Dijana Ilišević i Mea Bombardelli

# ELEMENTARNA GEOMETRIJA

skripta

verzija 1.0

9. 10. 2007.

# Predgovor

Kolegij Elementarna geometrija je na PMF–Matematičkom odjelu uveden na prvu godinu studija profila profesor matematike, profesor matematike i informatike, profesor matematike i fizike u ak. god. 2004./05. Ak. god. 2005./06. započelo se s izvođenjem nastave po programima usklađenim s Bolonjskom deklaracijom i danas se nastava iz ovog kolegija izvodi za studente prve godine preddiplomskog sveučilišnog studija matematike, smjer nastavnički, te integriranog preddiplomskog i diplomskog sveučilišnog studija matematike i fizike, smjer nastavnički, sa satnicom od dva sata predavanja i dva sata vježbi tjedno u prvom semestru studija.

Kolegij Elementarna geometrija je uveden kao rezultat potrebe za sistematiziranjem, proširivanjem i produbljivanjem znanja osnovnoškolske i srednjoškolske geometrije i važan je dio obrazovanja budućih učitelja / profesora matematike.

Ova skripta je nastala na temelju predavanja iz Elementarne geometrije koja je doc.dr.sc. Dijana Ilišević držala ak. god. 2004./05., 2005./06. i 2006./07.

Skripta pokriva područje planimetrije i sastoji se od sedam poglavlja: Istaknuti skupovi točaka u ravnini, Sukladnost trokuta, Površina, Sličnost trokuta, Teoremi o kružnici, Trigonometrija trokuta, Preslikavanja ravnine. Za praćenje izloženog teksta nije potrebno posebno predznanje.

Iako je skripta prvenstveno namijenjena studentima matematike, vjerujemo da može poslužiti i učiteljima / profesorima matematike kao i učenicima osnovnih i srednjih škola.

Bit ćemo zahvalne svima koji nam ukažu na eventualne zaostale pogreške ili nam iznesu korisne primjedbe. Možete nam se javiti e-poštom na adrese `Dijana.Ilisevic@math.hr` i `Mea.Bombardelli@math.hr`.

doc.dr.sc. Dijana Ilišević

dr.sc. Mea Bombardelli

# Poglavlje 1

# Istaknuti skupovi točaka u ravnini

Planimetrija je ravninska geometrija. Ravninu možemo predočiti tankim papirom.

Osnovni planimetrijski objekti su **točka** i **pravac**. Njih ne definiramo. Točku predočavamo vrhom nekog šiljastog predmeta, a pravac napetom niti.

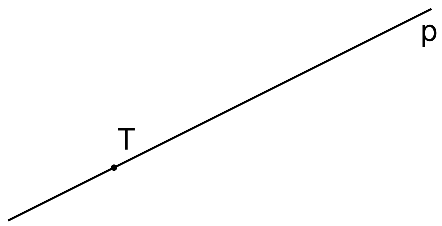
Točke ćemo označavati velikim slovima $(A, B, C, \dots)$, a pravce malim $(a, b, c, \dots)$.

Pretpostavljamo da su pravci i točke u izvjesnoj vezi (odnosu):

pravac $p$ prolazi točkom $T$

točka $T$ leži na pravcu $p$

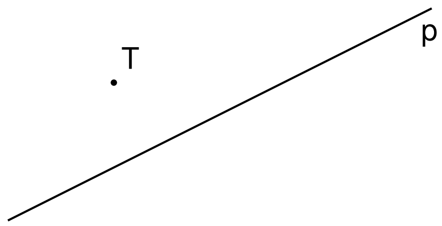
$T \in p$




pravac $p$ ne prolazi točkom $T$

točka $T$ leži izvan pravca $p$

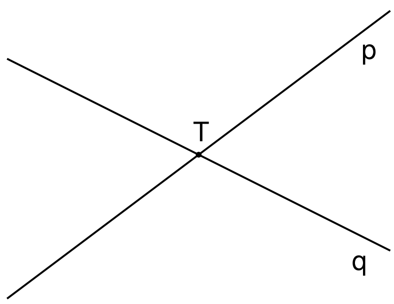
$T \notin p$

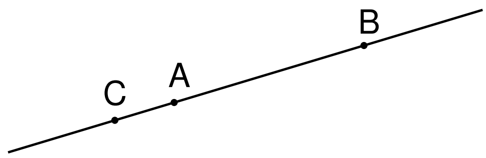
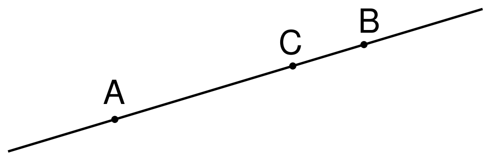
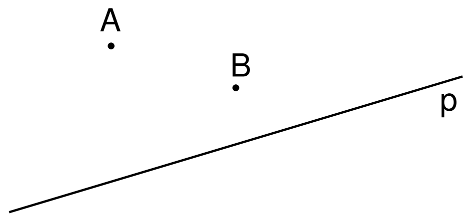
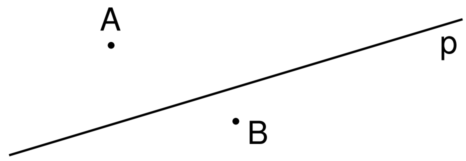



pravci $p$ i $q$ se sijeku u točki $T$

točka $T$ je sjecište pravaca $p$ i $q$

$p \cap q = \{T\}$

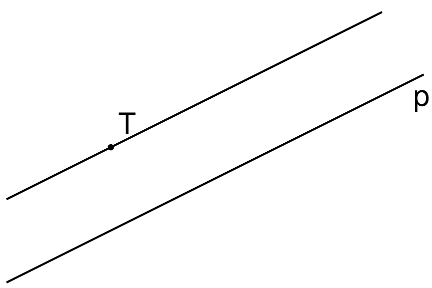


<table>
<tr><td>točke $A$ i $B$ leže s iste strane točke $C$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>točke $A$ i $B$ leže sa suprotnih strana točke $C$<br>točka $C$ leži između $A$ i $B$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>točke $A$ i $B$ leže s iste strane pravca $p$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>točke $A$ i $B$ leže sa suprotnih strana pravca $p$</td><td>
</td></tr>
</table>

Ako su $A$ i $B$ različite točke koje leže na pravcu $p$, tada pravac $p$ nazivamo i pravac $AB$.

Za dva pravca $p$ i $q$ kažemo da su **paralelni** i pišemo $p \parallel q$ ako se ili podudaraju ili ne sijeku.

**Euklidov peti aksiom (aksiom o paralelama).** *Zadanom točkom izvan zadanog pravca prolazi točno jedan pravac paralelan danom pravcu.*



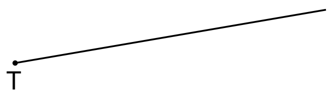
Za razliku od ostalih Euklidovih aksioma, aksiom o paralelama nije očigledan, teško ga je eksperimentalno provjeriti i komplicirano je formuliran. Zato je vrlo rano postavljena hipoteza da taj aksiom nije aksiom nego teorem. Stoga su ga mnogi matematičari pokušali dokazati, ali se u 19. stoljeću, nakon brojnih neuspjelih pokušaja, pokazalo da je aksiom o paralelama nemoguće dokazati pomoću ostalih Euklidovih aksioma. Naime, usporedo s euklidskom geometrijom (u kojoj se taj aksiom prihvaća) moguće je izgraditi i drugu geometriju u kojoj taj aksiom ne vrijedi.

**Teorem 1.1.** *Neka su $p, q, r$ međusobno različiti pravci. Ako je $p \parallel q$ i $q \parallel r$, tada je $p \parallel r$ (tranzitivnost relacije "biti paralelan").*

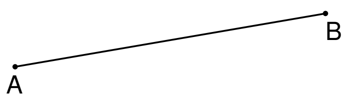
*Dokaz.* Pretpostavimo da nije $p \parallel r$. Tada se $p$ i $r$ sijeku. Sjecište pravaca $p$ i $r$ označimo s $T$. Jasno je da $T$ ne leži na $q$ jer bi se tada $p$ i $q$ sjekli u $T$. Zaključili smo da kroz točku $T$ izvan pravca $q$ prolaze dva različita pravca ($p$ i $r$) koji su paralelni s $q$. To je u kontradikciji s aksiomom o paralelama. Dakle, $p \parallel r$. □

Sada ćemo definirati neke istaknute skupove točaka u ravnini.

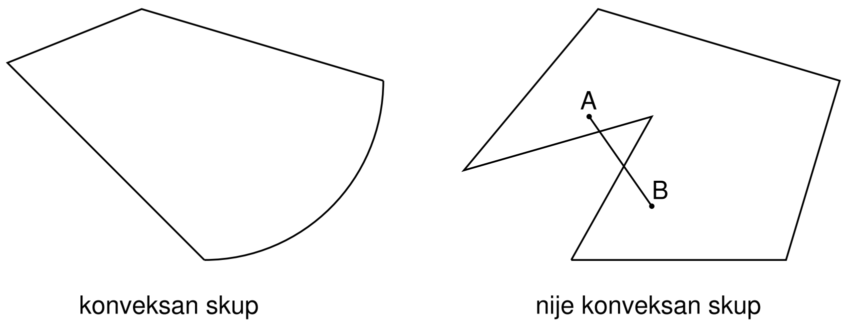
Neka je $T$ točka koja leži na pravcu $p$. **Polupravac** je skup svih točaka pravca $p$ koje leže s iste strane točke $T$, uključujući i točku $T$. Točku $T$ nazivamo početak polupravca.



