

# Osnove teorije vjerojatnosti - zadatci za vježbu

Ivan Biočić

15. rujna 2025.

## Sažetak

Ovi zadatci namijenjeni su kao dopuna predavanjima na kolegiju Osnove teorije vjerojatnosti koji se odvija na diplomskim studijima matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

## Sadržaj

|   |                                                          |   |
|---|----------------------------------------------------------|---|
| 1 | Izmjerivost, svojstva vjerojatnosti i slučajne varijable | 2 |
| 2 | Funkcije distribucije                                    | 4 |
| 3 | Matematičko očekivanje i nejednakosti                    | 5 |
| 4 | Konvergencija slučajnih varijabli                        | 6 |
| 5 | Nezavisnost                                              | 7 |
| 6 | Zakoni velikih brojeva                                   | 7 |
| 7 | Dodatni zadatci                                          | 9 |

# 1 Izmjerivost, svojstva vjerojatnosti i slučajne varijable

**Zadatak 1.1.** Dokažite:

a) Presjek  $\sigma$ -algebri je  $\sigma$ -algebra, tj.

$$\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in A\} \text{ familija } \sigma\text{-algebri} \implies \bigcap_{\alpha \in A} \mathcal{F}_\alpha \text{ je } \sigma\text{-algebra.}$$

Dokažite da slična tvrdnja za unije ne vrijedi.

b)  $\sigma(\mathcal{U}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \sigma\text{-algebra} \\ \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}}} \mathcal{F}$  je najmanja  $\sigma$ -algebra na  $\Omega$  koja sadrži  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ .

c)  $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega), \mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2 \implies \sigma(\mathcal{U}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{U}_2)$ .

d)  $\mathcal{U}$   $\sigma$ -algebra  $\implies \sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ .

**Zadatak 1.2.** Neka je  $\mathcal{T}$  skup svih otvorenih<sup>1</sup> skupova u  $\mathbb{R}$ . Tzv. Borelova  $\sigma$ -algebra na  $\mathbb{R}$  definira se kao  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{T})$ . Dokažite da za sljedeće klase skupova: i)  $\mathcal{C} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ , ii)  $\mathcal{C} = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$ , iii)  $\mathcal{C} = \{(x, y) : x < y \in \mathbb{R}\}$ , iv)  $\mathcal{C} = \{(x, y] : x < y \in \mathbb{R}\}$ ; vrijedi  $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Možete li predložiti prebrojivu klasu  $\mathcal{C}$  koja generira  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ?

**Zadatak 1.3.** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor. Dokažite:

a) Za disjunktne  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  vrijedi  $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ .

b)  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$  za svaki  $A \in \mathcal{F}$ .

c) Za svaki  $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N}$ , vrijedi  $\mathbb{P}(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mathbb{P}(A_i)$ .

d) Za svaki  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \in \mathcal{F}$  i  $A = \cup_i A_i$  (tj.  $A_i \nearrow A$ ) vrijedi  $\mathbb{P}(A) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$ .

e) Za svaki  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \in \mathcal{F}$  i  $A = \cap_i A_i$  (tj.  $A_i \searrow A$ ) vrijedi  $\mathbb{P}(A) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$ .

**Zadatak 1.4.** Dokažite da za  $A, B \in \mathcal{F}$  vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

te induktivno pokažite da za proizvoljne  $A_1, \dots, A_n$  izmjerive skupove vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_1^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

**Zadatak 1.5.** Pretpostavimo da su  $\mathbb{P}_1$  i  $\mathbb{P}_2$  dvije vjerojatnosne mjere na  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

---

<sup>1</sup>Skup  $U \subset \mathbb{R}$  je otvoren ako za svaki  $x \in U$  postoji  $r > 0$  takav da  $(x - r, x + r) \subset U$

a) Pokažite da  $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$  za  $A \in \mathcal{G} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$  povlači  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2$ .

b) Pokažite da isto vrijedi za  $\mathcal{G} = \{(a, b) : a < b \in \mathbb{Q}\}$ .

