

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Rješenja – drugi jesenski rok, 10. rujna 2026.

Zadatak 1.**(a)**

Zadana tvrdnja simbolima glasi

$$(\forall A \subseteq \mathbb{N})(((\forall x \in A)(2 \mid x \vee 4 \mid x))) \Rightarrow ((\forall y \in \mathbb{N})((2 \nmid y) \Rightarrow y \notin A)).$$

Ona je **istinita**, jer iz $4 \mid x$ također slijedi $2 \mid x$, pa uvjet $2 \mid x$ ili $4 \mid x$ zapravo znači da je svaki element skupa A paran, odnosno ne postoji neparan element.

Obrat zadane tvrdnje je

$$(\forall A \subseteq \mathbb{N})(((\forall y \in \mathbb{N})((2 \nmid y) \Rightarrow y \notin A)) \Rightarrow ((\forall x \in A)(2 \mid x \vee 4 \mid x))).$$

I on je **istinit**: ako A ne sadrži neparan broj, onda je svaki njegov član djeljiv s 2, pa svakako vrijedi $2 \mid x$ ili $4 \mid x$.

Obrat po kontrapoziciji je

$$(\forall A \subseteq \mathbb{N})(((\exists y \in \mathbb{N})(2 \nmid y \wedge y \in A)) \Rightarrow ((\exists x \in A)(2 \nmid x \wedge 4 \nmid x))).$$

Ta je tvrdnja **istinita** jer je logički ekvivalentna zadanoj implikaciji.

Negacija zadane tvrdnje je

$$(\exists A \subseteq \mathbb{N})(((\forall x \in A)(2 \mid x \vee 4 \mid x))) \wedge (\exists y \in \mathbb{N})(2 \nmid y \wedge y \in A).$$

Negacija je **neistinita** jer je početna tvrdnja istinita.**NAPOMENA:** Česta greška je bila zapis dane tvrdnje simbolima kao

$$(\forall A \subseteq \mathbb{N})(\forall x \in A)((2 \mid x \vee 4 \mid x)) \Rightarrow ((\forall y \in \mathbb{N})((2 \nmid y) \Rightarrow y \notin A)).$$

Ova tvrdnja nije istinita jer za $A = \{1, 2\}$ i $x = 2 \in A$ ne vrijedi zapisana implikacija (vrijedi lijeva strana, a ne vrijedi desna jer možemo uzeti $y = 1$).

(b)Treba matematičkom indukcijom dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Baza indukcije. Za $n = 1$ imamo

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4},$$

pa tvrdnja vrijedi.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Korak indukcije. Tada

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} &= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ &= 1 + \frac{-(n+2)^2 + (2n+3)}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ &= 1 - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+2)^2}. \end{aligned}$$

Dakle tvrdnja vrijedi i za $n+1$. Prema principu matematičke indukcije vrijedi za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 2.

Neka je $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Na skupu $\mathcal{P}(S)$ zadana je relacija

$$A \sim B \iff A \Delta B \subseteq \{1, 2\}.$$

(a)

Provjerimo svojstva relacije ekvivalencije.

Refleksivnost. Za svaki $A \subseteq S$ vrijedi

$$A \Delta A = \emptyset \subseteq \{1, 2\},$$

pa je $A \sim A$.

Simetričnost. Ako je $A \sim B$, tada

$$A \Delta B \subseteq \{1, 2\}.$$

Budući da je $A \Delta B = B \Delta A$, slijedi $B \sim A$.

Tranzitivnost. Dokažimo prvo da za bilo koje skupove A, B, C vrijedi

$$A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C).$$

Neka je $x \in A \Delta C$. Tada x pripada točno jednom od skupova A i C .

