ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi kolokvij 2024/2025 – komentari i česte greške

Zadatak 1.

b) Točan zapis zadane tvrdnje simbolima je

$$(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))\big(A \cap B = \emptyset \Rightarrow (1 \notin A \wedge 1 \notin B)\big)$$

(odnosno $7 \notin A \wedge 7 \notin B$ u drugoj grupi).

Priznaje se $(\forall A, B \subseteq \mathbb{N})$ umjesto $(\forall A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ te $1 \notin A \cup B$ umjesto $1 \notin A \wedge 1 \notin B$. Ne priznaje se prazan skup zapisan kao $\{\emptyset\}$, $\{\}$, $\{0\}$ ili na neki drugi način osim $\emptyset$. Ne priznaje se zapis oblika $\{1\} \notin A$ umjesto $1 \notin A$.

Također, treba obratiti pažnju na zagrade: bez zagrada oko implikacije kvantifikator se odnosi samo na njenu lijevu stranu, pa zapisana formula uopće nije sud već predikat (varijable A i B s desne strane nisu "zatvorene" kvantifikatorom).

Zadatak 2.

a) Najčešće greške u ovom podzadatku:

- Općenito ne vrijedi $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \equiv (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C$. Ako ste imali ovu grešku, vrlo je vjerojatno da ste to učinili nesvjesno jer niste pisali zagrade, pa ubuduće obratite pažnju na to.
- Oduzimani su bodovi za korištenje tvrdnje $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$ (ili slične) bez ikakvog komentara. Ovo nije tvrdnja s predavanja ili vježbi (čak i da je, trebalo bi napisati "dokazano na nastavi" ili tako nešto) i treba je dokazati ako je želite koristiti. Dokaz je jedan red.
- Implikaciju $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C \Rightarrow x \in C \wedge x \notin B$ nije potrebno opravdati sa "$C \subseteq A$ pa možemo ispustiti $x \in A$". Za konjunkciju *uvijek* vrijedi $P \wedge Q \Rightarrow Q$! Ovo opravdanje je trebalo pisati u dokazu suprotnog smjera. kad iz $x \in C \wedge x \notin B$ zaključujete $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C$, jer to ne vrijedi bez pretpostavke $C \subseteq A$.
- Puno studenata je (vjerojatno u žurbi) svoje tvrdnje pisalo vrlo neprecizno (i, zapravo, netočno). Pogrešno je pisati $A \Leftrightarrow B$ ili $A \equiv B$ ako su A i B *skupovi*. Također, izrazi oblika $(B \cap C) \setminus A = (x \in B \wedge x \in C) \wedge x \notin A$ zapravo nemaju smisla (skup je jednak formuli). Isto vrijedi za izraze tipa $(x \in A \wedge x \notin B) \cup C$ (unija formule i skupa?) i bilo kakvo drugo neprecizno miješanje logičke i skupovne notacije.

b) Točno rješenje ovog podzadatka je sljedeće:

Promotrimo $X = \{1, 2\}$ i $Y = \{1\}$. Tada je

$$\mathcal{P}(X \setminus Y) = \mathcal{P}(\{2\}) = \{\{2\}, \emptyset\}$$

i

$$\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y) = \{\{1,2\}, \{1\}, \{2\}, \emptyset\} \setminus \{\{1\}, \emptyset\} = \{\{1,2\}, \{2\}\}$$

pa vidimo da ne vrijedi ni $\mathcal{P}(X \setminus Y) \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y)$ ni obratno. Puno studenata je u raspisu kontraprimjera zaboravilo na prazan skup.

Česte logičke greške: iz $S \in \mathcal{P}(X \setminus Y)$ ne slijedi $S \subseteq X \wedge S \not\subseteq Y$ jer je prazan skup podskup i od $X \setminus Y$ i od Y. Iz $S \in \mathcal{P}(X \setminus Y)$ slijedi $S \subseteq X \wedge S \cap Y = \emptyset$, ali iz toga ponovno nije moguće zaključiti $S \notin \mathcal{P}(Y)$ jer to nije istina za $S = \emptyset$. Također, iz $S \subseteq X \wedge S \not\subseteq Y$ ne slijedi $S \subseteq X \setminus Y$ (promotrite skup $\{1, 2\}$ u gornjem primjeru: on je podskup od $\{1, 2\}$ i nije podskup od $\{1\}$, ali nije podskup od $\{1, 2\} \setminus \{1\}$).

Ovdje je preciznost u zapisu bila jako važna: $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y) = \emptyset$ i $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y) = \{\emptyset\}$ su bitno različite tvrdnje, od kojih prva može biti istinita, a druga nikad nije!

