Vektorski prostori

vježbe

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

siječanj 2025.

Teorem (Riesz)

Za svaki funkcional $f \in V'$ postoji jedinstveni vektor $a \in V$ takav da je

$$f(v) = (v \mid a), \quad \forall v \in V.$$

Teorem

Za svaki $A \in L(V, W)$ postoji jedinstveni $A^* \in L(W, V)$ takav da je

$$(Av \mid w)_W = (v \mid A^* w)_V, \quad \forall v \in V, \forall w \in W.$$

Operator A^* zovemo adjungiranim operatorom operatora A.

Pridruživanje $A \mapsto A^*$ ima svojstva:

- bijektivno je $L(V, W) \to L(W, V)$
- antilinearno
- $(AB)^* = B^* A^*$, $B \in L(V, W)$, $A \in L(W, U)$
- $(A^*)^* = A$, $A \in L(V, W)$
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, $A \in L(V, W)$ bijekcija
- $I_V^* = I_V$

Za (e), (f) ONB od V i W te $A \in L(V, W)$ vrijedi

$$A^*(e, f) = (A(f, e))^* = \overline{(A(f, e))}^t.$$

Zadatak 2.

Nađite adjungirani operator operatora $A \in L(\mathbb{C}^2)$,
$A(x_1, x_2) = (2x_1, ix_1 - x_2)$.

Definicija

Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor. Operator $A \in L(V)$ je

- ***hermitski** ako vrijedi $A^* = A$*
- ***antihermitski** ako vrijedi $A^* = -A$*
- ***unitaran** ako vrijedi $AA^* = A^*A = I$, tj. $A^{-1} = A^*$*
- ***normalan** ako vrijedi $AA^* = A^*A$.*

Analogno definiramo hermitsku, antihermitsku, unitarnu i normalnu matricu.

Operator je hermitski/antihermitski/unitaran/normalan ako i samo ako u nekoj (pa onda i u svakoj) ONB kao matrični prikaz ima hermitsku/antihermitsku/unitarnu/normalnu matricu.

Zadatak 3.

Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor nad $\mathbb{C}$

(a) Dokažite da za svaki $A \in L(V)$ postoje jedinstveni hermitski operatori $H, K \in L(V)$ takvi da je $A = H + iK$.

(b) Dokažite da je $A \in L(V)$ normalan ako i samo ako H i K iz gornjeg prikaza međusobno komutiraju.

Zadatak 4.

Napišite operator $A \in L(\mathbb{C}^2)$, $A(x_1, x_2) = (2x_1, ix_1 - x_2)$ u obliku $H + iK$, gdje su $H, K \in L(\mathbb{C}^2)$ hermitski operatori.

Zadatak 5.

Neka je $\mathcal{P}_n$ prostor kompleksnih polinoma stupnja $\leq n$ uz skalarni produkt zadan sa $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$, $f, g \in \mathcal{P}_n$. Je li operator deriviranja $D\colon \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, $Df = f'$ hermitski operator?

Ortogonalni projektor

Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i $M \leq V$. Tada vrijedi $V = M \oplus M^{\perp}$, tj. svaki vektor $x \in V$ ima jedinstven zapis oblika $x = a + b$, $a \in M$, $b \in M^{\perp}$. Operator $P \in L(V)$ definiran s $Px := a$ zove se **ortogonalni projektor** (ili hermitski projektor).

Propozicija

Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i $P \in L(V)$. Operator P je ortogonalni projektor ako i samo ako vrijedi $P^2 = P = P^*$.

Zadatak 6.

Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i neka su $P_1, P_2 \in L(V)$ ortogonalni projektori. Uz koje uvjete na P_1 i P_2 je operator $P_1 P_2$ ortogonalni projektor? Na koji potprostor u tom slučaju on projicira prostor V?

Zadatak za DZ

Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i neka su $P_1, P_2 \in L(V)$ ortogonalni projektori. Uz koje uvjete na P_1 i P_2 je operator $P_1 + P_2$ ortogonalni projektor? Na koji potprostor u tom slučaju on projicira prostor V?