Pretpostavimo najprije da je $x \in A$ i $x \notin C$. Ako je $x \notin B$, tada je

$$x \in A \setminus B \subseteq A \Delta B.$$

Ako je $x \in B$, tada je

$$x \in B \setminus C \subseteq B \Delta C.$$

Dakle, u oba slučaja vrijedi

$$x \in (A \Delta B) \cup (B \Delta C).$$

Analogno, ako je $x \in C$ i $x \notin A$, tada: ako je $x \notin B$, imamo

$$x \in C \setminus B \subseteq B \Delta C,$$

dok za $x \in B$ vrijedi

$$x \in B \setminus A \subseteq A \Delta B.$$

Prema tome,

$$x \in (A \Delta B) \cup (B \Delta C).$$

Budući da je $x \in A \Delta C$ bio proizvoljan, slijedi

$$A \Delta C \subseteq (A \Delta B) \cup (B \Delta C).$$

Sada, ako je $A \sim B$ i $B \sim C$, tada

$$A \Delta B \subseteq \{1, 2\}, \quad B \Delta C \subseteq \{1, 2\}.$$

pa korištenjem dokazane inkluzije slijedi

$$A \Delta C \subseteq \{1, 2\}.$$

Dakle $A \sim C$.

Prema tome, $\sim$ je **relacija ekvivalencije**.

Relacija nije parcijalni uređaj jer nije antisimetrična. Na primjer,

$$\emptyset \sim \{1\}, \quad \{1\} \sim \emptyset,$$

ali je $\emptyset \neq \{1\}$. Stoga $\sim$ **nije relacija parcijalnog uređaja**.

(b)

Skup B pripada klasi ekvivalencije skupa $\{1, 3, 4\}$ ako i samo ako se od njega može razlikovati samo u elementima 1 i 2.

Elementi 3 i 4 zato moraju ostati u skupu, a elementi 5 i 6 moraju ostati izvan skupa. Članstvo elemenata 1 i 2 možemo birati proizvoljno. Stoga

$$[\{1, 3, 4\}] = \{\{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

(c)

Dva podskupa skupa S su relaciji $\sim$ ako i samo ako za svaki element skupa

$$\{3, 4, 5, 6\}$$

vrijedi da ga ta oba skupa sadrže ili ga oba ne sadrže. Dakle svaka klasa ekvivalencije jednoznačno je određena izborom podskupa od $\{3, 4, 5, 6\}$. Takvih podskupova ima

$$2^4 = 16.$$

Stoga $|\mathcal{P}(S)/\sim| = 16$.

Zadatak 3.

(a)

Pretpostavimo suprotno, da postoji samo konačno mnogo prostih brojeva oblika $3m + 2$. Označimo ih s

$$p_1 = 2, p_2 = 5, p_3, \dots, p_k.$$

Promotrimo broj

$$N = 3p_2 \cdots p_k + 2.$$

Tada je $N \equiv 2 \pmod{3}$. Osim toga, za svaki $i = 2, \dots, k$ vrijedi

$$N \equiv 2 \pmod{p_i},$$

pa nijedan od brojeva p_i ne dijeli N .

Neka je

$$N = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_r^{\alpha_r}$$

rastav broja N na proste faktore. Budući da $3 \nmid N$, nijedan q_j nije jednak 3. Svaki q_j zato je kongruentan s 1 ili 2 modulo 3.

Kad bi svi q_j bili kongruentni s 1 modulo 3, njihov bi umnožak bio kongruentan s 1 modulo 3, što je nemoguće jer je $N \equiv 2 \pmod{3}$. Prema tome barem jedan prost faktor q_j zadovoljava

$$q_j \equiv 2 \pmod{3}.$$

Dakle q_j je prost broj oblika $3m + 2$. Očito, $q_j \neq 2$ jer je N neparan. Nadalje, q_j nije jednak nijednom od $p_2, \dots, p_k$ jer nijedan od tih brojeva ne dijeli N . To je kontradikcija.

Stoga postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $3m + 2$.

