MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 25. kolovoza 2025.

Zadatak 1. *(ukupno 24 boda)* Dana je funkcija

$$f(x) = \mathrm{tg}(2x) + \mathrm{ctg}(2x).$$

(a) (8 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije f.

(b) (8 bodova) Odredite najveći interval I koji sadrži točku $\frac{\pi}{8}$ na kojem je funkcija f injekcija.

(c) (8 bodova) Odredite $f(\langle 0, \frac{\pi}{8}])$.

Rješenje.

(a) $g(x) = x + x^{-1}$, $h(x) = \mathrm{tg}(2x)$, $f = g \circ h$.

$\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus (\{(2k+1)\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}) = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{4} : k \in Z\}$.

(b) <u>1. način</u>: Funkcija h je dobro definirana i injekcija na $\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle \ni \frac{\pi}{8}$ te je $h(\frac{\pi}{8}) = 1$ i $h(\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle) = \langle -\infty, \infty\rangle$.

Funkcija $g(x) = x + x^{-1}$ je neprekidna na $\langle 0, \infty\rangle \ni 1$.

Provjerimo kada je funkcija g injekcija.

Iz $x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y}$ slijedi $(x, y \neq 0)$ da je $(x-y)(1-xy) = 0$.

Dakle, $g(x)$ postiže iste vrijednosti točno onda kada je $y = \frac{1}{x}$.

Slijedi da je mogući interval $\langle 0, \frac{\pi}{8}]$ ili $[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\rangle$.

<u>2. način</u> Zapišimo $f(x) = \frac{\cos(2x))}{\sin(2x)} + \frac{\sin(2x))}{\cos(2x)} = \frac{2}{\sin(4x)}$. Opet se dobije $\langle 0, \frac{\pi}{8}]$ ili $[\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\rangle$.

(c) <u>1. način</u>: Funkcija h je rastuća neprekidna funkcija na $\langle 0, \infty\rangle$, pa je $h(\langle 0, \frac{\pi}{8}]) = \langle 0, 1]$.

Tražimo $g(\langle 0, 1])$. Uočimo da je $x + x^{-1} = 2$, za $x = 1$.

Dokažimo da je $x + x^{-1} \geq 2$, za $x \in \langle 0, 1\rangle$.

Vrijedi $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \geq 0$, pa je $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Dakle, minimum funkcije f je 2.

Također, $\lim_{x\to 0^+} x + x^{-1} = +\infty$, pa je maksimum te funkcije $+\infty$.

Budući da je g neprekidna funkcija, slijedi da je $f(\langle 0, \frac{\pi}{8}]) = [2, \infty\rangle$.

<u>2. način</u>: Zapišimo $f(x) = \frac{\cos(2x))}{\sin(2x)} + \frac{\sin(2x))}{\cos(2x)} = \frac{2}{\sin(4x)}$.

Budući da je $\sin(4x)$ rastući na $\langle 0, \frac{\pi}{8}]$, slijedi da je f padajuća neprekidna funkcija te je $f(\langle 0, \frac{\pi}{8}]) = [2, \infty\rangle$.

Zadatak 2. *(ukupno 24 boda)*

(a) (12 bodova) Dokažite da sljedeći limes postoji i odredite ga.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 1 + \cdots + \ln n}{n \ln n}.$$

(b) (12 bodova) Niz $(a_n)_n$ zadan je s:

$$a_n = \min\{m \in \mathbb{N} : m^2 + 2m > n\}$$

Postoji li limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}?$$

Rješenje.

(a) Označimo $a_n = \ln 1 + \cdots + \ln n$ i $b_n = n \ln n$. Budući da je b_n strogo rastuć niz (jer je b_n produkt dviju pozitivnih strogo rastućih funkcija) i budući da je $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$, koristeći Cesaro–Stolzov teorem dovoljno je pokazati da postoji limes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}.$$

Međutim:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \frac{\ln(n+1)}{(n+1)\ln(n+1) - n \ln n} = \frac{\ln(n+1)}{n(\ln(n+1) - \ln n) + \ln(n+1)} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n \ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(n+1)} = \frac{1}{\frac{1}{\ln(n+1)} \cdot \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} + 1} \to \frac{1}{0 \cdot 1 + 1} = 1,\end{aligned}$$

gdje smo u predzadnjoj jednakosti koristili limes $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ te teoreme o limesu zbroja i produkta.

Dakle, po Cesaro–Stolzovom teoremu vrijedi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(b) Po definiciji niza vrijedi $a_n^2 + 2a_n > n$ i $(a_n - 1)^2 + 2(a_n - 1) \leq n$. Budući da je $a_n \geq 0$ po definiciji, iz prve nejednakosti slijedi

$$(a_n + 1)^2 > n + 1 \implies a_n > \sqrt{n+1} - 1,$$

dok iz druge nejednakosti analogno slijedi

$$a_n^2 \leq n + 1 \implies a_n \leq \sqrt{n+1}.$$

Dakle,

$$\frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Budući da vrijedi

$$\frac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \to 1$$

i

$$\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \to 1,$$

po teoremu o sendviču slijedi $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$.