**Zadatak 1.6.** Nadite  $\lambda$ -sustav na  $\{1, 2, 3, 4\}$  koji nije  $\sigma$ -algebra.

**Zadatak 1.7.** Neka je  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  preslikavanje. Dokažite:

a) Ako je  $\mathcal{S}_2$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega_2$ , onda je  $\{h^\leftarrow(B) \mid B \in \mathcal{S}_2\}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega_1$ .

b) Ako je  $\mathcal{S}_1$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega_1$ , onda je  $\{B \subseteq \Omega_2 \mid h^\leftarrow(B) \in \mathcal{S}_1\}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega_2$ .

**Zadatak 1.8.** Neka je  $h : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  preslikavanje. Dokažite: ako je  $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ , tada vrijedi  $h^\leftarrow(\sigma(\mathcal{A}_2)) = \sigma(h^\leftarrow(\mathcal{A}_2))$ .

**Zadatak 1.9.** Pretpostavimo da su  $X$  i  $Y$  slučajne varijable na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  i neka je  $A \in \mathcal{F}$ . Pokažite: ako definiramo  $Z(\omega) = X(\omega)$  za  $\omega \in A$ , i  $Z(\omega) = Y(\omega)$  za  $\omega \in A^c$ , tada je  $Z$  slučajna varijabla na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Zadatak 1.10.** Neka je  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  proizvoljna funkcija takva da je  $|X|$  slučajna varijabla. Je li tada i  $X$  nužno slučajna varijabla?

**Zadatak 1.11.** Neka je  $X$  slučajna varijabla na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  te  $A \in \mathcal{F}$  i  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Odredite  $\sigma(Y)$  ako je

(a)  $Y = \mathbf{1}_A$ ,

(b)  $Y = c\mathbf{1}_A$ ,

(c)  $Y = X\mathbf{1}_A$ . Je li u ovom slučaju  $\sigma(Y) = \sigma(X, \mathbf{1}_A)$ ?

## 2 Funkcije distribucije

**Zadatak 2.1.** Nađite funkciju distribucije slučajne varijable  $Y$  ako je  $F_X$  funkcija distribucije slučajne varijable  $X$  i

a)  $Y = c$ , za neki  $c \in \mathbb{R}$ ,

b)  $Y = -X$ ,

c)  $Y = aX + b$ ,  $a \neq 0$ ,

d)  $Y = X^+$ ,

e)  $Y = X^-$ .

f)  $Y = |X|$ .

**Zadatak 2.2.** Ako su  $F_1$  i  $F_2$  funkcije distribucije i ako je  $D \subseteq \mathbb{R}$  gust u  $\mathbb{R}$  takav da  $F_1 = F_2$  na  $D$ . Tada je  $F_1 = F_2$  na  $\mathbb{R}$ .

**Zadatak 2.3.** Dokažite da je skup prekida funkcije distribucije najviše prebrojiv.

**Zadatak 2.4.** Neka je  $U \sim U(0, 2\pi)$ . Odredite funkciju distribucije slučajne varijable  $-\frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{U}{2\pi}\right)$ . Ima li ta slučajna varijabla gustoću? Odredite je.

**Zadatak 2.5.** Neka je  $X \sim N(0, 1)$ . Odredite funkciju distribucije slučajne varijable  $e^X$ . Ima li ta slučajna varijabla gustoću? Odredite je.

**Zadatak 2.6.** Postoji li funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koja ima prekid u svakoj racionalnoj točki  $q \in \mathbb{Q}$ , a neprekidna je u svakoj iracionalnoj točki  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ? Dokažite.

**Zadatak 2.7.** Odredite funkciju distribucije slučajne varijable  $Z$  iz Zadatka 1.9, u ovisnosti o funkcijama distribucije slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ , pri čemu je  $A = [0, \infty)$ .

### 3 Matematičko očekivanje i nejednakosti

**Zadatak 3.1.** Neka je  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Dokažite  $\mathbb{E}|X| = 0 \implies X = 0$  g.s.

**Zadatak 3.2.** Pokažite da  $\mathbb{E}|X| < \infty$  implicira  $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| < \infty\}) = 1$ .

**Zadatak 3.3.** Pokažite da je  $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  ograničena nenegativna funkcija koja nije Riemannov integrabilna na  $[0, 1]$  te je jednaka 0  $\lambda$ -g.s., te da njen Lebesgueov integral postoji i jednako je 0.

**Zadatak 3.4.** Smislite funkciju  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  koja je Riemann-integrabilna na  $[0, \infty)$ , ali ne postoji  $\int_{[0, \infty)} f(x) \lambda(dx)$  kao Lebesgueov integral.

