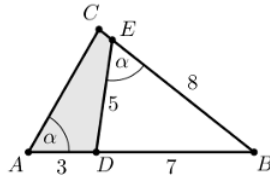


1. Zadan je trokut ABC . Točka D nalazi se na stranici $\overline{AB}$, a točka E na stranici $\overline{BC}$ tako da je $|AD| = 3$, $|BD| = 7$, $|BE| = 8$, $|DE| = 5$ i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DEB$. Odredite površinu četverokuta $ADEC$.
Rješenje.



Trokuti ABC i EBD slični su po $K - K$ poučku o sličnosti jer imaju dva para sukladnih kutova ($\sphericalangle BAC = \sphericalangle DEB$, $\sphericalangle CBA$ im je zajednički).

Koeficijent sličnosti tih trokuta iznosi

$$k = \frac{|AB|}{|BE|} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Površinu trokuta EBD računamo koristeći Heronovu formulu:

$$P(\triangle EBD) = \sqrt{10 \cdot (10 - 8) \cdot (10 - 7) \cdot (10 - 5)} = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = 10\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Za površine sličnih trokuta vrijedi da je

$$\frac{P(\triangle ABC)}{P(\triangle EBD)} = k^2.$$

Površina trokuta ABC iznosi:

$$P(\triangle ABC) = P(\triangle EBD) \cdot k^2 = 10\sqrt{3} \cdot \frac{25}{16} = \frac{125\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2.$$

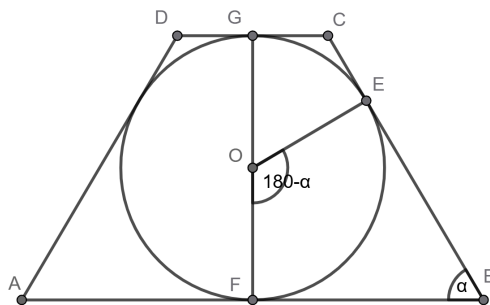
Površina četverokuta $ADEC$ iznosi:

$$P(ADEC) = P(\triangle ABC) - P(\triangle EBD) = \frac{125\sqrt{3}}{8} - 10\sqrt{3} = \frac{45\sqrt{3}}{8} \text{ cm}^2.$$

Napomena: Moguće je pomoću kosinusovog poučka odrediti kut α te pomoću toga izračunati površinu trokuta umjesto korištenja Heronove formule.

2. Zadani su duljina r i mjera kuta α tako da je $\alpha < 90^\circ$. Konstruirajte jednakokračan tangencijalni trapez $ABCD$ s upisanom kružnicom radijusa r takav da je $\angle ABC = \alpha$. Napišite opis i dokažite ispravnost konstrukcije.

Rješenje.



Skiciramo ovakav trapez, njegovu upisanu kružnicu sa središtem O te dirališta E i F upisane kružnice sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Možemo primijetiti da je $\angle FOE = 180^\circ - \alpha$. To nas motivira za sljedeću konstrukciju:

Opis konstrukcije.

- (i) Konstruiramo pravce p i q koji se sijeku u točki O pod kutem α . Nacrtamo kružnicu $k = k(O, r)$. Označimo točke $\{F, G\} = p \cap k$ i $E \in q \cap k$ tako da je $\angle FOE = 180^\circ - \alpha$.
- (ii) Konstruiramo okomicu na OE u točki E i okomicu na OF u točki F . Njihovo sjecište označimo s B .
- (iii) Konstruiramo okomicu na OG u točki G , njeno sjecište s pravcem BE označimo s C .
- (iv) Konstruiramo osnosimetrične slike od B i C obzirom na pravac FG , te točke označimo s A i D .

Dokaz.

Budući da je, iz koraka (iv), $AB \perp FG$ i $CD \perp FG$, imamo $AB \parallel CD$. Također iz koraka (iv) slijedi da je $|BC| = |AD|$, dakle $ABCD$ je jednakokračan trapez.

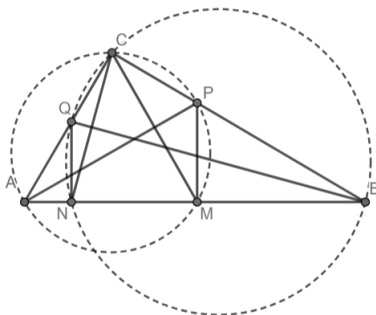
Kružnica k dodiruje stranice trapeza u točkama F , E i G , a četvrtu stranicu u osnosimetričnoj slici od E , dakle k je upisana kružnica tog trapeza, stoga je trapez tangencijalan.

Iz koraka (iii) i (iv) vidimo da je $\angle ABC = \angle FBE$, a iz koraka (i) i (ii) imamo da je $\angle FBE = 180^\circ - \angle FOE = \alpha$, dakle $\angle ABC = \alpha$.

Napomena: Korak (iv) se može napraviti isto kao koraci (ii) i (iii), tada je potrebno prilagoditi dokaz da slijedi korake konstrukcije.