Zadatak 3. *(ukupno 26 bodova)*

(a) (16 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$\left\{\frac{2n-1}{n^2-2n+2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(b) (10 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ omeđena funkcija. Dokažite da vrijedi

$$\sup\{f(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\} = \sup\{\sup\{f(x,y)\mid y\in\mathbb{R}\} \mid x\in\mathbb{R}\}.$$

Rješenje.

(a) Promotrimo niz (x_n) zadan s $x_n = \frac{2n-1}{n^2-2n+2}$ za $n\in\mathbb{N}$. Uočimo da vrijedi

$$x_{n+1}-x_n = \frac{2n+1}{n^2+1} - \frac{2n-1}{n^2-2n+2} = \frac{3-2n^2}{(n^2+1)(n^2-2n+2)}.$$

Dakle, vrijedi $x_1 < x_2$, dok za $n\geq 2$ imamo $x_n > x_{n+1}$ (niz je padajuć od drugog člana nadalje). Iz toga zaključujemo da je traženi supremum jednak $x_2 = \frac{3}{2}$, dok je infimum jednak

$$\min\left\{x_1, \lim_{n\to\infty} x_n\right\} = \min\{1,0\} = 0.$$

(b) Označimo s M supremum na lijevoj strani. Tada za svaki $x\in\mathbb{R}$ imamo da je M gornja međa za skup $\{f(x,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$, dakle vrijedi $\sup\{f(x,y)\mid y\in\mathbb{R}\}\leq M$. Dakle, M je gornja međa za skup

$$\{\sup\{f(x,y)\mid y\in\mathbb{R}\}\mid x\in\mathbb{R}\}.$$

Obratno, za dani $\varepsilon>0$ možemo odabrati $x_0,y_0\in\mathbb{R}$ takve da je $f(x_0,y_0)>M-\varepsilon$. Tada je

$$\sup\{f(x_0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}\geq f(x_0,y_0) > M-\varepsilon.$$

Time smo dokazali da je supremum na desnoj strani upravo jednak M.

Zadatak 4. *(ukupno 26 bodova)*

(a) (16 bodova) Izračunajte limes
$$\lim_{x\to\infty} \lfloor x\rfloor \cos\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)\sin\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

(b) (10 bodova) Neka je $f\colon [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokažite da je funkcija
$$g\colon [0,\infty\rangle \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sup\{f(t) \mid t \in [0,x]\}$$
neprekidna zdesna u svakoj točki $x \in [0,\infty\rangle$.

Rješenje.

(a) Uočimo da vrijedi
$$\lfloor x\rfloor \cos\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)\sin\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{\lfloor x\rfloor}{x}\cdot\cos\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)\cdot\frac{\sin(1/x)}{1/x}.$$
Kako je $x-1 < \lfloor x\rfloor \leq x$, imamo $1-\frac{1}{x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leq 1$ za $x>0$, odakle po teoremu o sendviču slijedi
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x} = 1.$$
Nadalje, kako je $|\sin x| \leq 1$, imamo $0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ za $x>0$, odakle po teoremu o sendviču slijedi
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0.$$
Budući da je funkcija cos neprekidna, slijedi
$$\lim_{x\to\infty}\cos\Big(\frac{\sin x}{x}\Big) = \lim_{y\to 0}\cos y = \cos 0 = 1.$$
Budući da je $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$, slijedi
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1.$$
Konačno, po teoremu o limesu produkta slijedi da je traženi limes jednak $1\cdot 1\cdot 1 = 1$.

(b) Neka je dan $\varepsilon > 0$. Po neprekidnosti f u x zdesna odaberimo $\delta > 0$ takav da za $y \in [x, x+\delta\rangle$ vrijedi $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$. Neka je sada $y \in [x, x+\delta\rangle$. S jedne strane, imamo $g(y) \geq g(x)$. S druge strane, ako je $t \in [0,y]$, tada u slučaju $t \in [0,x]$ imamo $f(t) \leq g(x)$, dok u slučaju $t \in [x,y]$ imamo
$$f(t) < f(x) + \varepsilon \leq g(x) + \varepsilon.$$
Dakle, u svakom slučaju slijedi $f(t) \leq g(x)+\varepsilon$ pa uzimanjem supremuma dobivamo $g(y) \leq g(x)+\varepsilon$. Time smo dokazali da $|g(y)-g(x)| \leq \varepsilon$ te smo gotovi.