**Zadatak 3.5.** Izračunajte očekivanje i varijancu sljedećih slučajnih varijabli:

a)  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ , tj.  $X$  ima gustoću

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \mathbf{1}_{\{x>0\}},$$

pri čemu su  $\alpha, \beta > 0$ .

b)  $X \sim t(n)$  (Studentova razdioba), tj.  $X$  ima gustoću

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

pri čemu  $n \in \mathbb{N}$ .

**Zadatak 3.6.** a) Dokažite da za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji v.p.  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  i na njemu slučajna varijabla  $X$  takva da je

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) = \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

b) Dokažite da za svaki  $\varepsilon > 0$  vrijedi

$$\inf\{\mathbb{P}(|X| > \varepsilon) : \mathbb{E}X = 0, \text{Var}(X) = 1\} = 0.$$

**Zadatak 3.7.** Neka je  $Y \geq 0$   $\mathbb{P}$ -g.s. takva da je  $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ . Pokažite  $\mathbb{P}(Y > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}Y)^2}{\mathbb{E}Y^2}$ .

**Zadatak 3.8.** Zadana je funkcija  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{3}, & x \in [-1, 0), \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Dokažite da je  $F$  funkcija distribucije neke slučajne varijable  $X$  te izračunajte  $\mathbb{E}X$  i  $\text{Var}X$ .

**Zadatak 3.9.** Neka je  $X \sim N(0, 1)$ . Izračunajte  $\mathbb{E}X^n$  za sve  $n \in \mathbb{N}$ . Što izraz mijenja ako je  $X \sim N(0, \sigma^2)$ ?

**Zadatak 3.10.** Dokažite da za sve  $\varepsilon > 0$  i svaku slučajnu varijablu  $X$  vrijedi

$$\mathbb{E}[|X| \wedge 1] \leq \varepsilon + \mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon).$$

## 4 Konvergencija slučajnih varijabli

**Zadatak 4.1.** Na izmjerivom prostoru  $((0, 1), \mathcal{B}((0, 1)), \lambda)$  dane su funkcije  $X_n(u) = n^2 \mathbf{1}_{(0, \frac{1}{n})}(u)$ . Odredite  $X(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(u)$  za sve  $u \in (0, 1)$  zajedno s vrijednostima  $\int X d\lambda$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int X_n d\lambda$ .

**Zadatak 4.2.** Pretpostavimo da su  $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  slučajne varijable takve da je  $\sum_n \mathbb{E}X_n < \infty$ , tada slučajni red  $\sum_n X_n < \infty$  konvergira gotovo sigurno.

**Zadatak 4.3.** Pretpostavimo da su  $X_1, X_2, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  slučajne varijable takve da je  $\sup_n \mathbb{E}|X_n| = M < \infty$ , i pretpostavimo da je  $|\varrho| < 1$ , tada slučajni red  $\sum_n \varrho^n X_n$  konvergira gotovo sigurno.

**Zadatak 4.4.** Pokažite da  $(X_n)_n$  konvergira po vjerojatnosti prema  $X$  ako i samo ako

$$\lim_n \mathbb{E}[|X_n - X| \wedge 1] = 0.$$

(Uputa: koristite Zadatak 3.10.)

**Zadatak 4.5.** Neka je  $(X_n)_n$  niz na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  koji je padajući (g.s.), tj.  $X_{n+1} \leq X_n$  (g.s.) za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . Dokažite da tada vrijedi  $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$  ako i samo ako  $X_n \xrightarrow{(g.s.)} 0$ .

**Zadatak 4.6.** Neka su  $X_n, X, Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , i  $X_n \xrightarrow{L^2} X$ . Pokažite da  $ZX_n \xrightarrow{L^1} ZX$ , ali ne mora vrijediti  $ZX_n \xrightarrow{L^2} ZX$ .

**Zadatak 4.7.** Neka  $X_n \xrightarrow{(g.s.)} X$  i  $X_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pokažite da ako očekivanja konvergiraju, tj.  $\mathbb{E}X_n \rightarrow \mathbb{E}X < \infty$ , onda vrijedi i  $X_n \xrightarrow{L^1} X$ .

