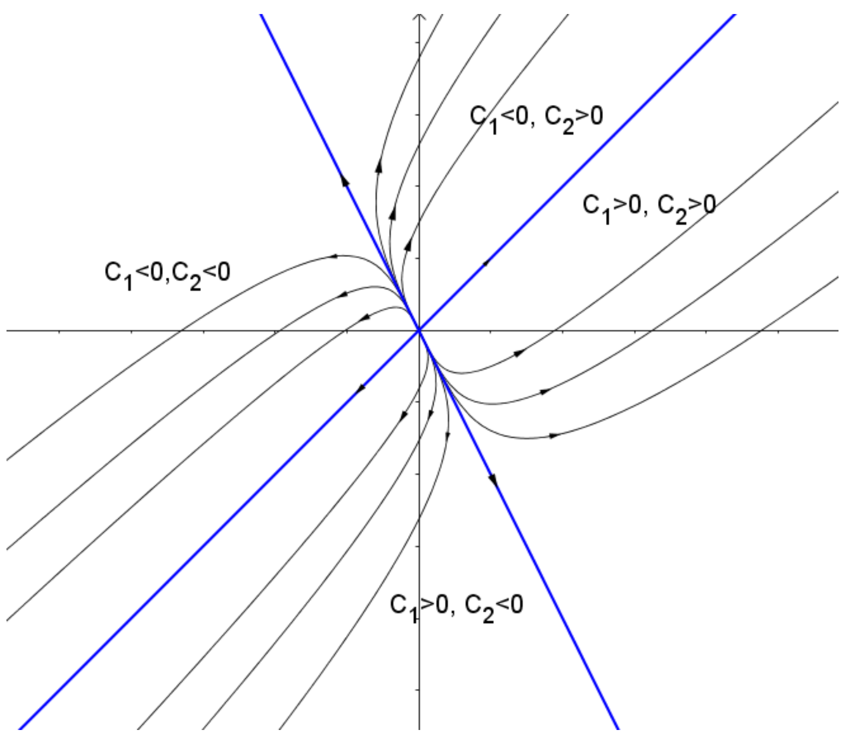
Tada je

$$
\begin{aligned}
u'(t) &= -x'(-t) = 3x(-t) + y(-t) = 3u(t) + v(t)\ , \\
v'(t) &= -y'(-t) = 2x(-t) + 2y(-t) = 2u(t) + 2v(t)\ .
\end{aligned}
$$

Prema tome, fazni dijagram koji sadrži orbite koje su slike rješenja sustava za funkcije u i v jednak je faznom dijagramu iz prethodnog primjera. S obzirom da se *funkcije (x, y) razlikuju od funkcija (u, v) samo u orijentaciji vremena, fazni dijagram dobivamo pomoću dijagrama iz prethodnog primjera tako da samo promijenimo orijentaciju svake orbite.*

Iz faznog dijagrama zadanog sustava (koji se dobiva promjenom orijentacija na slici 3.8) možemo očitati i da je $(0,0)$ stabilna kritična točka, odnosno da je trivijalno rješenje sustava stabilno. Naime, odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i bilo koju točku $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ unutar kruga $B(0,\varepsilon)$ te uočimo orbitu kojoj ta točka pripada. Orbita je npr. slika rješenja $\boldsymbol{\phi}(\cdot, x_0, y_0)$. Pripadna desna poluorbita je skup $\{\boldsymbol{\phi}(t, x_0, y_0) : t \geq 0\}$, odnosno dio orbite koji se nalazi nakon točke (x_0, y_0), pri čemu uzimamo u obzir orijentaciju orbite. Iz faznog dijagrama naslućujemo da je svaka, tako izabrana, desna poluorbita u cijelosti sadržana unutar kruga $B(0,\varepsilon)$ pa je trivijalno rješenje sustava stabilno na $[0, +\infty\rangle$ (zbog oblika orbita u ovom primjeru ipak ne možemo s potpunom sigurnošću očitati stabilnost iz faznog dijagrama). Kako se sve orbite približavaju k $(0,0)$ za $t \to +\infty$, trivijalno rješenje je i globalno asimptotički stabilno.

Puno je lakše očitati stabilnost rješenja u primjeru 3.7. Ako odaberemo proizvoljan $\delta > 0$ i proizvoljnu točku $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ unutar $B(0,\delta)$, iz dijagrama na slici 3.8 vidimo da je $\lim_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{\phi}(t, x_0, y_0)\| = +\infty$ pa je očito da se desna poluorbita neće zadržati unutar nekog kruga oko ishodišta za svaki $t > 0$. Prema tome trivijalno rješenje sustava nije stabilno na $[0, +\infty\rangle$.