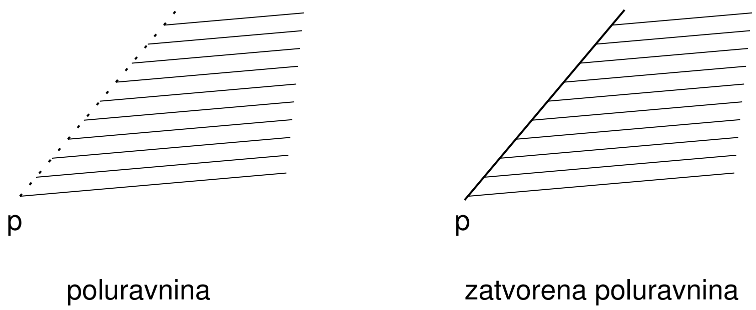

Neka su $A$ i $B$ dvije različite točke koje leže na pravcu $p$. **Dužina** $\overline{AB}$ je skup svih točaka pravca $p$ koje leže između točaka $A$ i $B$, uključujući i točke $A$ i $B$. Točke $A$ i $B$ zovemo krajevi dužine $\overline{AB}$. Kažemo da dužina $\overline{AB}$ leži na pravcu $p$. Udaljenost između točaka $A$ i $B$ zovemo duljina dužine $\overline{AB}$ i označavamo s $|AB|$. Za dvije dužine kažemo da su sukladne ako imaju jednake duljine.




Za skup $S$ točaka ravnine kažemo da je **konveksan** ako u njemu leži čitava dužina $\overline{AB}$ čim u njemu leže točke $A$ i $B$, tj. ako $A, B \in S \Rightarrow \overline{AB} \subseteq S$. Iz definicije izravno slijedi da su pravac, polupravac i dužina konveksni skupovi. Skup koji se sastoji od samo jedne točke dogovorno smatramo konveksnim skupom. Uočimo da je najmanji konveksan skup koji sadrži točke $A$ i $B$ dužina $\overline{AB}$.




**Poluravnina** je skup svih točaka ravnine koje leže s iste strane pravca $p$. Pravac $p$ nazivamo rub poluravnine. Unija poluravnine i pravca $p$ naziva se zatvorena poluravnina, a $p$ rub zatvorene poluravnine.




**Kut** $\sphericalangle pTq$ je dio ravnine određen točkom $T$ i dvama polupravcima $p$ i $q$ s početkom u $T$. Točku $T$ zovemo vrh kuta, a polupravce $p$ i $q$ kraci kuta.


Smatramo da je kut pozitivan ako gibanjem u smjeru suprotnom gibanju kazaljke na satu polupravac $p$ padne na polupravac $q$.

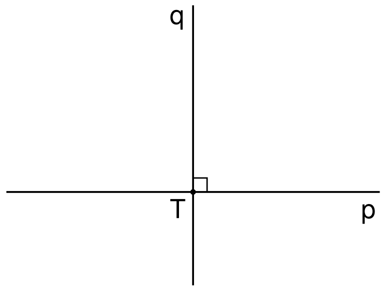
Ako je $A \in p$ i $B \in q$, često umjesto $\sphericalangle pTq$ pišemo $\sphericalangle ATB$.

Kutove često označavamo malim grčkim slovima $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Ako se polupravci $p$ i $q$ podudaraju i $\sphericalangle pTq$ sadrži sve točke ravnine, nazivamo ga **puni kut**.

Polovina punog kuta naziva se **ispruženi kut**. Ako je $\sphericalangle pTq$ ispruženi kut, tada se $p$ i $q$ nadopunjuju na pravac.

Polovina ispruženog kuta naziva se **pravi kut**.




Za dva pravca $p$ i $q$ kažemo da su međusobno **okomiti** i pišemo $p \perp q$, ako u svom sjecištu zatvaraju pravi kut.

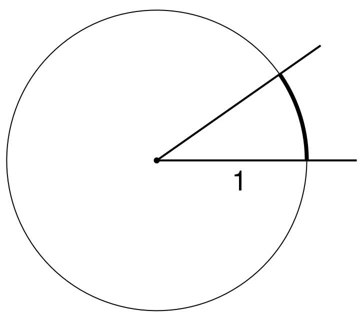
Za dva kuta kažemo da su jednaka (sukladna) ako imaju istu mjeru.

Mjera kuta izražava se u stupnjevima i radijanima.

Puni kut se dijeli na 360 jednakih dijelova, a svaki od tih dijelova iznosi $1^\circ$ (jedan stupanj). Stupanj se dalje dijeli na minute ($1^\circ = 60'$) i sekunde ($1' = 60''$). Puni kut ima mjeru $360^\circ$, ispruženi kut $180^\circ$, a pravi kut $90^\circ$.

Mjera kuta u radijanima je takva da puni kut ima mjeru $2\pi$, ispruženi kut $\pi$, a pravi kut $\frac{\pi}{2}$.

Iako ćemo kružnicu definirati nešto kasnije, a luk kružnice tek u 5. poglavlju, navedimo da je mjera kuta u radijanima zapravo duljina pripadajućeg luka jedinične kružnice sa središtem u vrhu kuta.



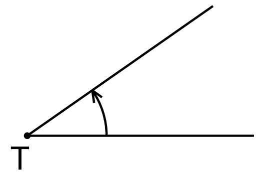

Ako je $\alpha^\circ$ mjera kuta u stupnjevima i $\alpha$ njegova mjera u radijanima, tada vrijedi:

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}\,\alpha \qquad \text{i} \qquad \alpha = \frac{\pi}{180^\circ}\,\alpha^\circ.$$

Nazivi kutova i njihove mjere u stupnjevima i radijanima:

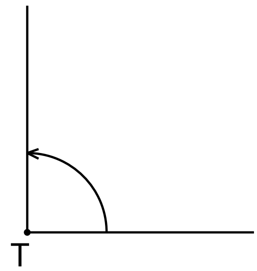
šiljasti kut

$0^\circ < \alpha^\circ < 90^\circ$
$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$



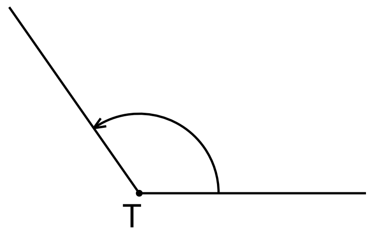

pravi kut

$\alpha^\circ = 90^\circ$
$\alpha = \frac{\pi}{2}$



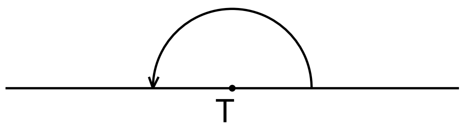

tupi kut

$90^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$



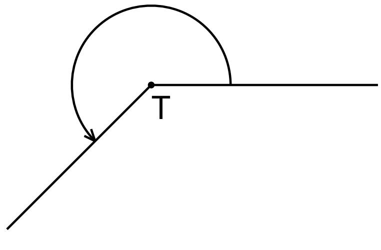

ispruženi kut

$\alpha^\circ = 180^\circ$
$\alpha = \pi$



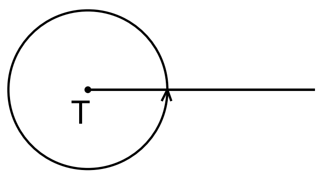

izbočeni kut

$180^\circ < \alpha^\circ < 360^\circ$
$\pi < \alpha < 2\pi$



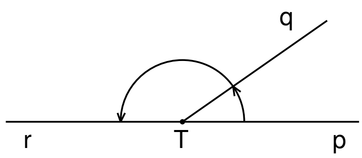

puni kut

$\alpha^\circ = 360^\circ$
$\alpha = 2\pi$



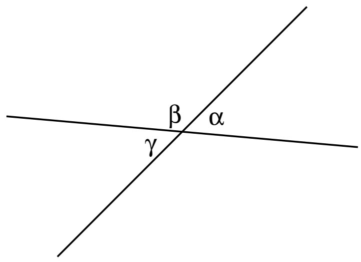
Za dva kuta kažemo da su **komplementarna** ako je zbroj njihovih mjera jednak $90°$, **suplementarna** ako je zbroj njihovih mjera jednak $180°$, a **eksplementarna** ako je zbroj njihovih mjera jednak $360°$.

Dva kuta kojima je jedan krak zajednički, a drugi kraci im se nadopunjuju na pravac, zovu se **sukuti**.




Sukuti su suplementarni kutovi.

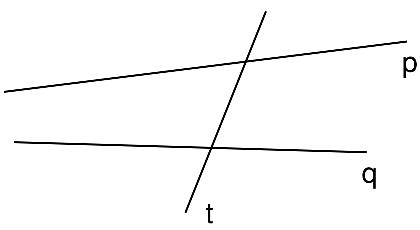
Za dva kuta koji imaju zajednički vrh, a po dva kraka im se nadopunjuju na pravac, kažemo da su **vršni kutovi**.