**Zadatak 4.8.** Neka je  $(X_n)_n$  niz slučajnih varijabli na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

- (a) Neka  $X_n \sim \text{Exp}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Konvergira li niz po vjerojatnosti?
- (b) Neka  $X_n = e^{\frac{1}{n}} \mathbf{1}_{[\frac{n-1}{2^n}, 1)}(U)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gdje je  $U \sim U(0, 1)$ . Konvergira li niz  $(X_n)_n$  u  $L^p$ ,  $p \geq 1$ ?
- (c)  $X_n = \sqrt{n} \mathbf{1}_{(0, 1/n)}(U)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gdje je  $U \sim U(0, 1)$ . Konvergira li niz  $(X_n)_n$  po vjerojatnosti? A u  $L^p$ ?

**Zadatak 4.9.** Neka je  $(X_n)_n$  niz slučajnih varijabli na  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  takav da  $X_n \sim N(\mu, \sigma_n^2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dokažite:

- (a) ako  $\sigma_n \rightarrow 0$ , onda niz  $(X_n)_n$  konvergira u  $L^1$  prema  $X = 0$ ;
- (b) ako  $\sigma_n \rightarrow \sigma > 0$ , tada  $(X_n)_n$  konvergira po distribuciji prema  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ;
- (c) ako  $\sum_n \sigma_n^2 < \infty$ , tada  $(X_n)_n$  konvergira (g.s.).

## 5 Nezavisnost

**Zadatak 5.1.** Neka su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne varijable i  $r > 0$ . Pokažite da  $\mathbb{E}[|X + Y|^r] < \infty$  ako i samo ako  $\mathbb{E}[|X|^r] < \infty$  i  $\mathbb{E}[|Y|^r] < \infty$ .

**Zadatak 5.2.** Neka su slučajne varijable  $X$  i  $Y$  nezavisne i takve da  $\mathbb{P}$ -g.s. vrijedi  $XY = c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dokažite da su tada i  $X$  i  $Y$  degenerirane (tj.  $\mathbb{P}$ -g.s. konstante),

**Zadatak 5.3.** Neka su  $X_1, \dots, X_n$  nezavisne jednakodistribuirane slučajne varijable s funkcijom distribucije  $F$ . Odredite  $F_X$  i  $F_Y$  ako je

$$X = \max\{X_1, \dots, X_n\}, \quad Y = \min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Također, odredite funkciju distribucije  $F_k$  slučajne varijable  $X_{(k)}$  ( $k$ -ta po veličini slučajna varijabla, tj.  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(k-1)} \leq X_{(k)} \leq X_{(k+1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ ).

**Zadatak 5.4.** (a) Neka je  $(X, Y) \sim U(B(0, 1))$ , tj. 2-dim slučajni vektor uniformno distribuiran na kugli, čija je gustoća  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{B(0,1)}(x, y)$ . Dokažite da su  $X$  i  $Y$  nekorelirane, ali nisu nezavisne.

(b) Neka je  $X \sim N(0, 1)$  i  $Y = X^2$ . Dokažite da su  $X$  i  $Y$  nekorelirane, ali su zavisne.

**Zadatak 5.5.** Dokažite da za svaki niz slučajnih varijabli  $(X_n)_n$  postoji niz konstanti  $(c_n)_n$  takav da  $c_n \rightarrow \infty$  i  $\frac{X_n}{c_n} \rightarrow 0$  (g.s.). (*Uputa: Borel-Cantelli lema.*)

**Zadatak 5.6.** Neka je  $(X_n)_n$  niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli. Pokažite da niz  $(X_n)_n$  konvergira (g.s.) ako i samo ako je niz degeneriran, tj. ako i samo ako postoji  $c \in \mathbb{R}$  takav da je  $X_1 = c$  (g.s.) (a onda i  $X_n = c$  (g.s.),  $n \in \mathbb{N}$ ).

**Zadatak 5.7.** Neka je  $X$  neprekidna slučajna varijabla s gustoćom  $f_X$ . Odredite gustoću od  $X^2$ .

**Zadatak 5.8.** Neka su  $X, Y$  nezavisne slučajne varijable takve da  $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Jesu li  $X + Y$  i  $X/Y$  nezavisne?

**Zadatak 5.9.** Neka je  $(X, Y) \sim N(0, I)$ , tj.  $X$  i  $Y$  su nezavisne slučajne varijable s distribucijom  $N(0, 1)$ . Odredite gustoće njihovih polarnih koordinata  $f_R$  i  $f_\Phi$ , tj.  $R$  i  $\Phi$  su slučajne varijable takve da  $(X, Y) = (R \cos \Phi, R \sin \Phi)$ .