Slika 3.8

Primjer 3.9 *Zadan je sustav*

$$x' = 5x - 7y\ ,$$
$$y' = 2x - 4y\ .$$

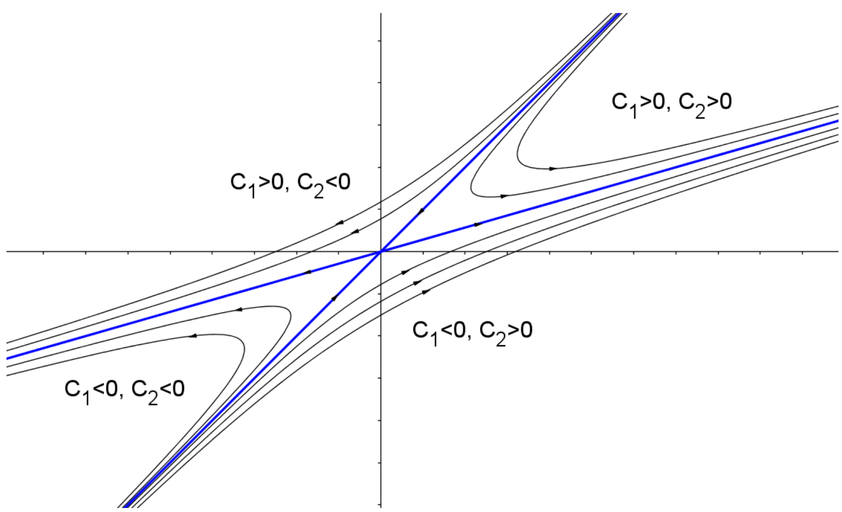
Svojstvene vrijednosti matrice sustava su $\lambda_1 = -2$ *i* $\lambda_2 = 3$. *Pripadni svojstveni vektori su*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}\ .$$

Opće rješenje sustava je prema tome dano s

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + 7C_2 e^{3t}\ ,$$
$$y(t) = C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{3t}\ .$$

Jedina kritična točka je $(0,0)$. *Rješenja za koja je* $C_1 = 0$ *oblika su* $x(t) = 7C_2e^{3t}$, $y(t) = 2C_2e^{3t}$, $C_2 \in \mathbb{R}$ *pa pripadne orbite leže na pravcu* $y = \frac{2}{7}x$. *Analogno, kad je* $C_2 = 0$, *dobivamo orbite na pravcu* $y = x$. *Primijetimo da su orbite na pravcu* $y = \frac{2}{7}x$ *orijentirane od ishodišta, dok su one na pravcu* $y = x$ *orijentirane prema ishodištu. Već i iz orijentacija tih orbita možemo zaključiti da trivijalno rješenja sustava nije stabilno, s obzirom da postoje orbite koje se udaljavaju od ishodišta prema beskonačnosti.*



Slika 3.9

Ponašanje ostalih orbita možemo odrediti iz sljedećih činjenica:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \begin{cases} +\infty, & C_2 > 0 \\ -\infty, & C_2 < 0 \end{cases}\ ,$$

$$
\lim_{t\to-\infty} x(t) = \begin{cases} +\infty, & C_1 > 0 \\ -\infty, & C_1 < 0 \end{cases} ,
$$
$$
\lim_{t\to+\infty} y(t) = \begin{cases} +\infty, & C_2 > 0 \\ -\infty, & C_2 < 0 \end{cases} ,
$$
$$
\lim_{t\to-\infty} y(t) = \begin{cases} +\infty, & C_1 > 0 \\ -\infty, & C_1 < 0 \end{cases} ,
$$

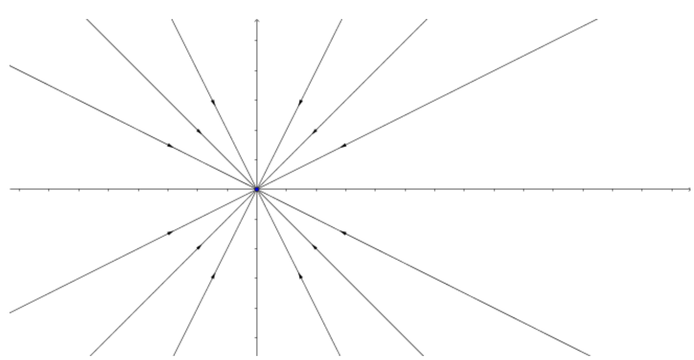
$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1e^{-2t} + 2C_2e^{3t}}{C_1e^{-2t} + 7C_2e^{3t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1e^{-5t} + 2C_2}{C_1e^{-5t} + 7C_2} = \frac{2}{7} , \\
\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t\to-\infty} \frac{C_1e^{-2t} + 2C_2e^{3t}}{C_1e^{-2t} + 7C_2e^{3t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{C_1 + 2C_2e^{5t}}{C_1 + 7C_2e^{5t}} = 1 .
\end{aligned}
$$

Zaključujemo da se orbite za $t \to +\infty$ približavaju prema pravcu $y = \frac{2}{7}x$, a za $t \to -\infty$ prema pravcu $y = x$. Ti pravci dijele orbite na četiri tipa orbita (slika 3.9). Na temelju ponašanja rješenja u beskonačnosti, možemo odrediti kojem tipu orbite odgovara koje rješenje, ovisno o predznacima konstanti C_1 i C_2.