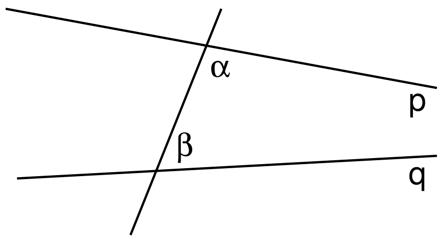

**Teorem 1.2.** *Vršni kutovi su međusobno sukladni.*

*Dokaz.* Uz oznake na slici kutovi $\alpha$ i $\beta$ su sukuti, kao i $\beta$ i $\gamma$. Stoga je $\alpha + \beta = 180°$ i $\beta + \gamma = 180°$, pa slijedi $\alpha = \gamma$. □

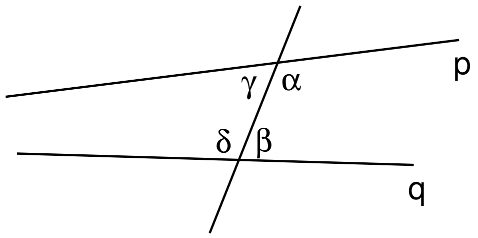
**Transverzala** pravaca $p$ i $q$ je svaki pravac $t$ koji siječe pravce $p$ i $q$.




Može se dokazati da je aksiom o paralelama ekvivalentan sljedećem aksiomu: Ako transverzala dva pravca s njima čini na istoj strani unutarnje kutove čiji je zbroj mjera različit od $180°$, tada se ti pravci sijeku s one strane s koje je taj zbroj manji od $180°$.



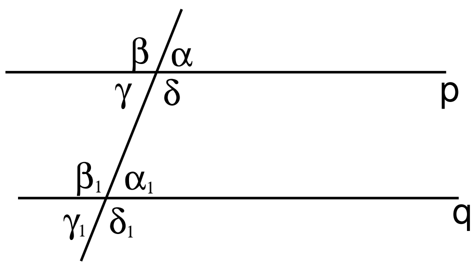

$\alpha + \beta < 180^\circ \;\Rightarrow\; p$ i $q$ se sijeku.




Uočimo: ako je $\alpha + \beta > 180^\circ$, tada je

$$\gamma + \delta = (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) = 360^\circ - (\alpha + \beta) < 180^\circ.$$

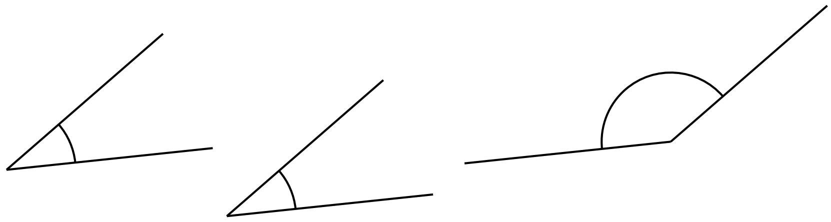
**Teorem 1.3.** *Dva paralelna pravca s transverzalom zatvaraju jednake odgovarajuće kutove.*



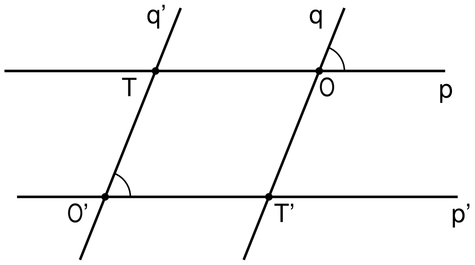

*Dokaz.* Zbog teorema 1.2 vrijedi $\gamma = \alpha$, $\gamma_1 = \alpha_1$ i $\delta = \beta$, $\delta_1 = \beta_1$. Kako je $\beta = \delta = 180^\circ - \alpha$ i $\beta_1 = \delta_1 = 180^\circ - \alpha_1$, dovoljno je dokazati $\alpha_1 = \alpha$.

Pretpostavimo da je $\alpha \neq \alpha_1$. Tada je $\alpha_1 + \delta = \alpha_1 + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ + (\alpha_1 - \alpha) \neq 180^\circ$. Aksiom o paralelama (odnosno njegova ekvivalentna formulacija) povlači da se $p$ i $q$ sijeku, pa nisu paralelni. Kontradikcija. Dakle, $\alpha = \alpha_1$. $\square$

Za dva kuta kažemo da su **kutovi s paralelnim kracima** ako njihovi odgovarajući kraci leže na paralelnim pravcima.



**Teorem 1.4.** *Ako su dva kuta s paralelnim kracima oba šiljasta ili oba tupa, tada su međusobno sukladni, a ako je jedan šiljast, a drugi tup, tada su suplementarni.*



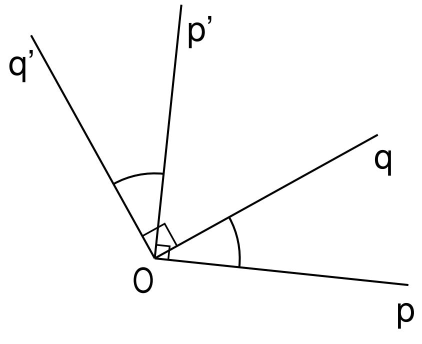

*Dokaz.* Neka su $\sphericalangle pOq$ i $\sphericalangle p'O'q'$ kutovi s paralelnim kracima (oba šiljasti).

Definirajmo točku $T$ kao presjek pravaca $p$ i $q'$ i točku $T'$ kao presjek pravaca $p'$ i $q$. Kako je $p$ transverzala paralelnih pravaca $q$ i $q'$, teorem 1.3 povlači $\sphericalangle pOq = \sphericalangle pTq'$, a kako je $q'$ transverzala paralelnih pravaca $p$ i $p'$, teorem 1.3 povlači $\sphericalangle pTq' = \sphericalangle p'O'q'$. Dakle, $\sphericalangle pOq = \sphericalangle p'O'q'$.

Analogno bi se dokazali i ostali slučajevi. □

Za dva kuta kažemo da su **kutovi s okomitim kracima** ako njihovi odgovarajući kraci leže na okomitim pravcima.

**Teorem 1.5.** *Ako su dva kuta s okomitim kracima oba šiljasta ili oba tupa, tada su međusobno sukladni, a ako je jedan šiljast, a drugi tup, tada su suplementarni.*



*Dokaz.* Zbog teorema 1.4 je dovoljno gledati slučaj kada ti kutovi imaju zajednički vrh. Neka su to kutovi $pOq$ i $p'Oq'$ kao na slici.

Tada je $\sphericalangle pOq = 90° - \sphericalangle p'Oq = \sphericalangle p'Oq'$.

Analogno bi se dokazali i ostali slučajevi. $\square$

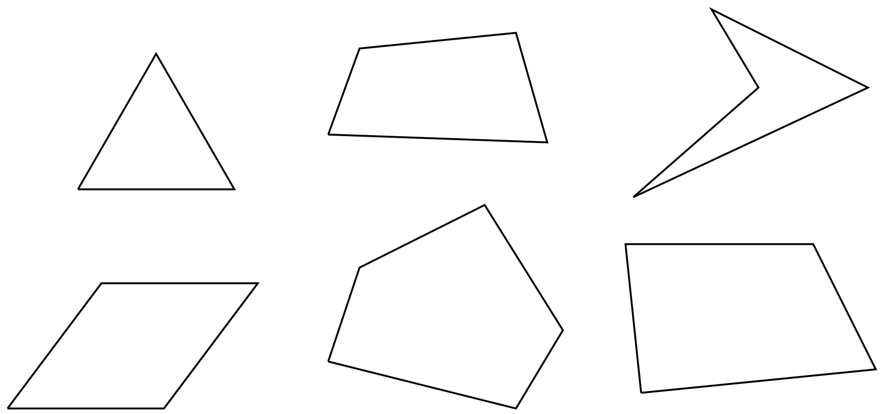
**Mnogokut ($n$-terokut)** je dio ravnine ograničen dužinama čiji su krajevi $n \geq 3$ različitih točaka ravnine, sa svojstvom da se nikoje dvije od tih dužina ne sijeku (osim u svojim krajevima) te da je svaka od tih $n$ točaka kraj točno dviju dužina.

Tih $n$ točaka zovemo vrhovi $n$-terokuta i obično ih orijentiramo u pozitivnom smjeru.

Dužine kojima je $n$-terokut ograničen nazivamo stranice $n$-terokuta.

Kutove $\sphericalangle A_nA_1A_2$, $\sphericalangle A_1A_2A_3$, ..., $\sphericalangle A_{n-1}A_nA_1$, zovemo (unutarnji) kutovi $n$-terokuta. Sukute unutarnjih kutova zovemo vanjski kutovi $n$-terokuta.

Opseg mnogokuta je zbroj duljina njegovih stranica.



Mnogokuti mogu biti konveksni skupovi, ali nije svaki mnogokut konveksan skup.

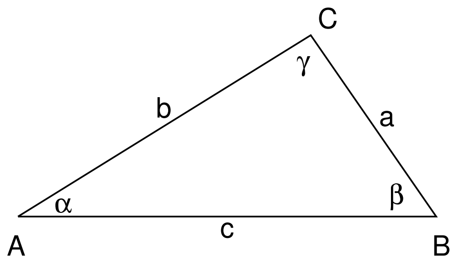
Dijagonala mnogokuta je dužina kojoj su krajevi dva nesusjedna vrha $n$-terokuta, tj. dva vrha koja ne leže na istoj stranici.

