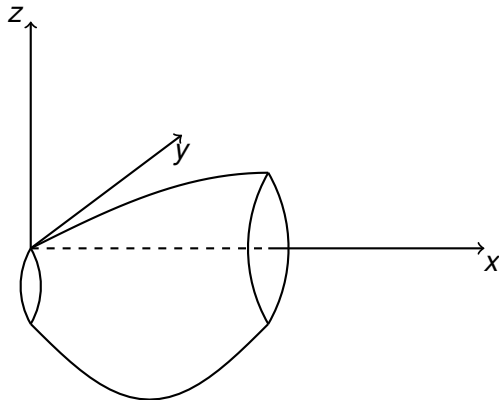


# Integrali i računanje volumena tijela

Često se u praksi postavlja pitanje izračunavanja volumena tijela. Pretpostavimo da imamo neko tijelo koje postavljamo tako da kroz njega prolazi prolazi os  $x$  (u trodimenzionalnom koordinatnom sustavu).



Sada zamislimo da smo gornje tijelo razrezali poprečno, tj. paralelno s  $yz$ -ravninom na vrlo tanke kriškice debljine  $\Delta x$ , koje su, prema tome, otprilike tanki valjci (što je  $\Delta x$  manje, sličniji su valjcima). Kriškice, dakle, otprilike izgledaju ovako:



te je volumen kriškice jednak  $S(x)\Delta x$ , gdje je  $S(x)$  površina presjeka (dakle baze kriškice). Ukupan volumen, je prema tome,

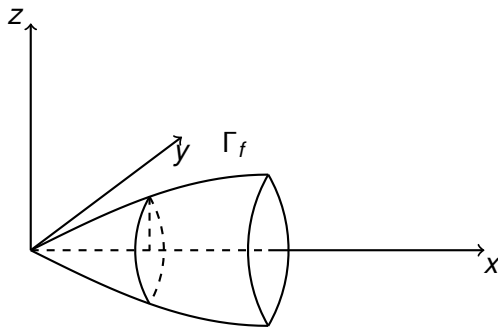
$$\sum_{\Delta x} S(x)\Delta x,$$

a vidjeli smo da infintezimalnim smanjivanjem  $\Delta x$  dobivamo

$$V = \int_a^b S(x) dx,$$

# Volumen rotacionog tijela

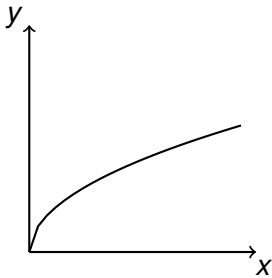
Kao poseban slučaj gornje situacije, javlja nam se računanje volumena rotacionih tijela; tj. onih koja su nastala rotacijom grafa funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  oko  $x$ -osi; npr. kao što se vidi na slici



U tom slučaju je površina  $S(x) = f(x)^2\pi$ , te je onda dani volumen rotacionog tijela, nastalog rotacijom grafa funkcije  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$  jednak

$$\pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

**Primjer** Izračunajte volumen rotacionong paraboloida nastalog rotacijom parabole  $y = \sqrt{x}$  oko  $x$ -osi od  $x = 0$  do  $x = 5$ . Dakle,



rotiramo ovaj graf.

Prema tome,  $f(x)^2 = x$ . Dobivamo  $V = \pi \int_0^5 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 = \frac{25\pi}{2}$ .