

1. LIMES I NEPREKIDNOST

Limese **racionalnih izraza** oblika:

- $\frac{0}{0}$ određujemo skraćivanjem.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ određujemo dijeljenjem s najvećom potencijom u nazivniku.
- $\infty - \infty$ određujemo svođenjem na zajednički nazivnik.

Limese **iracionalnih izraza** oblika:

- $\frac{0}{0}$ supstitucijom ili racionalizacijom.
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ određujemo dijeljenjem s najvećom potencijom u nazivniku.
- $\infty - \infty$ određujemo racionalizacijom.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

1.1. Odredite limese funkcije $f(x) = a^{\frac{1}{x}}$ kada $x \rightarrow \pm\infty$ i $x \rightarrow 0\pm$ za:

- (a) $a > 1$
- (b) $0 < a < 1$

1.2. Odredite limese funkcije $f(x) = a^{\frac{1}{x^2}}$ kada $x \rightarrow \pm\infty$ i $x \rightarrow 0\pm$ za:

- (a) $a > 1$
- (b) $0 < a < 1$

1.3. Izračunajte sljedeće limese:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^5(3x+1)^3(2x^2-5x+3)}{(1-x)^7(6x^3+2x^2+3x+1)}$

1.4. Izračunajte sljedeće limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$$

1.5. Izračunajte sljedeće limese:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$

(b) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3} \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x - \sqrt{x^2 + 1})$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + b^2} + x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - x - 1}{x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} - x + 1}{x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow -2 \pm} \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4}$

1.6. Izračunajte sljedeće limese:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(13x)}{\sin(12x)}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(5x)}{x}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1-x^3}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

1.7. Izračunajte sljedeće limese:

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 7^x}{6^x - 5^x}$$

1.8. Izračunajte sljedeće limese:

(a) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin x - 1}{\cos 3x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} \right)^{x^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^{x+2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+4} - 2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + \sin x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\tan x}}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x \sin x}}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

(j) $\lim_{x \rightarrow -1 \pm} x e^{\frac{1}{x^2 - 1}}$

1.9. Odredite parametar λ takav da funkcija f bude neprekidna:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \lambda, & x = 2 \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 5x^2 - 2x + \lambda, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1, & x \geq 0 \\ x + \lambda, & x < 0 \end{cases}$$

1.10. Odredite parametre a i b takve da funkcija f bude neprekidna ako je:

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

- 1.1. (a) 1 kada $x \rightarrow \pm\infty$, $+\infty$ kada $x \rightarrow 0+$, 0 kada $x \rightarrow 0-$
(b) 1 kada $x \rightarrow \pm\infty$, 0 kada $x \rightarrow 0+$, $+\infty$ kada $x \rightarrow 0-$
- 1.2. (a) 1 kada $x \rightarrow \pm\infty$, $+\infty$ kada $x \rightarrow 0\pm$
(b) 1 kada $x \rightarrow \pm\infty$, 0 kada $x \rightarrow 0\pm$
- 1.3. (a) $\frac{2}{3}$
(b) -1
(c) -9
- 1.4. (a) 2
(b) 2
(c) 1
(d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(e) 1 kada $x \rightarrow \infty$, -1 kada $x \rightarrow -\infty$
(f) -1
(g) $\frac{4}{3}$
(h) $\frac{3}{2}$
(i) $-\frac{1}{56}$

- 1.5. (a) 0
(b) $\frac{5}{2}$ kada $x \rightarrow \infty$, $-\frac{5}{2}$ kada $x \rightarrow -\infty$
(c) 0 kada $x \rightarrow \infty$, $-\infty$ kada $x \rightarrow -\infty$
(d) 1
(e) $\frac{a^2}{b^2}$
(f) -2
(g) 0 kada $x \rightarrow \infty$, -2 kada $x \rightarrow -\infty$
(h) $-\infty$ kada $x \rightarrow -2-$, $+\infty$ kada $x \rightarrow -2+$

- 1.6. (a) 1
(b) $\frac{13}{12}$
(c) $-\frac{1}{2}$
(d) $\frac{1}{2}$
(e) $\frac{2}{3}$
(f) 5
(g) $-\frac{1}{3}$
(h) $-\sin a$

- 1.7. (a) e
(b) 1
(c) 1
(d) $\frac{1}{\ln 10}$
(e) $\frac{1}{a}$
(f) 1
(g) 1
(h) 1
(i) $\ln 2$
(j) $\frac{\ln(8/7)}{\ln(6/5)}$

- 1.8. (a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
(b) 0
(c) 9
(d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$
(e) 20
(f) e
(g) e
(h) $\frac{1}{\sqrt{e}}$
(i) $-\frac{1}{2}$
(j) 0 kada $x \rightarrow -1+$, $-\infty$ kada $x \rightarrow -1-$

1.9. (a) $\lambda = 4$

(b) $\lambda = 1$

(c) $\lambda = 2$

1.10. $a = -1, b = 1$