**Teorem 1.6.** *Svaki n-terokut ima* $\dfrac{n(n-3)}{2}$ *dijagonala.*

*Dokaz.* U svakom od $n$ vrhova počinje $n-3$ dijagonala, a svaku smo brojali dva puta. $\square$

Mnogokut koji ima tri vrha naziva se **trokut**. Mnogokuti s četiri, pet, šest,... vrhova nazivaju se redom **četverokut**, **peterokut**, **šesterokut**,...

Uočimo da je trokut $ABC$ najmanji konveksan skup koji sadrži točke $A$, $B$ i $C$. Dužine $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ zovemo stranice trokuta (označavamo ih redom $a$, $b$, $c$), a kutove $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ (unutarnji) kutovi trokuta (oznake su redom $\alpha$, $\beta$, $\gamma$). Stranice i kutovi zovu se osnovni elementi trokuta. Kažemo da svaki kut leži nasuprot jednoj stranici, i da po dva kuta leže uz jednu stranicu; primjerice, $\sphericalangle CAB$ leži nasuprot stranici $\overline{BC}$, a kutovi $\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle BCA$ leže uz stranicu $\overline{BC}$.




Sukut unutarnjeg kuta trokuta naziva se **vanjski kut** trokuta.

Po duljinama njihovih stranica, trokute dijelimo na:

- raznostranične (sve tri stranice trokuta su različitih duljina)
- jednakokračne (bar dvije stranice trokuta imaju istu duljinu; te dvije stranice nazivamo kraci trokuta, a treću stranicu zovemo osnovica ili baza trokuta)
- jednakostranične (sve tri stranice trokuta su jednakih duljina).

Po mjerama njihovih kutova, trokute dijelimo na:

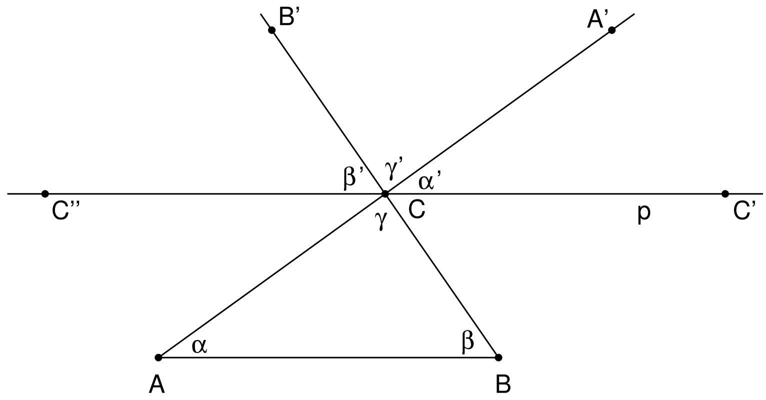
- šiljastokutne (sva tri kuta trokuta su šiljasta)
- pravokutne (trokut koji ima pravi kut)
- tupokutne (trokut koji ima tupi kut).

**Teorem 1.7.** *(i) U svakom trokutu zbroj unutarnjih kutova iznosi* $180°$.

*(ii) Vanjski kut uz jedan vrh trokuta jednak je zbroju unutarnjih kutova uz preostala dva vrha.*

*(iii) U svakom trokutu zbroj vanjskih kutova iznosi* $360°$.

*Dokaz.* Kroz $C$ povucimo paralelu $p$ s $AB$, a stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ produljimo preko vrha $C$. Označimo točke $A', B', C', C''$ kao na slici. Neka je $\alpha' = \sphericalangle C'CA'$, $\beta' = \sphericalangle B'CC''$, $\gamma' = \sphericalangle A'CB'$. Kako je pravac $AC$ transverzala paralelnih pravaca $AB$ i $p$, to je $\alpha' = \alpha$. Kako je pravac $BC$ transverzala paralelnih pravaca $AB$ i $p$, to je $\beta' = \beta$. Nadalje, $\gamma' = \gamma$ (vršni kutovi).




Sada zaključujemo:

(*i*) $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180° \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$.

(*ii*) Definirajmo $\gamma_1 = \sphericalangle BCA'$. To je vanjski kut koji odgovara kutu $\gamma$. Kako je $\sphericalangle BCC' = \beta'$ (vršni kutovi), to je $\gamma_1 = \beta' + \alpha' = \alpha + \beta$. Analogno je $\beta_1 = \alpha + \gamma$ te $\alpha_1 = \beta + \gamma$.

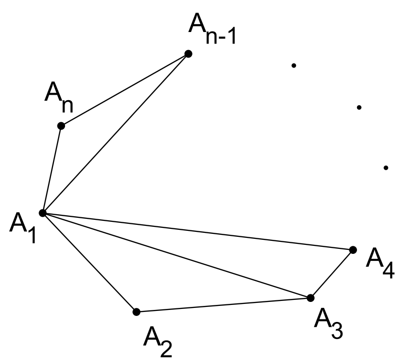
(*iii*) $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta) = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cdot 180° = 360°$.

□

Iz ovog teorema odmah slijedi da pravokutan trokut ima točno jedan pravi kut, a tupokutan trokut točno jedan tupi kut.

U pravokutnom trokutu se stranica nasuprot pravog kuta naziva hipotenuza, a druge dvije stranice se nazivaju katete.

**Korolar 1.8.** *Zbroj unutarnjih kutova n-terokuta jednak je* $(n-2) \cdot 180°$.




*Dokaz.* Iz jednog vrha izlaze $n-3$ dijagonale, koje dijele $n$-terokut na $n-2$ trokuta. Slijedi tvrdnja. □

Posebno je zbroj unutarnjih kutova četverokuta jednak 360°.

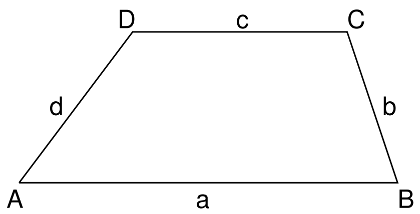
**Korolar 1.9.** *Zbroj vanjskih kutova $n$-terokuta jednak je* $360°$.

*Dokaz.* Neka su $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ unutarnji kutovi $n$-terokuta. Tada su odgovarajući vanjski kutovi $n$-terokuta jednaki $180° - \alpha_1, 180° - \alpha_2, \ldots, 180° - \alpha_n$ i zbroj im iznosi

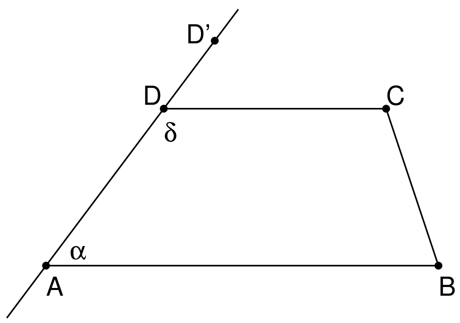
$$\begin{aligned} & (180° - \alpha_1) + (180° - \alpha_2) + \cdots + (180° - \alpha_n) \\ = \; & n \cdot 180° - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ = \; & n \cdot 180° - (n-2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°. \end{aligned}$$

□

**Trapez** je četverokut koji ima bar jedan par paralelnih stranica. Paralelne stranice trapeza nazivaju se osnovice ili baze, a ostale dvije stranice nazivaju se kraci.




**Teorem 1.10.** *Unutarnji kutovi uz krakove trapeza su suplementarni kutovi.*

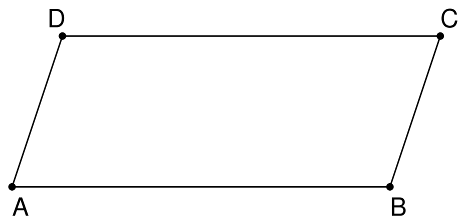



*Dokaz.* Produljimo stranicu $\overline{AD}$ preko vrhova $A$ i $D$. Označimo $D'$ kao na slici. Kako je pravac $AD$ transverzala paralelnih pravaca $AB$ i $CD$, vrijedi $\sphericalangle CDD' = \alpha$. No, $\sphericalangle CDD' + \delta = 180°$, pa je $\alpha + \delta = 180°$. Analogno je $\beta + \gamma = 180°$. □

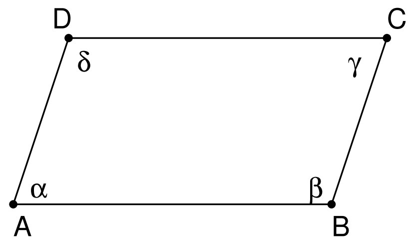
Prema prethodnom teoremu, ako su u trapezu poznata dva unutarnja kuta uz jednu od osnovica, ili ako su poznata dva suprotna kuta, tada su njima određena i preostala dva kuta trapeza.

