Vektorski prostori

vježbe

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

siječanj 2025.

Hermitski operatori

Spektar hermitskog operatora je neprazan i realan.

Teorem 9.18. *Neka je H hermitski operator na kompleksnom ili realnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora od H.*

Drugim riječima, postoji ortonormirana baza e od V u kojoj je matrica $H(e)$ dijagonalna.

Teorem

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Ako je $\mathcal{A}$ familija hermitskih operatora na V koji međusobno komutiraju, onda postoji ortonormirana baza prostora V u kojoj svi operatori iz $\mathcal{A}$ imaju (realne) dijagonalne matrice.

(Strogo) pozitivni operatori

Definicija

Neka je V *konačno-dimenzionalan unitaran prostor. Operator* $A \in L(V)$ *je* ***pozitivan*** *(*$A \geq 0$*) ako je* $A^* = A$ *i vrijedi*

$$(\forall v \in V) \quad (Av \mid v) \geq 0.$$

Operator $A \in L(V)$ *je* ***strogo pozitivan*** *(*$A > 0$*) ako je* $A^* = A$ *i vrijedi*

$$(\forall v \in V \setminus \{0\}) \quad (Av \mid v) > 0.$$

Propozicija

Neka je V *konačno-dimenzionalan unitaran prostor i* $A \in L(V)$ *hermitski operator. Tada vrijedi:*

(a) *A je pozitivan* $\iff \sigma(A) \subseteq [0, +\infty\rangle$

(b) *A je strogo pozitivan* $\iff \sigma(A) \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$

Drugi korijen

Teorem (O pozitivnom drugom korijenu)

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor. Za svaki $A \in L(V)$, $A \geq 0$ postoji jedinstveni $B \in L(V)$, $B \geq 0$ takav da je $B^2 = A$. Kažemo da je B pozitivni drugi korijen operatora A i pišemo $B = \sqrt{A}$. Štoviše, vrijedi

$$(\forall T \in L(V)) \quad AT = TA \iff BT = TB.$$

Polarna forma

Teorem 9.30 (Polarna forma operatora)**.** *Neka je $A \in L(V)$. Tada postoje unitarni operator U i pozitivni operator H tako da je*

$$A = UH.$$

Operator H je jedinstven i $H = \sqrt{A^*A}$, a U je jedinstven ako je A regularan.

Zadatak 3.

Neka je P pozitivan operator na konačno-dimenzionalnom unitarnom vektorskom prostoru koji zadovoljava jednakost $P^{10} + 2P^4 - 3I = 0$. Dokažite da je $P = I$.

Zadatak 5.

Operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan je formulom $A(x, y) = (2x + 3y, 3x + 5y)$. Dokažite da je A pozitivan operator i odredite njegov pozitivni drugi korijen $\sqrt{A}$.

Normalni operatori (isječci iz skipte)

10.3. **Normalni operatori.** Za operator A na unitarnom prostoru kažemo da je *normalan* ako komutira sa svojim hermitski adjungiranim, tj.

$$AA^* = A^*A.$$

Primijetimo da su unitarni, hermitski i antihermitski operatori normalni.

Ako je A normalan, onda je i svaki polinom $P(A)$ normalan jer sve potencije od A komutiraju sa svakom potencijom od A^*.

Propozicija 10.1. *Linearan operator $A \in L(V)$ je normalan ako i samo ako je*

$$||Ax|| = ||A^*x|| \quad \text{za svaki} \quad x \in V.$$

(...)

Teorem 10.5. *Neka je A normalan operator na kompleksnom konačno dimenzionalnom unitarnom prostoru V. Tada postoji ortonormirana baza od V koja se sastoji od svojstvenih vektora od A. Drugim riječima, postoji ortonormirana baza e od V u kojoj je matrica $A(e)$ dijagonalna matrica.*

Zadatak 1.

Neka je operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan sa

$$A(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3, 2x_1 + 2x_3, 4x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

Ako postoji, odredite ONB za $\mathbb{C}^3$ u kojoj A ima dijagonalni prikaz.

Simultana dijagonalizacija

Teorem

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{C}$. Ako je $\mathcal{A}$ familija normalnih operatora koji međusobno komutiraju, onda postoji ortonormirana baza prostora V u kojoj svi operatori iz $\mathcal{A}$ imaju dijagonalnu matricu.

Zadatak 2.

Neka je V konačno-dimenzionalan unitaran prostor nad $\mathbb{C}$ i $A \in L(V)$ normalan operator. Dokažite:

(a) A je hermitski $\iff \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

(b) A je antihermitski $\iff \sigma(A) \subseteq i\mathbb{R}$

(c) A je unitaran $\iff \sigma(A) \subseteq S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$.

Zadatak 3.

Na kompleksnom konačno-dimenzionalnom unitarnom prostoru dan je normalan operator A za koji vrijedi $A^5 + A^3 - A^2 - I = 0$. Dokažite da A mora biti unitaran.

Zadatak 4.

Neka je V konačno-dimenzionalan kompleksni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Dokažite: A je normalan operator ako i samo ako postoji unitaran operator $U \in L(V)$ takav da je $A^* = UA$.

Dodatni zadaci

Zadatak 1.

Koliko najviše elemenata može imati spektar unitarnog operatora $U \in L(\mathbb{C}^{2006})$ takvog da je operator $U - I$ također unitaran?

Zadatak 3.

Neka je V konačno-dimenzionalan unitarni prostor i $H \in L(V)$ hermitski operator. Neka je λ_0 najmanja svojstvena vrijednost operatora H. Dokažite:

$$\lambda_0(x \mid x) \leq (Hx \mid x).$$

Zadatak 4.

Neka je $H \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska matrica i pretpostavimo da su $B, C \in M_n(\mathbb{C})$ hermitske matrice takve da je $B^3 = H = C^3$. Dokažite da je $B = C$.