Primjer 3.10 *Pogledajmo i sustav*

$$
\begin{aligned}
x' &= -2x , \\
y' &= -2y .
\end{aligned}
$$

Kritična točka sustava je $(0,0)$. Iz sustava slijedi $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, iz čega dobivamo $y = Cx$. Dakle, sve ostale orbite leže na pravcima koji prolaze kroz ishodište fazne ravnine (slika 3.10) i iz sustava vidimo da su usmjerene prema ishodištu. Trivijalno rješenje je očito globalno asimptotički stabilno.

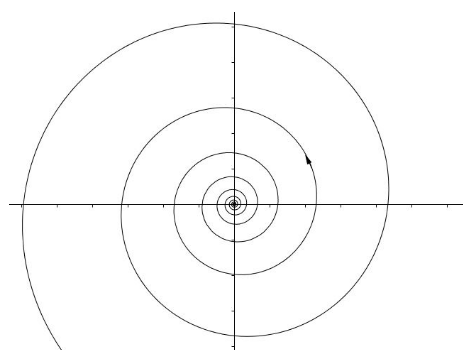


Slika 3.10

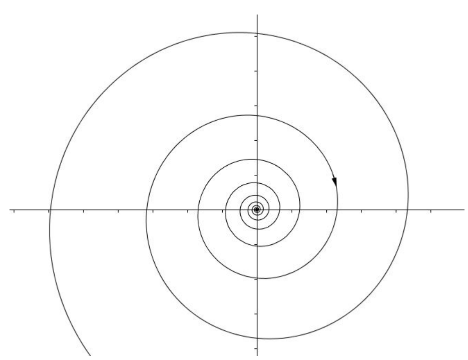
Primjer 3.11 *Zadan je sustav*

$$x' = ax + by \ ,$$
$$y' = -bx + ay \ .$$

Promatrat ćemo slučajeve kad je $a \neq 0$ *(kad je* $a = 0$, $b \neq 0$, *fazni dijagram se sastoji od koncentričnih kružnica, a za* $a = b = 0$ *svaka točka fazne ravnine je kritična točka). Svojstvene vrijednosti matrice sustava su* $\lambda_{1,2} = a \pm bi$. *Iz Teorema o stabilnosti znamo da je trivijalno rješenje globalno asimptotički stabilno na* $[0, +\infty\rangle$ *ako je* $a < 0$, *odnosno nestabilno ako je* $a > 0$.



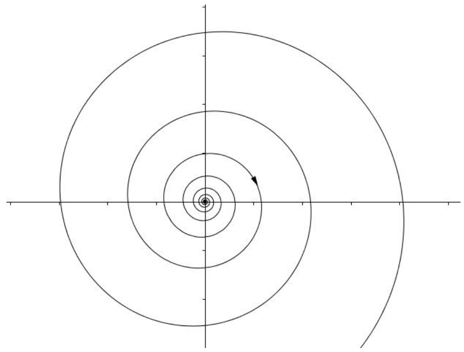
Slika 3.11: $a > 0$, $b < 0$



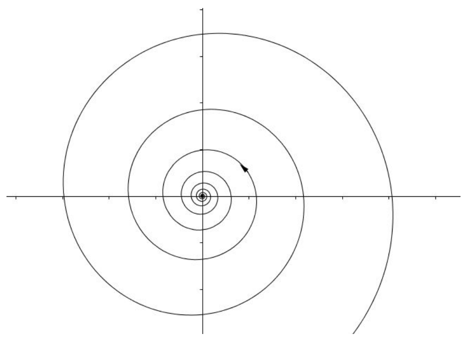
Slika 3.12: $a < 0$, $b > 0$

Da bismo nacrtali fazni dijagram, prijeđimo na polarne koordinate. Neka je

$$x(t) = r(t) \cos \varphi(t) \ ,$$



Slika 3.13: $a > 0$, $b > 0$



Slika 3.14: $a < 0$, $b < 0$

$$y(t) = r(t) \sin \varphi(t) \ .$$

Tada imamo $(r(t))^2 = (x(t))^2 + (y(t))^2$. *Deriviranjem po* t *dobivamo*

$$\begin{aligned} r(t)r'(t) &= x(t)x'(t) + y(t)y'(t) \\ &= x(t)[ax(t) + by(t)] + y(t)[-bx(t) + ay(t)] \\ &= a[(x(t))^2 + (y(t))^2] \end{aligned}$$

pa za $r(t) \neq 0$ *imamo*

$$r'(t) = ar(t) \ .$$

Analogno iz

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

deriviranjem dobivamo

$$\frac{\varphi'(t)}{\cos^2 \varphi(t)} = \frac{1}{(x(t))^2}[(-bx(t) + ay(t))x(t) - (ax(t) + by(t))y(t)] \ ,$$

odnosno

$$\frac{\varphi'(t)}{\cos^2 \varphi(t)} = \frac{-b((x(t))^2 + (y(t))^2)}{(r(t))^2 \cos^2 \varphi(t)}$$

pa je $\varphi'(t) = -b$.