3. Dan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom u vrhu C . Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki P , a simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki Q . Ako su M i N točke na stranici $\overline{AB}$ takve da vrijedi $MP \perp AB$ i $NQ \perp AB$, odredite kut $\sphericalangle MCN$.

Rješenje



Označimo $\sphericalangle CAB = \alpha$. Budući da je $\sphericalangle ACP + \sphericalangle AMP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, četverokut $AMPC$ je tetivan, odnosno po Talesovom poučku točke A, M, P i C leže na kružnici s promjerom $\overline{AP}$. Koristeći činjenicu da je AP simetrala kuta i obodne kuteve slijedi da je

$$\sphericalangle MCP = \sphericalangle MAP = \alpha/2.$$

Analogno dobivamo

$$\sphericalangle NCQ = \sphericalangle NBQ = (90^\circ - \alpha)/2 = 45^\circ - \alpha/2.$$

Sada je

$$\sphericalangle MCN = \sphericalangle BCA - \sphericalangle BCM - \sphericalangle NCA = 90^\circ - (45^\circ - \frac{\alpha}{2}) - \frac{\alpha}{2} = 45^\circ.$$

Napomena: Sve tvrdnje u zadatku također je moguće dobiti samo pomoću sličnosti/sukladnosti.

4. Dan je trokut ABC . Točka D je nožište visine iz A , a točke E i F su polovišta stranica AC i AB redom. Ako je $|EF| = a$ i $\cos \sphericalangle EDF = \frac{1}{3}$, odredite radijus opisane kružnice trokuta ABC .

Rješenje.

Označimo radijus opisane kružnice trokuta ABC sa R . Točke E , D i F leže na Feuerbachovoj kružnici. Na više načina (sličnost, homotetija) možemo vidjeti da je radijus opisane kružnice trokuta EDF jednak $\frac{R}{2}$

Označimo $\sphericalangle EDF = \alpha$. Budući da je $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, vrijedi

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Po sinusovom poučku, radijus opisane kružnice trokuta EDF jednak

$$\frac{R}{2} = \frac{|EF|}{2 \sin \alpha} = \frac{3a}{4\sqrt{2}}.$$

$$\text{Dakle } R = \frac{3\sqrt{2}}{4} a.$$

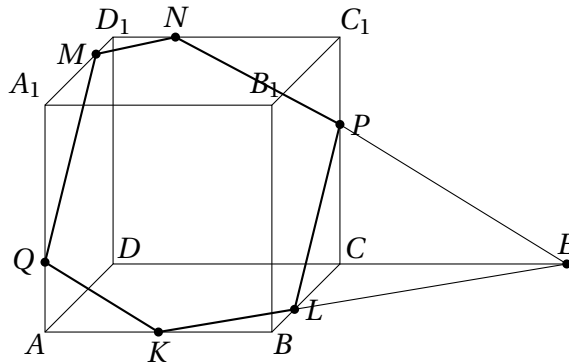
5. Dana je kocka $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ brida duljine a . Točka K je polovište stranice $\overline{AB}$, točka L nalazi se na stranici BC tako da je $|BL| = \frac{1}{3}|BC|$. Točka M nalazi se na stranici $\overline{A_1 D_1}$ tako da je $|A_1 M| = 3|MD_1|$. Odredite presjek dane kocke ravninom koja prolazi točkama K, L i M . Skicirajte taj presjek i odredite duljine neke tri stranice dobivenog mnogokuta.

Rješenje.

Odredimo prvo presjek ravnine s kockom.

- Paralelu s KL u točki M presječemo s $C_1 D_1$, nazovimo tu točku N .
- Pravci KL i CD sijeku se u točki E . Pravac EN siječe brid $\overline{CC_1}$ u točki P .
- Paralela s NP kroz K siječe AA_1 u točki Q .

Presjek kocke i ravnine je šesterokut $KLPNMQ$.



Sada koristimo sličnosti i Pitagorin poučak da bismo odredili duljine bridova. Direktno iz Pitagorinog poučka imamo

$$|KL| = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{6}a.$$

Zbog paralelnosti stranica trokuta $MD_1 N$ i LBK su slični.

$$\frac{|D_1 N|}{|D_1 M|} = \frac{|BK|}{|BL|} = \frac{3}{2} \implies |D_1 N| = \frac{3}{8}a.$$

Koristeći Pitagorin poučak dobivamo

$$|MN| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{8}a\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{8}a$$

Koristeći sličnost trokuta KBL i ECL dobivamo $|CE| = a$. Koristeći sličnost trokuta PCE i $PC_1 N$ dobivamo

$$\frac{|PC|}{|PC_1|} = \frac{|CE|}{|C_1 N|} = \frac{8}{5} \implies |PC_1| = \frac{5}{13}a.$$

Po Pitagorinom poučku je

$$|NP| = \sqrt{\left(\frac{5}{8}a\right)^2 + \left(\frac{5}{13}a\right)^2} = \frac{5\sqrt{233}}{104}a.$$