Zadatak 3.

a) Relacija je antisimetrična jer ne postoje različiti $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je $a \gg b$ i $b \gg a$. Ova relacija jest antisimetrična. Studenti koji su napisali "relacija je irefleksivna jer nije refleksivna" su izgubili bod za irefleksivnost. To što relacija nije refleksivna ne znači da je irefleksivna!

   Svako od svojstava je nosilo po jedan bod, osim tranzitivnosti koja je nosila dva.

b) Neki studenti su provjeravali je li relacija $\sim$ relacija ekvivalencije. To je potpuno besmisleno jer je uvjet zadatka da je $\sim$ relacija ekvivalencije.

   Neki su pak "dokazali" da svaka relacija ekvivalencije $\sim$ zadovoljava da je $x \sim y$ za sve x, y. To je također izrazito krivo. U takvim "dokazima" se uglavnom ni ne koriste svojstva od $\gg$.

Zadatak 4.

(i) Nema smisla reći da je npr. gornja međa skupa $\{c, e\}$ (a, e). Gornje međe su elementi skupa A na kojem je definirana relacija, dok je (a, e) element relacije (koja je po definiciji podskup od $A \times A$ i tako je zadana u zadatku). Svi studenti koji su zapisali međe ili supremum/infimum u obliku uređenih parova su na ovom podzadatku dobili 0 bodova.

(ii) Također nije točno reći da su donje međe skupa $\{c, e\}$ elementi $\{a\}, \{b\}, \{c\}$. Točno je reći da su donje međe elementi a, b, c ili da je skup donjih međa $\{a, b, c\}$. Na ovome sada nisu oduzimani bodovi, ali na budućim ispitima hoće.

(iii) Većina studenata je napravila logičku grešku u (4b) zadatku i argumentirala ovako: dokazujemo da je ρ simetrična. Pretpostavimo da je $x\rho y$. Po pretpostavci je tada $\langle x\rangle = \langle y\rangle$ pa je $\langle y\rangle = \langle x\rangle$ i zato je $y\rho x$. Greška je posljednjem zaključku- to ne slijedi iz svojstva navedenog u tekstu zadatka. Jednakost skupova $\langle y\rangle$ i $\langle x\rangle$ je samo nužan, ali ne i dovoljan uvjet da bi vrijedilo $y\rho x$. Da bismo to zaključili bitna je pretpostavka da je relacija refleksivna što se vidi iz sljedećeg primjera.

   Uzmimo $S = \{1, 2\}$ i relaciju $\rho = \{(1, 2), (2, 2)\}$. Tada je $\langle 1\rangle = \langle 2\rangle = \{2\}$. Dakle, vrijedi $\langle 2\rangle = \langle 1\rangle$, ali $(2, 1) \notin \rho$. Primijetimo da ρ nije refleksivna niti simetrična.

   Samim time, studenti koji u dokazu nisu koristili pretpostavku da je ρ refleksivna na ovom podzadatku mogu ostvariti maksimalno 1 bod.

   Točno rješenje je sljedeće:

   (a) **Simetričnost:** Neka je $x\rho y$. Tada je $\langle x\rangle = \langle y\rangle$. Kako je ρ refleksivna vrijedi $x\rho x$ pa je $x \in \langle x\rangle$. Dakle, $x \in \langle y\rangle$ pa je po definiciji tog skupa $y\rho x$.

   (b) **Tranzitivnost:** Neka su $x\rho y$ i $y\rho z$. Tada je posebno $\langle x\rangle = \langle y\rangle$. Kako je $y\rho z$ slijedi $z \in \langle y\rangle$ pa je $z \in \langle x\rangle$, odnosno $x\rho z$. Primijetimo da tu nije bila potrebna refleksivnost.

   Alternativno, iz $x\rho y$ i $y\rho z$ slijedi $\langle x\rangle = \langle y\rangle = \langle z\rangle$. Po refleksivnosti je $z \in \langle z\rangle$ pa je $z \in \langle x\rangle$, odnosno $x\rho z$.

   Refleksivnost nije trebalo pokazivati jer je navedeno u zadatku da vrijedi. Velik broj studenata je "dokazao" refleksivnost iz činjenice da je za svaki $x \in S$

$$x\rho x \Rightarrow \langle x\rangle = \langle x\rangle$$

   očito istinita implikacija jer je $\langle x\rangle = \langle x\rangle$ uvijek istina. Iz toga ništa ne možete zaključiti o istinosti tvrdnje $x\rho x$: implikacija $A \Rightarrow B$ može biti istinita i kada je A istinit i kada je A lažan.

Zadatak 5.

Dosta su strogo kažnjavane pogreške gdje tvrdnja koju treba dokazati za $n+1$ nije točno iskazana. Bez toga je nemoguće doći imalo blizu rješenja jer se ne dokazuje ispravna tvrdnja.

Točan oblik tvrdnje za $n+1$ je

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ako nemate to, onda vjerojatno nemate više od 5 bodova.