**Jednakokračan trapez** je trapez čiji kraci imaju jednake duljine.

**Paralelogram** je četverokut koji ima dva para paralelnih stranica.



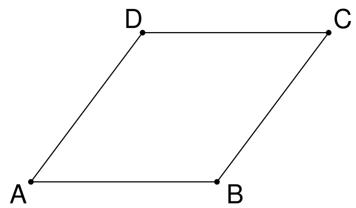

**Teorem 1.11.** *Nasuprotni kutovi paralelograma su sukladni, a kutovi uz svaku stranicu suplementarni.*




*Dokaz.* $ABCD$ je trapez s kracima $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ pa vrijedi $\beta + \gamma = 180°$ i $\alpha + \delta = 180°$.
$ABCD$ je trapez s kracima $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ pa vrijedi $\alpha + \beta = 180°$ i $\gamma + \delta = 180°$.
Slijedi $\beta = \delta$ i $\alpha = \gamma$. □

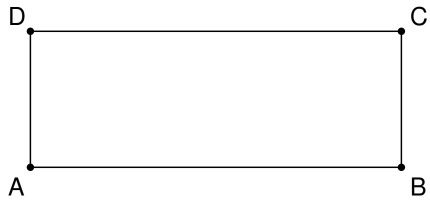
Dakle, ako je u paralelogramu poznat jedan unutarnji kut, tada su poznata i ostala tri kuta.

**Romb** je paralelogram kojemu su dvije susjedne stranice jednakih duljina.




Prema teoremu 1.11, nasuprotni kutovi romba su sukladni, a kutovi uz svaku stranicu suplementarni.

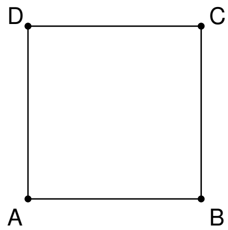
**Pravokutnik** je paralelogram koji ima barem jedan pravi kut.



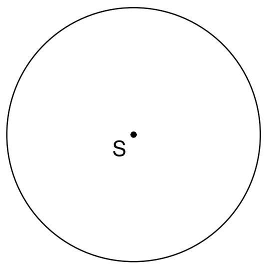

**Teorem 1.12.** *Svi kutovi pravokutnika su pravi.*

*Dokaz.* Pravokutnik je paralelogram, pa prema teoremu 1.11 vrijedi $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, $\alpha + \beta = 180°$, $\gamma + \delta = 180°$. Pretpostavimo da je $\alpha = 90°$. Slijedi $\gamma = 90°$, $\delta = 90°$, $\beta = 90°$. □

**Kvadrat** je pravokutnik kojemu su dvije susjedne stranice jednakih duljina. Iz teorema 1.12 slijedi da su sva četiri kuta kvadrata pravi kutovi.



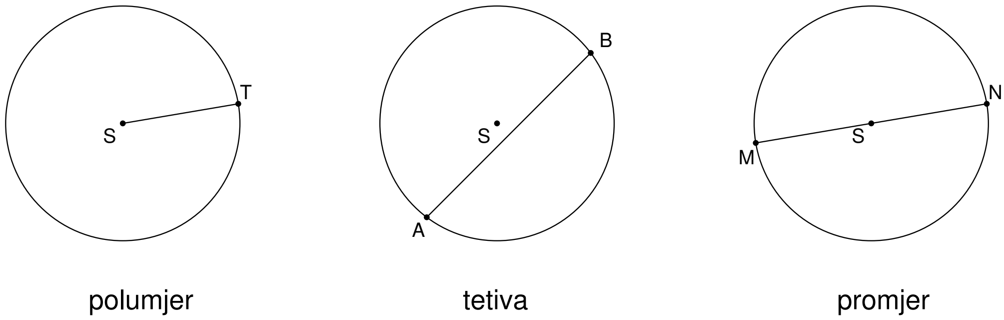

**Kružnica** je skup svih točaka ravnine na jednakoj udaljenosti od jedne čvrste točke ravnine (središta kružnice).



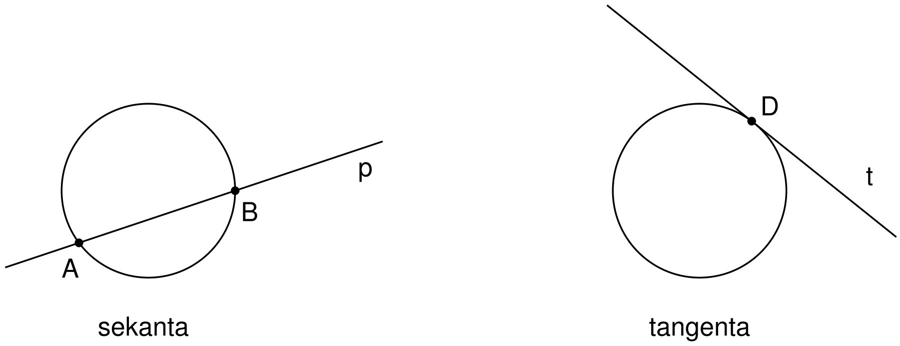

**Polumjer** kružnice je dužina kojoj je jedan kraj središte kružnice, a drugi kraj neka točka te kružnice. Udaljenost bilo koje točke kružnice od njenog središta jednaka je duljini polumjera te kružnice. Ako je $S$ središte kružnice, a $r$ duljina polumjera kružnice, govorimo o kružnici $k(S, r)$.

**Tetiva** kružnice je svaka dužina kojoj su krajevi dvije različite točke kružnice.

**Promjer** kružnice je tetiva koja prolazi središtem kružnice.




**Sekanta** kružnice je svaki pravac koji siječe kružnicu u dvije različite točke.




**Tangenta** kružnice je svaki pravac koji s kružnicom ima točno jednu zajedničku točku (dirałište tangente).

**Krug** je skup svih točaka ravnine ograničen kružnicom. Ako kružnica pripada krugu, kažemo da je krug zatvoren; ako točke kružnice ne pripadaju krugu kažemo da je krug otvoren. Kružnicu u oba slučaja zovemo rub kruga.

Ako je $|TS| < r$, kažemo da je $T$ unutar kružnice $k(S, r)$. Ako je $|TS| > r$, kažemo da je $T$ izvan kružnice $k(S, r)$.

Dakle, otvoreni krug je skup svih točaka ravnine koje su unutar kružnice, a zatvoreni krug je skup svih točaka ravnine koje pripadaju kružnici ili su unutar nje.

Omjer opsega i duljine promjera isti je za svaku kružnicu. Taj omjer je iracionalan broj kojeg označavamo s $\pi$ ($\pi \approx 3.14159$). Dakle, opseg kružnice polumjera $r$ jednak je $2r\pi$.

# Poglavlje 2

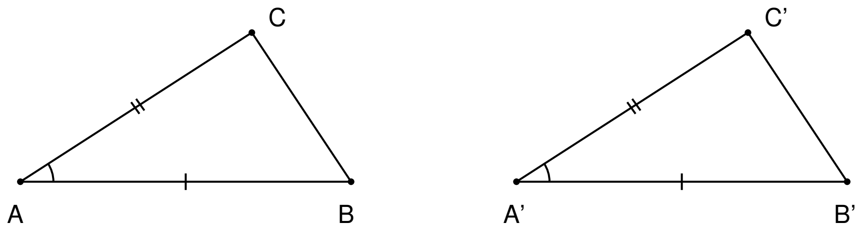
# Sukladnost trokuta

Prisjetimo se: kažemo da su dvije dužine sukladne ako imaju jednake duljine, i da su dva kuta sukladna ako imaju istu mjeru.

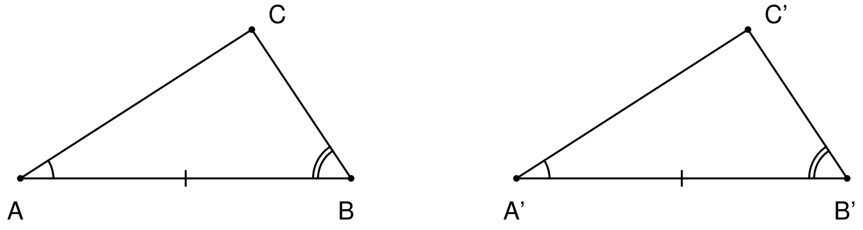
Za dva trokuta kažemo da su **sukladni** ako su im odgovarajuće stranice sukladne i odgovarajući kutovi sukladni. Oznaka: $\cong$ .

U ovoj se definiciji zahtijeva previše, a to nam govore sljedeći teoremi o sukladnosti trokuta tj. minimalni dovoljni uvjeti za sukladnost trokuta.

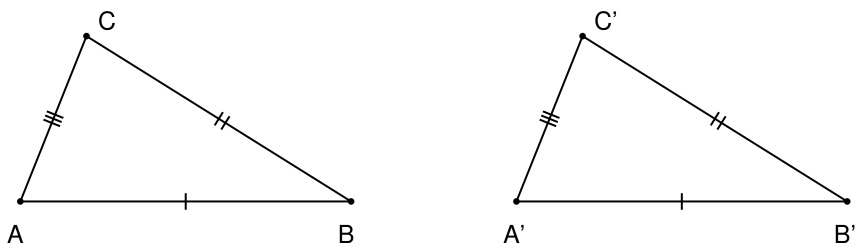
**Teorem 2.1 (S-K-S teorem o sukladnosti).** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut među njima.*




**Teorem 2.2 (K-S-K teorem o sukladnosti).** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.*

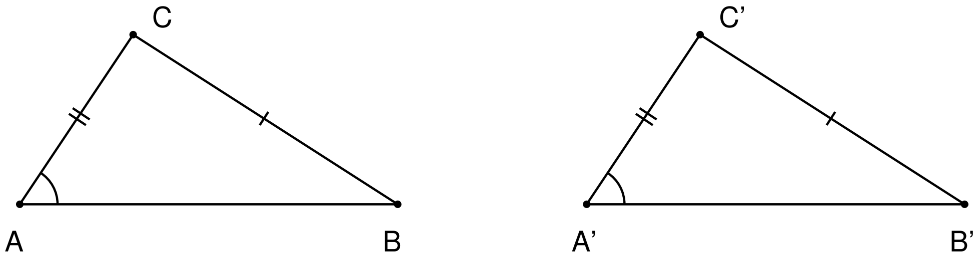



Obzirom da je zbroj unutarnjih kutova u svakom trokutu 180°, dva kuta trokuta određuju treći. Prema tome, dva trokuta su sukladna ako su im sukladni jedna stranica i bilo koja dva kuta.