## 6 Zakoni velikih brojeva

**Zadatak 6.1.** Neka je  $(X_n)_n$  niz njd. sl. var. i  $(Y_n)_n$  također niz njd. sl. var. tako da vrijedi  $\mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}Y_1 = \mu$ . Definiramo niz  $(Z_n)_n$  tako da  $Z_{2n-1} = X_n$ ,  $Z_{2n} = Y_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Dokažite da  $(Z_n)_n$  zadovoljava slabi zakon velikih brojeva.

(Napomena: nizovi  $(X_n)_n$  i  $(Y_n)_n$  ne moraju biti međusobno nezavisni.)

**Napomena 6.2 (VAŽNA NAPOMENA).** U konkretnim primjerima često je vrlo korisno za znati da vrijede sljedeće tvrdnje.

Za  $\alpha > -1$  vrijedi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1},$$

što kraće označavamo s  $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim n^{\alpha+1}$  jer nas konstanta u beskonačnosti često ne zanima.

Također, za  $\alpha = -1$  vrijedi  $\sum_{k=1}^n k^\alpha = \sum_{k=1}^n k^{-1} \sim \log n$ , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\log n} = 1.$$

Očito, za  $\alpha < -1$  niz  $(\sum_{k=1}^n k^\alpha)_n$  konvergira pa  $\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim 1$ .

**Zadatak 6.3.** Neka je  $(X_n)_n$  niz nezavisnih sl. var. takvih da  $X_n \sim N(0, cn^\alpha)$  gdje je  $c > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ . Pokažite da  $(X_n)_n$  zadovoljava slabi zakon velikih brojeva za  $\alpha < 1$ .

**Zadatak 6.4.** Neka je dan niz nezavisnih slučajnih varijabli  $(X_n)_n$  takav da  $X_1 = 0$  i

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n \log n}, \quad n \geq 2.$$

Vrijedi li SZVB za  $(X_n)_n$ ?

**Zadatak 6.5.** Neka je  $(X_n)_n$  niz njd. slučajnih varijabli takvih da  $X_1 \sim N(1, 1)$  te neka je  $a > 1$ . Dokažite da  $\sum_{n=1}^\infty \frac{X_n}{a^n}$  konvergira (g.s.).

**Napomena 6.6.** Kada se u zadacima pita vrijedi li jaki zakon velikih brojeva za niz  $(X_n)_n$ , misli se izričito na to konvergira li niz  $(\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{n})_n$  gotovo sigurno.

**Zadatak 6.7.** Neka je  $(X_n)_n$  nezavisan niz takav da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -\sqrt{\ln n} & \sqrt{\ln n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vrijedi li jaki zakon velikih brojeva za  $(X_n)_n$ ?

**Zadatak 6.8.** Neka je  $(X_n)_n$  nezavisan niz takav da

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -n\alpha & 0 & n\alpha \\ \frac{1}{2n^2} & 1 - \frac{1}{n^2} & \frac{1}{2n^2} \end{pmatrix}.$$

Vrijedi li jaki zakon velikih brojeva za  $(X_n)_n$ ?

**Zadatak 6.9.** Neka je dan niz nezavisnih slučajnih varijabli  $(X_n)_n$  takav da  $X_1 = 0$  i

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{4n \log n}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n \log n}, \quad n \geq 2.$$

Vrijedi li JZVB za  $(X_n)_n$ ?

**Zadatak 6.10.** Neka je  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna funkcija. Odredite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{n \text{ puta}} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n.$$

(Uputa: Prikažite integral kao očekivanje pogodne sume nezavisnih slučajnih varijabli.)

## 7 Dodatni zadatci

Dodatne zadatke možete pronaći na krajevima poglavlja sljedećih knjiga:

- Sarapa, N. *Teorija vjerojatnosti*. Školska knjiga. 2002.,
- Durrett, R. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge University Press. 2019. (**dostupna besplatna verzija na autorovoj stranici**),
- Y. S. Chow i H. Teicher. *Probability theory: independence, interchangeability, martingales*. Springer Science & Business Media, 2012.
- Biočić, I. *Teorija vjerojatnosti - vježbe*. skripta