Dakle, rješenje sustava možemo zapisati kao

$$r(t) = Ce^{at} \ , \ \ \varphi(t) = -bt + D \ ,$$

gdje su $C > 0$ *i* $D \in \mathbb{R}$ *konstante. Orbite su zbog oblika funkcije* φ *spirale. Razlikujemo četiri slučaja, ovisno o predznacima koeficijenata a i b (slika 3.11-3.14).*

3.2 Stabilnost kritičnih točaka i Ljapunovljeva funkcija

Dosad smo promatrali stabilnost trivijalnog rješenja autonomnog homogenog linearnog sustava. Sad ćemo poopćiti definiciju stabilnosti, odnosno definirat ćemo stabilnost kritične točke proizvoljnog autonomnog sustava, za koju znamo da je slika konstantnog rješenja sustava. Neka je $\boldsymbol{y}_0$ kritična točka sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$. Ona je ujedno rješenje inicijalnog problema $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$. Zanima nas dakle ponašanje rješenja inicijalnih problema $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{z}$, za točke $\boldsymbol{z}$ koje su "bliske" točki $\boldsymbol{y}_0$ i $x \geq 0$.

Definicija 3.4 *Neka je zadan sustav* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ *i neka je* $\boldsymbol{y}_0$ *njegova kritična točka. Kažemo da je* $\boldsymbol{y}_0$

i) stabilna kritična točka (na intervalu $[0, +\infty\rangle$*) ako za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *takav da za svaki* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *za koji je* $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| < \delta$ *i svaki* $x \in [0, +\infty\rangle$ *vrijedi* $\|\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}_0\| < \varepsilon$*;*

ii) nestabilna ako nije stabilna;

iii) (lokalno) asimptotički stabilna ako je stabilna i postoji $a > 0$ *takav da za* $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| < a$ *vrijedi* $\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{y}_0$*, kad* $x \to +\infty$*;*

iv) globalno asimptotički stabilna ako je stabilna i ako za svaki $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ *vrijedi* $\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{y}_0$*, kad* $x \to +\infty$.

Primijetimo da u definiciji stabilnosti imamo da su za početne točke $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{y}_0, \delta)$ pripadne desne orbite unutar $B(\boldsymbol{y}_0, \varepsilon)$, odnosno da su pripadna rješenja ograničena na desnom maksimalnom intervalu egzistencije (u odnosu na $x = 0$). Poznato je da je desni maksimalni interval oblika $[0, \omega\rangle$, a iz Teorema o apriornim ocjenama proizlazi da je $\omega = +\infty$. Stoga je definicija stabilnosti korektna. Također, prisjetimo se da kod autonomnih homogenih linearnih sustava možemo imati samo globalnu asimptotičku stabilnost, a ne i lokalnu.

U određivanju stabilnosti kritične točke može nam pomoći Ljapunovljeva teorija stabilnosti koja se temelji na egzistenciji Ljapunovljeve funkcije.

Definicija 3.5 *Ljapunovljeva funkcija sustava* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ *na otvorenom skupu* U *oko kritične točke* $\boldsymbol{y}_0$ *je funkcija* $V\colon U \to \mathbb{R}$ *klase* C^1 *za koju vrijedi*

i) $V(\boldsymbol{y}_0) = 0$ *;*

ii) $V(\boldsymbol{y}) > 0, \quad \boldsymbol{y} \in U \backslash \{\boldsymbol{y}_0\}$ *;*

iii) $\nabla V(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \leq 0, \quad \boldsymbol{y} \in U$ *.*

Primijetimo da je $\nabla V(\boldsymbol{y}_0) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0) = 0$ tako da nejednakost u trećem uvjetu ne možemo nikad zamijeniti sa strogom nejednakošću. Međutim, ako uz i) i ii) vrijedi

$$iii) \ \ \nabla V(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) < 0 \ , \quad \boldsymbol{y} \in U \backslash \{\boldsymbol{y}_0\} \ ,$$

funkciju V zovemo stroga Ljapunovljeva funkcija.

Neka je $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ i pretpostavimo da je x iz domene funkcije $\boldsymbol{\phi}(\cdot, \boldsymbol{y})$ takav da je $\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) \in U$. Tada je prema nejednakosti iii)

$$\frac{d}{dx} V(\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y})) = \nabla V(\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y})) \cdot \frac{d}{dx} \boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) = \nabla V(\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y})) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y})) \leq 0 \ .$$

Zaključujemo da je V padajuća na dijelu pripadne orbite koji se nalazi unutar U. Ako je V stroga Ljapunovljeva funkcija, analogno pokazujemo da je V strogo padajuća na dijelu orbite koji se nalazi unutar U.