**Teorem 2.3 (S-S-S teorem o sukladnosti).** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne sve tri stranice.*

**Teorem 2.4 (S-S-K$^>$ teorem o sukladnosti).** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut nasuprot veće stranice.*




Dokažimo ove teoreme.

*Dokaz teorema 2.1 (S-K-S).* Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$.

Sada $\sphericalangle B'A'C'$ nanesimo na $\sphericalangle BAC$ s vrhom u $A$, krakom $A'B'$ na $AB$ i krakom $A'C'$ na $AC$. Tada će $B'$ pasti u $B$, a $C'$ u $C$. $\square$

*Dokaz teorema 2.2 (K-S-K).* Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, $|AB| = |A'B'|$.

Sada $\sphericalangle C'A'B'$ nanesimo na $\sphericalangle CAB$ s vrhom u $A$, krakom $A'B'$ na $AB$ i krakom $A'C'$ na $AC$. Tada će $B'$ pasti u $B$. Dalje $\sphericalangle A'B'C'$ nanesimo na $\sphericalangle ABC$ s vrhom u $B$, krakom $A'B'$ na $AB$ i krakom $B'C'$ na $BC$. Tada će sjecište polupravaca $A'C'$ i $B'C'$ pasti u sjecište polupravaca $AC$ i $BC$ tj. $C'$ će pasti u $C$. $\square$

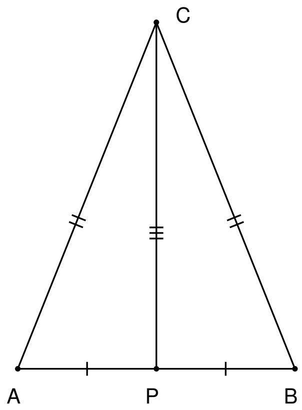
*Dokaz teorema 2.3 (S-S-S).* Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$, $|BC| = |B'C'|$.

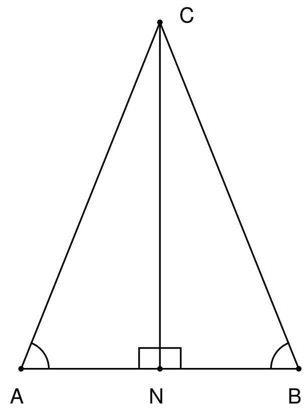
Prenesimo $\triangle A'B'C'$ tako da se $A'$ i $B'$ podudaraju s $A$ i $B$, a točka $C'$ leži s iste strane pravca $AB$ kao i točka $C$. Zbog jednakosti duljina stranica $|A'C'| = |AC|$, točka $C'$ leži na kružnici $k_1 = k(A, |AC|)$, a analogno i na $k_2 = k(B, |BC|)$. Stoga je $C'$ presjek kružnica $k_1$ i $k_2$, pa se podudara s točkom $C$ (jer je druga točka presjeka kružnica $k_1$ i $k_2$ s druge strane pravca $AB$). $\square$

Za dokaz četvrtog teorema o sukladnosti trokuta trebat će nam neke veze stranica trokuta i kutova nasuprot njih.

**Teorem 2.5.** *Dvije stranice trokuta su sukladne ako i samo ako su im nasuprotni kutovi sukladni.*

*Dokaz.* $\Rightarrow$: Neka u trokutu $ABC$ vrijedi $|AC| = |BC|$. Neka je $P$ polovište stranice $\overline{AB}$. Kako je $|AP| = |PB|$, $|AC| = |BC|$ i $\overline{CP}$ zajednička stranica $\triangle APC$ i $\triangle BPC$, to su ta dva trokuta sukladna prema S-S-S teoremu o sukladnosti. Slijedi $\sphericalangle PAC = \sphericalangle PBC$.



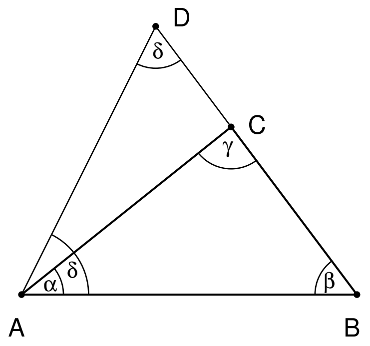



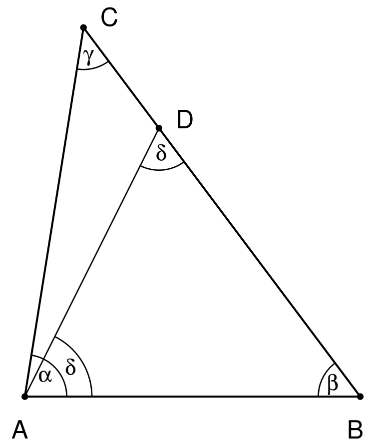

$\Leftarrow$: Neka u $\triangle ABC$ vrijedi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$. Neka je $N$ točka na $AB$ takva da je $\sphericalangle ANC = \sphericalangle BNC = 90°$. Tada je i $\sphericalangle ACN = \sphericalangle BCN$, pa kako je $\sphericalangle ANC = \sphericalangle BNC = 90°$, a $\overline{CN}$ zajednička stranica $\triangle ANC$ i $\triangle BNC$, to su ta dva trokuta sukladna prema K-S-K teoremu o sukladnosti. Slijedi $|AC| = |BC|$. $\square$

**Korolar 2.6.** *U jednakostraničnom trokutu su svi kutovi jednaki* 60°.

**Teorem 2.7.** *Nasuprot veće stranice trokuta leži i veći kut i obratno, nasuprot većeg kuta trokuta leži i veća stranica.*

*Dokaz.* $\Rightarrow$: Neka u $\triangle ABC$ vrijedi $|AB| > |BC|$.



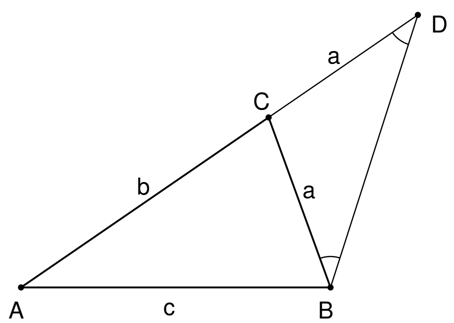
Produljimo stranicu $\overline{BC}$ preko vrha $C$ do točke $D$ sa svojstvom $|BD| = |AB|$. Prema teoremu 2.5 je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ADB$. Taj kut označimo sa $\delta$. Vrijedi da je $\delta > \alpha$. Prema teoremu 1.7($ii$) je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC + \sphericalangle DAC$, odakle slijedi da je $\gamma > \delta$. Dakle, $\gamma > \alpha$.

$\Leftarrow$: Neka u $\triangle ABC$ vrijedi $\gamma > \alpha$. Pretpostavimo da je $|AB| \leq |BC|$. Ako je $|AB| = |BC|$, teorem 2.5 povlači $\gamma = \alpha$; kontradikcija. Preostaje razmotriti slučaj $|AB| < |BC|$.

Neka je točka $D$ na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|BD| = |AB|$. Prema teoremu 2.5 je $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ADB$. Taj kut označimo sa $\delta$. Vrijedi da je $\delta < \alpha$. Nadalje, teorem 1.7($ii$) daje $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACD + \sphericalangle CAD$, odakle slijedi da je $\gamma < \delta$. Konačno, $\gamma < \alpha$, suprotno pretpostavci.

