Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

VEKTORSKI PROSTORI - nastavnički smjer

drugi kolokvij - 27. siječnja 2025.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Molimo da odvojite rješenja prva dva zadatka od rješenja zadnjih triju zadataka. Obrazložite svoje tvrdnje. Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.

1. Neka je $A \in L(V)$, gdje je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.
   a) (2 boda) Definirajte pojam korijenog potprostora operatora A.
   b) (3 boda) Iskažite kako (u povoljnoj bazi) izgleda Jordanova forma operatora A (Jordanove klijetke, svojstvene vrijednosti...)
   c) (2 boda) Iskažite Teorem o Jordanovom rastavu operatora A i dovedite sumande iz tog rastava u vezu s Jordanovom formom operatora A.

2. a) (2 boda) Iskažite relaciju paralelograma koja vrijedi na unitarnom prostoru i dokažite ju.
   b) (2 boda) Kakvi brojevi su u spektru unitarnog operatora na vektorskom prostoru V nad $\mathbb{C}$? (tj. Propozicija o spektru unitarnog operatora). Dokažite!
   c) (3 boda) Navedite primjer unitarnog operatora na realnom vektorskom prostoru čiji je spektar prazan skup.

3. a) (3 boda) Operator $A \in L(\mathbb{C}^7)$ u nekoj bazi (f) za $\mathbb{C}^7$ ima matrični prikaz

$$A(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}.$$

   Odredite spektar operatora A, njegov minimalni i karakteristični polinom, te geometrijske i algebarske kratnosti svih svojstvenih vrijednosti.

   b) (4 boda) Odredite Jordanovu formu operatora $B \in L(\mathbb{C}^{10})$ ako je poznato da vrijedi

$$\mu_B(x) = (x+1)(x-1)^2(x-2)^3, \quad \det(B) = 16, \quad \mathrm{tr}(B) = 6.$$

4. (7 bodova) Odredite neku ortonormiranu bazu za realni vektorski prostor $\mathcal{P}_2$ svih polinoma s realnim koeficijentima stupnja ≤ 2 s obzirom na skalarni produkt $\langle p \mid q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$.

5. a) (2 boda) Pokažite da je operator $U \in L(\mathbb{R}^4)$ unitaran te odredite U^{-1} ako je U zadan s

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   b) (5 bodova) Neka je P pozitivan operator na konačno-dimenzionalnom unitarnom prostoru koji zadovoljava jednakost

$$P^4 + P^3 - P^2 + P - 2I = 0.$$

   Dokažite da vrijedi $P = I$.