Sada možemo iskazati Ljapunovljev teorem stabilnosti:

Teorem 3.4 (Ljapunov) *Neka postoji Ljapunovljeva funkcija* V *sustava* $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ *na otvorenom skupu* U *oko kritične točke* $\boldsymbol{y}_0$*. Tada je kritična točka* $\boldsymbol{y}_0$ *stabilna na* $[0, +\infty\rangle$*. Ako je* V *stroga Ljapunovljeva funkcija, onda je* $\boldsymbol{y}_0$ *(lokalno) asimptotički stabilna.*

Dokaz. Neka je zadan proizvoljan $\varepsilon > 0$. Tada postoji $0 < \overline{\varepsilon} \leq \varepsilon$ takav da je $\overline{B(\boldsymbol{y}_0, \overline{\varepsilon})} \subset U$. Definiramo

$$m := \min\{V(\boldsymbol{y}) : \ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| = \overline{\varepsilon}\} \ .$$

Primijetimo da, zbog kompaktnosti skupa $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \ \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| = \overline{\varepsilon}\}$, taj minimum postoji. Kako je $V(\boldsymbol{y}) > 0$, za $\boldsymbol{y} \in U \backslash \{\boldsymbol{y}_0\}$, zaključujemo da je $m > 0$.

Nadalje, definiramo skup

$$A = \left\{\boldsymbol{y} \in U : \ V(\boldsymbol{y}) < \frac{m}{2}\right\} \cap B(\boldsymbol{y}_0, \overline{\varepsilon}) \ .$$

Primijetimo da je A kao presjek praslike otvorenog skupa po neprekidnoj funkciji i otvorene kugle također otvoren skup. Također je i $\boldsymbol{y}_0 \in A$, s obzirom da je $V(\boldsymbol{y}_0) = 0$.

Prema tome, oko $\boldsymbol{y}_0$ možemo opisati kuglu $B(\boldsymbol{y}_0, \delta) \subset A$, za neki $\delta > 0$. Sada uzmimo $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{y}_0, \delta)$. Gledamo desnu poluorbitu $\{\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) : x \geq 0\}$. Dio te poluorbite koji se nalazi u $B(\boldsymbol{y}_0, \bar{\varepsilon})$ nalazi se i unutar skupa U pa funkcija V pada na tom dijelu poluorbite. Kad bi taj dio orbite izašao izvan skupa $B(\boldsymbol{y}_0, \bar{\varepsilon})$, dosegnuo bi u nekom trenutku $x = x_0$ točku s ruba te kugle, gdje su vrijednosti funkcije V veće ili jednake m. Međutim, od trenutka $x = 0$ do trenutka $x = x_0$, funkcija V na promatranoj orbiti postiže vrijednosti manje od $\frac{m}{2}$ (jer orbita počinje u točki u kojoj je vrijednost od V manja od $\frac{m}{2}$ i nakon toga V pada) pa zbog neprekidnosti funkcije V dobivamo kontradikciju, odnosno zaključujemo da desna poluorbita rješenja $\boldsymbol{\phi}(\cdot, \boldsymbol{y})$ ne može izaći iz $B(\boldsymbol{y}_0, \bar{\varepsilon})$. Prema tome, za $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{y}_0, \delta)$ je $\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) \in B(\boldsymbol{y}_0, \bar{\varepsilon}) \subseteq B(\boldsymbol{y}_0, \varepsilon)$, $x \geq 0$ pa je $\boldsymbol{y}_0$ stabilna kritična točka.

Sad ćemo pretpostaviti da je V stroga Ljapunovljeva funkcija. Odaberimo neki $\varepsilon > 0$, takav da je $\overline{B(\boldsymbol{y}_0, \varepsilon)} \subset U$. Prema prethodnom dijelu dokaza, znamo da postoji $\delta > 0$ takav da za $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\| < \delta$ vrijedi $\|\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{y}_0\| < \varepsilon$, $x \geq 0$.

