

DIR1, zadaća 1, 16.03.2007.

SKUPOVI I FUNKCIJE

1. Dokažite da za skupove $A, B \subseteq D$ i $C, D \subseteq K$ i funkciju $f : D \rightarrow K$ vrijedi:
 - a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
 - c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
 - d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
2. Koja od sljedećih funkcija je injekcija, a koja surjekcija? Dokažite! Sve funkcije za domenu imaju najveći mogući podskup $\mathbb{R}$ na kojem su definirane navedenom formulom, a za kodomenu $\mathbb{R}$.
 - a) $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x+1}$
 - b) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$
 - c) $f(x) = x^3 + x + 1$
3. Koje sve surjekcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljavaju $f \circ f = f$?
4. Nađite sve funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblika $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ takve da za $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, vrijedi $g \circ f = f \circ g$.
5. Dokažite da, ako su $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$ bijekcije, onda je i $g \circ f$ bijekcija, i vrijedi $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
6. Ako znate da je $f \circ g$ bijekcija, što možete reći o f i g ?

AFINE FUNKCIJE

7. U veleprodaji "Čoko-import" kilogram čokolade košta 40 kuna, a u veleprodaji "Čoko-trade" 32 kune. Međutim, vožnja do "Čoko-trade" i nazad košta 500, a do "Čoko-import" i nazad 200 kuna. Koliko minimalno čokolade treba kupiti da bi se više isplatilo otići u "Čoko-trade"?
8. Lopovi s ukradenim kamionom bježe pred detektivima u automobilu. Brzina kamiona je $72km/h$, a automobila $168km/h$. Do skrovišta lopova ima $83km$, a njihov kamion ima početnu prednost od 40 minuta. Hoće li uspjeti pobjeći?

APSOLUTNE VRIJEDNOSTI

9. Skicirajte graf funkcije i grafički odredite $f(\langle -2, 2 \rangle)$ i $f^{-1}(\langle 1, 2 \rangle)$.
 - a) $f(x) = |x| - |x - 1|$
 - b) $f(x) = |x + |x + |x - 1||$
 - c) $f(x) = |x^2 - 3|$

10. Skicirajte skup svih točaka u ravnini koje zadovoljavaju uvjete:

- a) $|x| + |y| = 1$
- b) $||x| - |y|| = 1$

11. Skicirajte skup svih točaka u ravnini koje zadovoljavaju uvjete:

- a) $1 \leq |x| + |y| \leq 2$
- b) $||x| - |y|| > 1$ i $|x| + |y| \leq 3$

12. Riješite jednadžbe:

- a) $|x + 3| = x$
- b) $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = x + 2$
- c) $||x + 1| + 1| + 1| = 1$

13. Riješite nejednadžbe:

- a) $|x - 1| < 3$
- b) $|x - 1| < |x + 1|$
- c) $|x + |2x - 1|| \leq |2x - 1| + |x|$
- d) $\left| \frac{x}{x+1} \right| > \frac{x}{x+1}$
- e) $|2x - 1| < 2|x - 1|$

APSOLUTNE VRIJEDNOSTI

14. Riješite jednadžbe:

- a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
- b) $-3x^2 + 2x - 1 = 0$
- c) $x^2 + 6x + 5 = 0$
- d) $2x^2 - 3x + 7 = 0$

15. Riješite nejednadžbe:

- a) $(x - 1)(x^2 + 2x + 4) \geq 0$
- b) $(x^2 - 4x - 5)(x^2 - 2x + 3) \leq 0$
- c) $x^2 - 2x + 1 \geq 1$

16. Za koje parametre $m \in \mathbf{R}$ je jedna nultočka funkcije $f(x) = mx^2 - (m + 1)x - 3m + 4$ veći od 1, a drugi manji od -2?

17. Odredite minimume i maksimume svih funkcija iz zadatka 14!

18. Polje je smješteno uz dugačak ravan zid. Treba ograditi što veći dio polja u obliku pravokutnika, ali na raspolaganju imamo samo 240 metara žice. Uz zid nije potrebno postavljati ogradu. Kako to učiniti?

19. Nacrtajte grafove sljedećih funkcija koristeći transformacije grafa:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

b) $f(x) = -2x^2 + 6x$

c) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

d) $f(x) = 3x^2 - x + 2$