Unitarni operatori (isječak iz skripte)

9.1. **Unitarni operatori.** Neka je $U\colon V \to V$ linearan operator na realnom ili kompleksnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

(1) $U^*U = UU^* = I$.
(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y)$ za sve $x, y \in V$.
(3) $||Ux|| = ||x||$ za sve $x \in V$.
(4) $Ue_1, \ldots, Ue_n$ je ortonormirana baza od V za svaku ortonormiranu bazu $e_1, \ldots, e_n$.
(5) $Ue_1, \ldots, Ue_n$ je ortonormirana baza od V za neku ortonormiranu bazu $e_1, \ldots, e_n$.

Za operator U kažemo da je *unitaran operator* ako vrijedi jedna od ekvivalentnih tvrdnji (1)–(5). Unitaran operator na realnom prostoru zovemo i *ortogonalnim operatorom*.

Zadaci

Zadatak 1.
Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{C}$. Dokažite: ako su $A, B \in L(V)$ unitarni operatori takvi da je operator $A + B$ također unitaran, onda je AB^* unitaran operator za koji vrijedi $(AB^*)^3 = I$.

Zadatak 2.
Dokažite: ako je A unitaran operator takav da je $A + I$ također unitaran, onda je $A^3 = I$.

Zadatak za DZ

Na unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ zadan je operator

$$A(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{5}x_1 - \frac{4}{5}x_3, \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_3, x_2\right).$$

Provjerite je li operator A unitaran i odredite A^{-1}.

Hermitski operatori

Spektar hermitskog operatora je neprazan i realan.

Teorem 9.18. *Neka je H hermitski operator na kompleksnom ili realnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora od H.*

Drugim riječima, postoji ortonormirana baza e od V u kojoj je matrica $H(e)$ dijagonalna.

Teorem

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Ako je $\mathcal{A}$ familija hermitskih operatora na V koji međusobno komutiraju, onda postoji ortonormirana baza prostora V u kojoj svi operatori iz $\mathcal{A}$ imaju (realne) dijagonalne matrice.

(Strogo) pozitivni operatori

Definicija

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor. Operator $A \in L(V)$ je ***pozitivan*** *($A \geq 0$) ako je $A^* = A$ i vrijedi*

$$(\forall v \in V) \quad (Av \mid v) \geq 0.$$

Operator $A \in L(V)$ je ***strogo pozitivan*** *($A > 0$) ako je $A^* = A$ i vrijedi*

$$(\forall v \in V \setminus \{0\}) \quad (Av \mid v) > 0.$$

Propozicija

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ hermitski operator. Tada vrijedi:

(a) *A je pozitivan $\iff \sigma(A) \subseteq [0, +\infty\rangle$*

(b) *A je strogo pozitivan $\iff \sigma(A) \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$*

Drugi korijen

Teorem (O pozitivnom drugom korijenu)

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor. Za svaki $A \in L(V)$, $A \geq 0$ postoji jedinstveni $B \in L(V)$, $B \geq 0$ takav da je $B^2 = A$. Kažemo da je B pozitivni drugi korijen operatora A i pišemo $B = \sqrt{A}$. Štoviše, vrijedi

$$(\forall T \in L(V)) \quad AT = TA \iff BT = TB.$$

Polarna forma

Teorem 9.30 (Polarna forma operatora)**.** *Neka je* $A \in L(V)$*. Tada postoje unitarni operator* U *i pozitivni operator* H *tako da je*

$$A = UH.$$

Operator H *je jedinstven i* $H = \sqrt{A^*A}$*, a* U *je jedinstven ako je* A *regularan.*

Zadatak 1.

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$. Dokažite: ako vrijedi $A^*A - AA^* \geq 0$, onda je A normalan.

Zadatak 2.

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{C}$. Neka su $A, B \in L(V)$, $A > 0$, takvi da vrijedi $AB + iBA = 0$. Dokažite da je $B = 0$.

Zadatak 4.

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor i neka su $A, B \in L(V)$ takvi da je $\|Av\| = \|Bv\|$ za svaki $v \in V$. Dokažite da postoji unitaran operator U takav da je $B = UA$.