Dokazat ćemo da za $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{y}_0, \delta)$, $\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{y}_0$, kad $x \to +\infty$. Pretpostavimo suprotno, da postoji neki $\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{y}_0, \delta)$ za koji ta tvrdnja ne vrijedi. Tada postoji niz $x_k \to +\infty$ takav da niz $(\boldsymbol{\phi}(x_k, \boldsymbol{y}))_{k \in \mathbb{N}}$ ne konvergira prema $\boldsymbol{y}_0$, odnosno takav da je $\boldsymbol{\phi}(x_k, \boldsymbol{y}) \in (B(\boldsymbol{y}_0, r))^C$, $k \in \mathbb{N}$, za neki $r > 0$. Kako je niz $(\boldsymbol{\phi}(x_k, \boldsymbol{y}))_{k \in \mathbb{N}}$ ograničen, postoji podniz koji konvergira prema $\boldsymbol{y}_1 \neq \boldsymbol{y}_0$. Označimo ga opet s $(\boldsymbol{\phi}(x_k, \boldsymbol{y}))_{k \in \mathbb{N}}$, radi jednostavnosti. Primijetimo da $\boldsymbol{y}_1$ ne može biti kritična točka, jer bi to bilo u kontradikciji s uvjetom iii) iz definicije stroge Ljapunovljeve funkcije. Točka $\boldsymbol{y}_1$ nalazi se u $\overline{B(\boldsymbol{y}_0, \varepsilon)} \subset U$. Uzmimo neki $t \geq 0$ takav da je $\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}_1) \in U$, za $0 \leq x \leq t$.

Imamo prvo, prema Svojstvu polugrupe, $\boldsymbol{\phi}(x_k + t, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\phi}(x_k, \boldsymbol{y}))$, $k \in \mathbb{N}$. Prema Kamkeovom teoremu je $\lim_k \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\phi}(x_k, \boldsymbol{y})) = \boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{y}_1)$. Kako je V strogo padajuća funkcija na dijelu orbite sustava koji je u U, imamo $V(\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{y}_1)) < V(\boldsymbol{\phi}(0, \boldsymbol{y}_1)) = V(\boldsymbol{y}_1)$. Također je $\lim_k V(\boldsymbol{\phi}(x_k + t, \boldsymbol{y})) = \lim_k V(\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{\phi}(x_k, \boldsymbol{y}))) = V(\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{y}_1))$ pa postoji neki $m \in \mathbb{N}$ za koji je $V(\boldsymbol{\phi}(x_m + t, \boldsymbol{y})) < V(\boldsymbol{y}_1)$.
S druge strane, postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $x_p > x_m + t$ pa imamo $V(\boldsymbol{\phi}(x_m + t, \boldsymbol{y})) > V(\boldsymbol{\phi}(x_p, \boldsymbol{y})) > V(\boldsymbol{y}_1)$, jer je V strogo padajuća na desnoj poluorbiti rješenja $\boldsymbol{\phi}(\cdot, \boldsymbol{y})$, i time smo dobili kontradikciju . □

Iz Ljapunovljevog teorema možemo ponekad zaključiti da je zadana kritična točka asimptotički stabilna, ali ne možemo precizno odrediti skup točaka koje su početne točke orbita koje se približavaju spomenutoj kritičnoj točki. Specijalno, pomoću Ljapunovljevog teorema ne možemo dokazati globalnu asimptotičku stabilnost. U tome nam ponekad može pomoći sljedeći teorem:

Teorem 3.5 (LaSalle) *Neka je V Ljapunovljeva funkcija sustava $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$ na ograničenom otvorenom skupu U oko kritične točke $\boldsymbol{y}_0$. Neka je $c > 0$ konstanta i neka je $S = \{\boldsymbol{y} \in U : V(\boldsymbol{y}) \leq c\}$ zatvoren skup u $\mathbb{R}^n$. Ako ne postoji $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}_0$ u S takav da je funkcija V konstanta na skupu $\{\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) : x \geq 0\}$, onda za svaki $\boldsymbol{y} \in S$,*

$\boldsymbol{\phi}(x, \boldsymbol{y}) \to \boldsymbol{y}_0$, *kad* $x \to +\infty$.

Primjer 3.12 *Zadan je sustav*

$$
\begin{aligned}
x' &= -x - xy^2 \ , \\
y' &= -y + 3x^2 y \ .
\end{aligned}
$$

Lako je provjeriti da je $(0,0)$ *jedina kritična točka sustava. Potražit ćemo Ljapunovljevu funkciju oko* $(0,0)$ *u obliku* $V(x,y) = ax^{2p} + by^{2q}$*, gdje su* a*,* $b > 0$ *te* p*,* $q \in \mathbb{N}$ *konstante. Očito je da takve funkcije zadovoljavaju prva dva uvjeta iz definicije Ljapunovljeve funkcije. Odredit ćemo konstante tako da vrijedi i treći uvjet.*

Imamo

$$
\begin{aligned}
\nabla V(x,y) \cdot \boldsymbol{f}(x,y) &= \begin{pmatrix} 2apx^{2p-1} \\ 2bqy^{2q-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x - xy^2 \\ -y + 3x^2 y \end{pmatrix} \\
&= -2apx^{2p} - 2apx^{2p}y^2 - 2bqy^{2q} + 6bqx^2y^{2q} \ .
\end{aligned}
$$

Primijetimo da će se za $p = q = 1$ *i* $a = 3$*,* $b = 1$ *drugi i četvrti član u prethodnom izrazu poništiti. Tako dobivamo*

$$
\nabla V(x,y) \cdot \boldsymbol{f}(x,y) = -6x^2 - 2y^2 \le 0 \ , \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .
$$