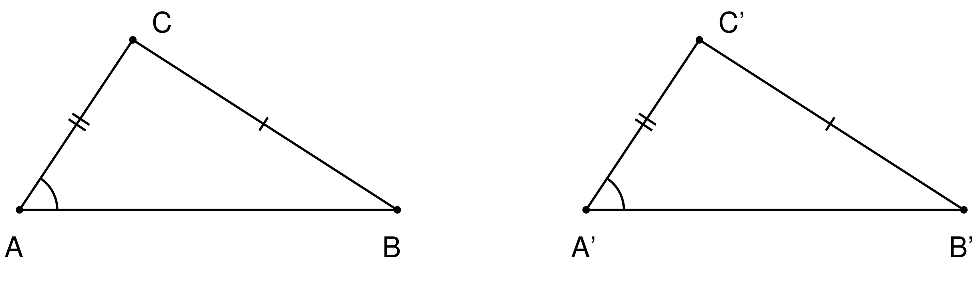
Dakle, $|AB| > |BC|$. □

**Korolar 2.8 (nejednakost trokuta).** *Svaka stranica trokuta je manja od zbroja drugih dviju stranica.*



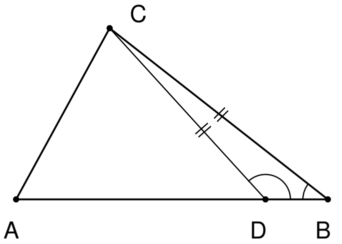

*Dokaz.* Produljimo $\overline{AC}$ preko vrha $C$ do točke $D$ sa svojstvom $|CD| = a$. Prema teoremu 2.5 je $\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDC$. Međutim, $\sphericalangle ABD > \sphericalangle CBD$, pa je $\sphericalangle ABD > \sphericalangle BDC$. Sada teorem 2.7 povlači $|AD| > |AB|$, tj. $a + b > c$. Analogno i $a + c > b$, $b + c > a$. □

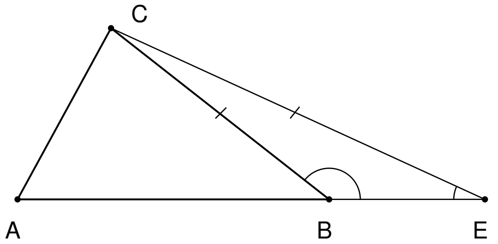
*Dokaz teorema 2.4 (S-S-K$^>$).* Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $|BC| > |AC|$, $|BC| = |B'C'|$, $|AC| = |A'C'|$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$.




Sada $\sphericalangle C'A'B'$ nanesimo na $\sphericalangle CAB$ s vrhom u $A$, krakom $A'C'$ na $AC$ i krakom $A'B'$ na $AB$. Tada će $C'$ pasti u $C$. Preostaje dokazati da će $B'$ pasti u $B$.

Kada $B'$ ne bi pao u $B$, tada bi pao ili između točaka $A$ i $B$ (dakle na $\overline{AB}$) ili na produžetak $\overline{AB}$ preko vrha $B$.




Neka $B'$ padne u točku $D$ na stranici $\overline{AB}$. Iz $|CD| = |BC|$ slijedi $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ABC$. Prema teoremu 1.7($ii$) je $\sphericalangle CAB + \sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC$, pa je $\sphericalangle CAB < \sphericalangle BDC$. Odavde slijedi $\sphericalangle CAB < \sphericalangle ABC$ i teorem 2.7 povlači $|BC| < |AC|$. Kontradikcija.

Neka $B'$ padne u točku $E$ na produžetku $\overline{AB}$ preko vrha $B$. Iz $|BC| = |CE|$ slijedi $\sphericalangle CBE = \sphericalangle BEC$. Kako je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCE + \sphericalangle BEC$, to je $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BEC$, pa je $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CBE$ odnosno $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACB$. Slijedi $\sphericalangle ABC > \sphericalangle CAB$. Sada teorem 2.7 povlači $|AC| > |BC|$. Kontradikcija. □

Prisjetimo se, paralelogram smo definirali kao četverokut koji ima dva para paralelnih stranica, a romb kao paralelogram kojemu su bar dvije susjedne stranice sukladne.

Sada ćemo dati karakterizacije paralelograma i romba od kojih se svaka može uzeti za njihovu alternativnu definiciju.

**Teorem 2.9.** *Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

*(i) četverokut $ABCD$ je paralelogram,*

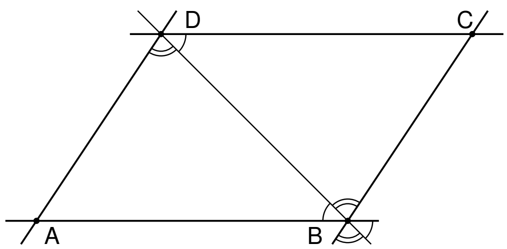
*(ii) postoje dvije nasuprotne stranice četverokuta $ABCD$ koje su sukladne i paralelne,*

*(iii) svake dvije nasuprotne stranice četverokuta $ABCD$ su sukladne,*

*(iv) dijagonale četverokuta $ABCD$ se međusobno raspolavljaju,*

*(v) oba para nasuprotnih kutova četverokuta $ABCD$ su sukladna.*

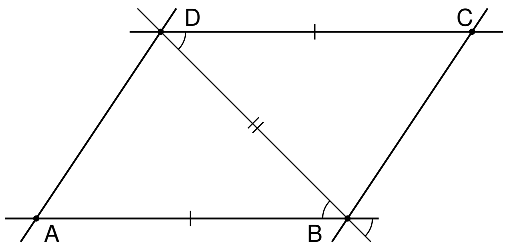
*Dokaz.* ($i$)⇒($ii$): Neka je $ABCD$ paralelogram. Tada je $AB \parallel CD$ i $AD \parallel BC$.



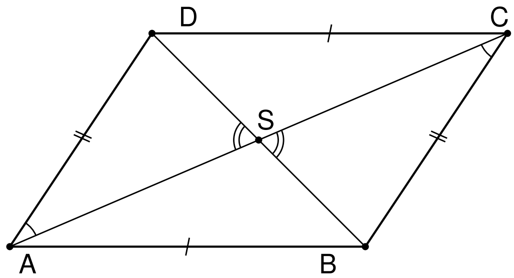

Kako je pravac $BD$ transverzala paralelnih pravaca $AB$ i $CD$, to je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$. No, $BD$ je transverzala i paralelnih pravaca $AD$ i $BC$, pa je $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DBC$. Kako je uz to još i $\overline{BD}$ zajednička stranica trokuta $ABD$ i $CDB$, to su prema K-S-K teoremu ta dva trokuta sukladna. Slijedi $|AB| = |CD|$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Neka u četverokutu $ABCD$ vrijedi $AB \parallel CD$ i $|AB| = |CD|$.

Kako je pravac $BD$ transverzala paralelnih pravaca $AB$ i $CD$, to je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BDC$. Uz to je $\overline{BD}$ zajednička stranica trokuta $ABD$ i $CDB$, te je $|AB| = |CD|$. Sada S-K-S teorem povlači da su trokuti $ABD$ i $CDB$ sukladni, pa je $|AD| = |BC|$.

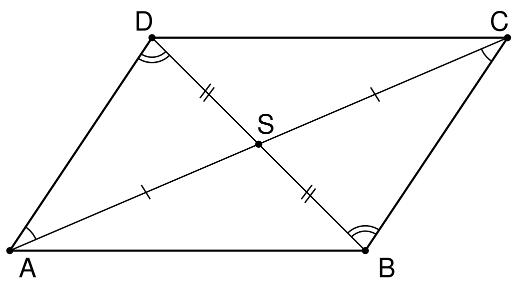



$(iii) \Rightarrow (iv)$: Neka u četverokutu $ABCD$ vrijedi $|AB| = |CD|$ i $|AD| = |BC|$. Neka je $S$ sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.




Prema S-S-S teoremu je $\triangle ABC \cong \triangle CDA$. Slijedi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$. Uz to je i $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC$ (vršni kutovi). Stoga je i $\sphericalangle ADS = \sphericalangle SBC$. Kako je i $|AD| = |BC|$, to je $\triangle ASD \cong \triangle CSB$ prema K-S-K teoremu. Konačno je $|AS| = |CS|$ i $|DS| = |BS|$, pa je $S$ polovište i $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

$(iv) \Rightarrow (v)$: Neka u četverokutu $ABCD$ za sjecište dijagonala $S$ vrijedi $|AS| = |CS|$ i $|DS| = |BS|$.




Uočimo da je $\triangle ASD \cong \triangle CSB$ prema S-K-S teoremu jer je $|AS| = |CS|$, $|DS| = |BS|$ i $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC$. Slijedi $\sphericalangle DAS = \sphericalangle BCS$ i $\sphericalangle ADS = \sphericalangle CBS$.

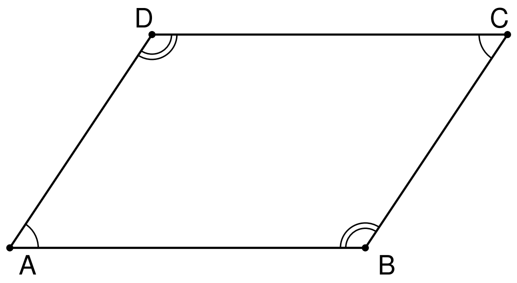
Uočimo i da je $\triangle ABS \cong \triangle CDS$ prema S-K-S teoremu jer je $|AS| = |CS|$, $|BS| = |DS|$ i $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSD$. Slijedi $\sphericalangle SAB = \sphericalangle SCD$ i $\sphericalangle SBA = \sphericalangle SDC$.

Sada je

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAS + \sphericalangle SAB = \sphericalangle BCS + \sphericalangle SCD = \sphericalangle BCD,$$

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle SBA + \sphericalangle CBS = \sphericalangle SDC + \sphericalangle ADS = \sphericalangle ADC.$$

$(v) \Rightarrow (i)$: Neka u četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDA$. Stoga iz $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA = 360°$ slijedi $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 180°$.




Pretpostavimo da pravci $AD$ i $BC$ nisu paralelni te da se sijeku u točki $E$ koja leži s iste strane pravca $AB$ kao i točke $C$ i $D$. Tada su $\sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle ABC$ dva kuta trokuta $ABE$, a zbroj im je $180°$. Kontradikcija. Ako točka $E$ leži sa suprotne strane pravca $AB$ u odnosu na točke $C$ i $D$, promatramo kuteve $\sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle CDA$ u trokutu $CDE$.