(b)

1. način: Iz $37n = 12m$ i $M(37, 12) = 1$ slijedi da $12 \mid n$ i $37 \mid m$. Stoga postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n = 12k$. Uvrštavanjem u početnu jednakost dobivamo

$$37 \cdot 12k = 12m,$$

pa je $m = 37k$. Prema tome

$$n + m = 12k + 37k = 49k,$$

pa vrijedi $49 \mid (n + m)$.

2. način: Iz $37n = 12m$ slijedi $m = \frac{37}{12}n$, pa je

$$n + m = n + \frac{37}{12}n = \frac{49}{12}n.$$

Nadalje, iz $37n = 12m$ zaključujemo $12 \mid 37n$, a kako su 12 i 37 relativno prosti, slijedi $12 \mid n$, tj. $n = 12k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Stoga je

$$n + m = \frac{49}{12} \cdot 12k = 49k,$$

odnosno $49 \mid n + m$.

3. način: Treba dokazati $49 \mid n + m$. Kako je $M(12, 49) = 1$, dovoljno je dokazati $49 \mid 12n + 12m$. Prema uvjetu zadatka imamo $12n + 12m = 12n + 37n = 49n$, što je očito djeljivo sa 49.

Zadatak 4.

(a)

Zadan je polinom

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + ax + b,$$

koji ima jednu dvostruku nultočku, a preostale dvije nultočke su suprotni brojevi. Označimo nultočke polinoma sa

$$\alpha \text{ (dvostruka)}, \quad \beta, \quad -\beta.$$

1. način: Vieteove formule daju

$$\alpha + \alpha + \beta - \beta = 2 \quad \implies \quad \alpha = 1.$$

Dakle, dvostruka nultočka zadanog polinoma je 1. Stoga vrijedi $f'(1) = f(1) = 0$, pa imamo:

$$\begin{aligned} 0 = f(1) &= 1 - 2 - 2 + a + b & \implies & a + b = 3 \\ 0 = f'(1) &= 4 - 6 - 4 + a & \implies & a = 6. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $a = 6$ u prvu jednadžbu dobivamo $b = -3$.

Podijelimo polinom f sa $(x - 1)^2$, npr. Hornerovim algoritmom i dobivamo

$$f(x) = (x - 1)^2(x^2 - 3),$$

pa su preostale dvije nultočke tada $\pm\beta = \pm\sqrt{3}$.

2. način: Budući da je polinom normiran, može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha)^2(x - \beta)(x + \beta) = (x - \alpha)^2(x^2 - \beta^2) \\ &= (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2)(x^2 - \beta^2) \\ &= x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 - \beta^2)x^2 + 2\alpha\beta^2x - \alpha^2\beta^2. \end{aligned}$$

Uspoređujući koeficijente dobivamo sustav

$$\begin{cases} -2\alpha = -2 \\ \alpha^2 - \beta^2 = -2 \\ a = 2\alpha\beta^2 \\ b = -\alpha^2\beta^2 \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe slijedi $\alpha = 1$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo

$$1 - \beta^2 = -2 \quad \implies \quad \beta^2 = 3 \quad \implies \quad \beta = \pm\sqrt{3}.$$

Stoga su preostale dvije nultočke $\pm\beta = \pm\sqrt{3}$.

Preostale koeficijente određujemo iz posljednje dvije jednadžbe:

$$a = 2\alpha\beta^2 = 6 \quad \text{i} \quad b = -\alpha^2\beta^2 = -3.$$

(b)

Najprije rastavimo polinom u nazivniku. Hornerov algoritam daje

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 1 & -10 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

pa je 2 nultočka polinoma u nazivniku i vrijedi

$$(x^3 + x - 10)^2 = (x - 2)^2(x^2 + 2x + 5)^2.$$

Kvadratni polinom $x^2 + 2x + 5$ nema realnih nultočaka jer je $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$.

Traženi oblik rastava na parcijalne razlomke je zato

$$\frac{1}{(x^3 + x - 10)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 5} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2x + 5)^2},$$

za neke konstante $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.