Prema tome, definiramo $V(x,y) = 3x^2 + y^2$*, za* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Primijetimo i da je* $\nabla V(x,y) \cdot \boldsymbol{f}(x,y) < 0$*,* $(x,y) \neq (0,0)$*, pa je* V *i stroga Ljapunovljeva funkcija. Prema Ljapunovljevom teoremu o stabilnosti zaključujemo da je* $(0,0)$ *asimptotički stabilna točka. Iz Ljapunovljevog teorema ne možemo zaključiti je li* $(0,0)$ *globalno asimptotički stabilna.*

Dokazat ćemo globalnu asimptotičku stabilnost kritične točke pomoću LaSalleovog teorema. Neka je $c > 0$ *proizvoljna konstanta i neka je*

$$
S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : V(x,y) \le c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 \le c\} \ .
$$

Primijetimo da je S *uvijek zatvoren skup u* $\mathbb{R}^2$*. Neka je* $\boldsymbol{z} \in S$ *i pretpostavimo da je* V *konstantna na skupu* $\{\boldsymbol{\phi}(t, \boldsymbol{z}) : \ t \ge 0\}$*. Tada je*

$$
3(\phi_1(t, \boldsymbol{z}))^2 + (\phi_2(t, \boldsymbol{z}))^2 = C \ , \ \ t \ge 0
$$

za neku konstantu C*. Deriviranjem po* t *za* $t > 0$ *dobivamo*

$$
6\phi_1(t, \boldsymbol{z}) \frac{d}{dt} \phi_1(t, \boldsymbol{z}) + 2\phi_2(t, \boldsymbol{z}) \frac{d}{dt} \phi_2(t, \boldsymbol{z}) = 0 \ . \tag{3.6}
$$

Kako je $\boldsymbol{\phi}(\cdot, \boldsymbol{z})$ *rješenje zadanog sustava, imamo*

$$
\frac{d}{dt} \phi_1(t, \boldsymbol{z}) = -\phi_1(t, \boldsymbol{z}) - \phi_1(t, \boldsymbol{z})(\phi_2(t, \boldsymbol{z}))^2 \ ,
$$

$$\frac{d}{dt}\phi_2(t,\boldsymbol{z}) = -\phi_2(t,\boldsymbol{z}) + 3(\phi_1(t,\boldsymbol{z}))^2\phi_2(t,\boldsymbol{z})$$

pa uvrštavanjem tih izraza u jednakost (3.6) dobivamo

$$-6(\phi_1(t,\boldsymbol{z}))^2 - 2(\phi_2(t,\boldsymbol{z}))^2 = 0 \ .$$

Dakle, za $t > 0$ imamo $\phi_1(t,\boldsymbol{z}) = \phi_2(t,\boldsymbol{z}) = 0$. Zbog neprekidnosti je $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\phi}(0,\boldsymbol{z}) = (0,0)$. Funkcija V je definirana na skupu $\mathbb{R}^2$. Sada promatrajmo njezinu restrikciju na ograničen skup $U \subset \mathbb{R}^2$ takav da je $S \subset U$. Primijetimo da vrijedi $S = \{(x,y) \in U : V(x,y) \leq c\}$. Primijenimo li LaSalleov teorem s tako definiranom restrikcijom, zaključujemo da za svaki $\boldsymbol{z} \in S$ vrijedi $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{z}) \to (0,0)$, kad $t \to +\infty$. Kako c možemo odabrati proizvoljno, zaključujemo da za svako $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{\phi}(t,\boldsymbol{z}) \to (0,0)$, kad $t \to +\infty$, odnosno $(0,0)$ je globalno asimptotički stabilna kritična točka na $[0,+\infty\rangle$.

Pretpostavimo sada da je zadan gradijentni sustav, odnosno autonomni sustav oblika

$$\boldsymbol{y}' = -\nabla h(\boldsymbol{y}) \ ,$$

gdje je $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klase C^2. Neka je $\boldsymbol{y}_0$ kritična točka sustava. Ona je ujedno stacionarna točka funkcije h, tj. točka za koju vrijedi $\nabla h(\boldsymbol{y}_0) = 0$. Pretpostavimo da je $\boldsymbol{y}_0$ izolirana stacionarna točka i točka strogog lokalnog minimuma funkcije h. Tada postoji okolina U točke $\boldsymbol{y}_0$, koja ne sadrži nijednu drugu kritičnu točku sustava, takva da je $h(\boldsymbol{y}) > h(\boldsymbol{y}_0)$, $\boldsymbol{y} \in U\backslash\{\boldsymbol{y}_0\}$. Definiramo sada funkciju $V\colon U \to \mathbb{R}$ s $V(\boldsymbol{y}) = h(\boldsymbol{y}) - h(\boldsymbol{y}_0)$. Očito je $V(\boldsymbol{y}_0) = 0$ i $V(\boldsymbol{y}) > 0$, $\boldsymbol{y} \in U\backslash\{\boldsymbol{y}_0\}$. Vrijedi i

$$\nabla V(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \nabla h(\boldsymbol{y}) \cdot (-\nabla h(\boldsymbol{y})) = -\|\nabla h(\boldsymbol{y})\|^2 < 0 \ , \ \ \boldsymbol{y} \in U\backslash\{\boldsymbol{y}_0\} \ .$$

Prema tome, V je stroga Ljapunovljeva funkcija sustava na U te je prema Ljapunovljevom teoremu $\boldsymbol{y}_0$ asimptotički stabilna kritična točka na $[0,+\infty\rangle$.

Pomoću sljedećeg teorema možemo provjeriti je li zadani sustav gradijentni.

Teorem 3.6 *Ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 1-povezano područje, funkcija $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ klase C^1 je potencijalna na Ω ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1,x_2) \ , \ \ (x_1,x_2) \in \Omega \ .$$

U sljedećem primjeru ćemo pokazati kako možemo odrediti potencijal funkcije koja određuje gradijentni sustav.

Primjer 3.13 *Zadan je sustav*

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 4y - 4 \ , \\ y' &= -4x - 24y + 8 \ . \end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{\partial(-2x-4y-4)}{\partial y} = \frac{\partial(-4x-24y+8)}{\partial x} \ ,$$

prema teoremu 3.6 zadani sustav je gradijentni. Pronađimo funkciju $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tako da je desna strana sustava jednaka* $-\nabla h$.

Dakle, vrijedi

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x + 4y + 4$$

pa je

$$h(x,y) = x^2 + 4xy + 4x + \varphi(y) \ . \tag{3.7}$$

Dalje je iz sustava

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 4x + 24y - 8 \ ,$$

te iz jednakosti (3.7) dobivamo

$$4x + \varphi'(y) = 4x + 24y - 8 \ .$$

Dakle

$$\varphi(y) = 12y^2 - 8y + C \ ,$$

gdje je $C \in \mathbb{R}$ *konstanta.*

Možemo tada jednostavno uzeti

$$h(x,y) = x^2 + 4xy + 12y^2 + 4x - 8y \ .$$

Kritična točka zadanog sustava je rješenje sustava

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= -4 \\ 4x + 24y &= 8 \ , \end{aligned}$$

odnosno točka $(-4,1)$. *To je ujedno i stacionarna točka funkcije* h. *Hesseova matrica je konstantna, odnosno jednaka je*

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix} \ .$$

Kako je $\det \boldsymbol{H} > 0$, *lako možemo zaključiti (pomoću Sylvesterovog kriterija) da se radi o pozitivno definitnoj matrici pa je* $(-4,1)$ *točka strogog lokalnog minimuma funkcije* h. *Prema tome, funkcija* $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$V(x,y) = h(x,y) - h(-4,1) = x^2 + 4xy + 12y^2 + 4x - 8y + 12$$

je stroga Ljapunovljeva funkcija zadanog sustava na nekom otvorenom skupu oko kritične točke $(-4,1)$ *te je stoga ta kritična točka prema Ljapunovljevom teoremu (lokalno) asimptotički stabilna na* $[0,+\infty\rangle$.

Za kraj napomenimo da supstitucijom $\overline{x} = x+4$, $\overline{y} = y-1$ *svodimo sustav na homogeni linearan sustav*

$$\overline{x}' = -2\overline{x} - 4\overline{y}\ ,$$
$$\overline{y}' = -4\overline{x} - 24\overline{y}\ .$$

Kako su svojstvene vrijednosti matrice prethodnog sustava jednake $-13 \pm \sqrt{137}$, *one su negativne te je prema teoremu 2.9 trivijalno rješenje sustava globalno asimptotički stabilno na* $[0,+\infty\rangle$. *Time dobivamo da je konstantno rješenje* $(x(t),y(t)) = (-4,1)$ *početnog sustava i globalno asimptotički stabilno na* $[0,+\infty\rangle$. *Dakle, za bilo koji početni uvjet rješenje se za* $t \to +\infty$ *približava točki* $(-4,1)$.

Literatura

[1] H. Amann, *Ordinary differential equations*, de Gruyter, 1990.

[2] V. Arnold, *Equations differentielles ordinaires*, MIR, 1988.

[3] M. Braun, *Differential equations and their applications*, Springer Verlag, 1993.

[4] M. W. Hirsch, S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press, 1974.

[5] W. G. Kelley, A.C. Peterson, *The theory of differential equations*, Springer, 2010.

[6] V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Dover Publ, 1989.

[7] L. C. Piccinini, G. Stampacchia, G. Vidossich, *Ordinary differential equations in* $\mathbb{R}^n$, Springer Verlag, 1984.