Dakle, $AD \parallel BC$. Analogno se dokazuje i $AB \parallel CD$. □

**Teorem 2.10.** *Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

*(i) četverokut $ABCD$ je romb,*

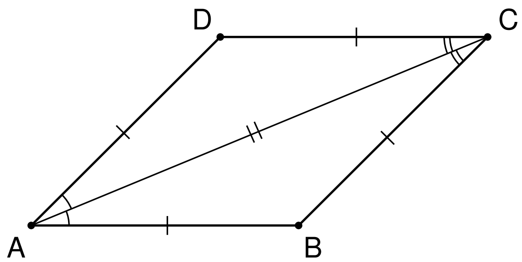
*(ii) sve stranice četverokuta $ABCD$ su sukladne,*

*(iii) dijagonale četverokuta $ABCD$ raspolavljaju sve unutarnje kutove,*

*(iv) dijagonale četverokuta $ABCD$ se raspolavljaju i međusobno su okomite.*

*Dokaz.* $(i) \Rightarrow (ii)$: Neka je $ABCD$ romb tj. paralelogram u kojem je $|AB| = |BC|$. Iz teorema 2.9$(i) \Rightarrow (iii)$ slijedi $|AB| = |CD|$ i $|BC| = |AD|$. Dakle, sve četiri stranice romba su sukladne.

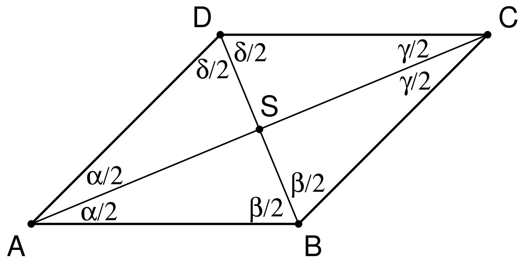
$(ii) \Rightarrow (iii)$: Neka su u četverokutu $ABCD$ sve četiri stranice sukladne.




Prema S-S-S teoremu je $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. Slijedi $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD = \frac{1}{2}\sphericalangle DAB$ i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\sphericalangle BCD$. Analogno, također prema S-S-S teoremu je $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, pa je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$ i $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB = \frac{1}{2}\sphericalangle ADC$.

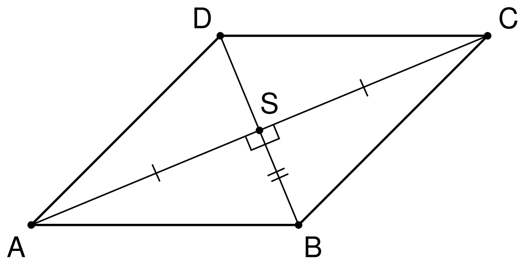
$(iii) \Rightarrow (iv)$: Neka u četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CAD = \frac{1}{2}\alpha$, $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD = \frac{1}{2}\beta$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD = \frac{1}{2}\gamma$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDB = \frac{1}{2}\delta$.

U $\triangle ABD$ je $\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} = 180°$, a u $\triangle BCD$ je $\gamma + \frac{\beta}{2} + \frac{\delta}{2} = 180°$. Slijedi $\alpha = \gamma$. Analogno, u $\triangle ABC$ je $\beta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°$, a u $\triangle ACD$ je $\delta + \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 180°$, pa je $\beta = \delta$. Dakle, nasuprotni kutovi četverokuta $ABCD$ su sukladni. Iz teorema 2.9$(v) \Rightarrow (iv)$ slijedi da se dijagonale četverokuta $ABCD$ međusobno raspolavljaju.



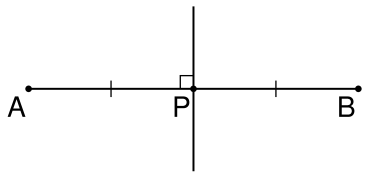

Sjecište dijagonala označimo sa $S$. Iz $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, $\alpha = \gamma$ i $\beta = \delta$ slijedi $\alpha + \beta = 180°$. Obzirom da u $\triangle ABS$ imamo $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \sphericalangle ASB = 180°$, to je $\sphericalangle ASB = 90°$. Dakle, dijagonale četverokuta $ABCD$ su međusobno okomite.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Neka se u četverokutu $ABCD$ dijagonale raspolavljaju te neka su međusobno okomite. Iz teorema 2.9$(iv) \Rightarrow (i)$ slijedi da je $ABCD$ paralelogram. Označimo sa $S$ sjecište njegovih dijagonala.




Trokuti $ASB$ i $CSB$ su sukladni prema S-K-S teoremu jer je $\overline{BS}$ njihova zajednička stranica, $|AS| = |CS|$ i $\sphericalangle ASB = \sphericalangle CSB = 90°$. Slijedi $|AB| = |BC|$. Dakle, dvije susjedne stranice paralelograma $ABCD$ su sukladne, pa je $ABCD$ romb. $\square$

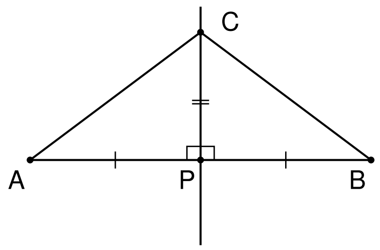
**Simetrala dužine** je pravac koji prolazi polovištem te dužine i okomit je na nju.

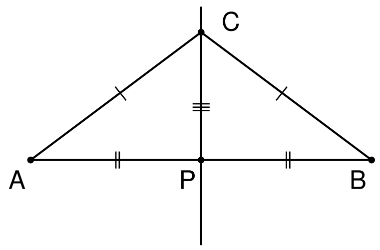



**Teorem 2.11 (teorem o simetrali dužine).** *Točka $C$ leži na simetrali dužine $\overline{AB}$ ako i samo ako je $|AC| = |BC|$.*

*Dokaz.* $\Rightarrow$: Neka je $C$ točka koja leži na simetrali dužine $\overline{AB}$. Neka je $P$ polovište dužine $\overline{AB}$.

Trokuti $APC$ i $BPC$ su sukladni prema teoremu S-K-S jer im je stranica $\overline{PC}$ zajednička, $|AP| = |BP|$ i $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC = 90°$. Slijedi $|AC| = |BC|$.

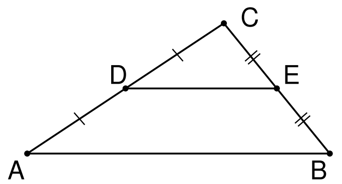


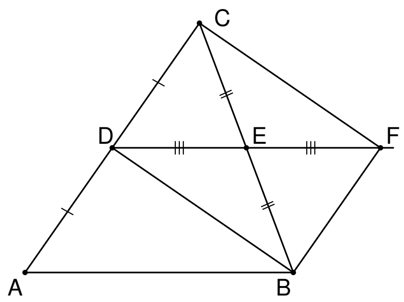

$\Leftarrow$: Neka je $C$ točka sa svojstvom $|AC| = |BC|$. Neka je $P$ polovište dužine $\overline{AB}$.

Trokuti $APC$ i $BPC$ su sukladni prema S-S-S teoremu (stranica $\overline{CP}$ im je zajednička, $|AC| = |BC|$, $|AP| = |BP|$). Stoga je $\sphericalangle APC = \sphericalangle BPC$. No, ta dva kuta su sukuti, pa svaki od njih iznosi $90°$. Dakle, pravci $PC$ i $AB$ su okomiti, pa je $PC$ simetrala dužine $\overline{AB}$. Prema tome, $C$ leži na simetrali dužine $\overline{AB}$. $\square$

**Srednjica trokuta** je dužina koja spaja polovišta dviju stranica trokuta.



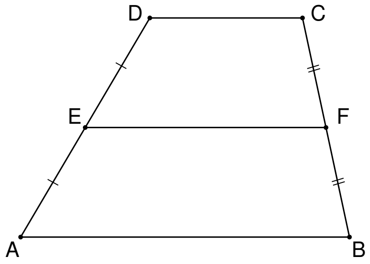

**Teorem 2.12 (teorem o srednjici trokuta).** *Srednjica trokuta je paralelna jednoj stranici trokuta i njena duljina je jednaka polovini duljine te stranice.*

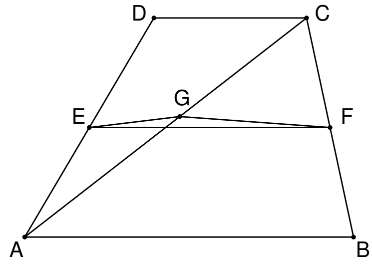



*Dokaz.* Neka je $D$ polovište stranice $\overline{AC}$, a $E$ polovište stranice $\overline{BC}$. Srednjicu $\overline{DE}$ produljimo preko vrha $E$ i na tom produžetku konstruirajmo točku $F$ sa svojstvom $|EF| = |ED|$. Dijagonale četverokuta $BDCF$ se međusobno raspolavljaju, pa je prema teoremu 2.9$(iv)\Rightarrow(i)$ taj četverokut paralelogram. Stoga je, $BF \parallel DC$, a prema teoremu 2.9$(i)\Rightarrow(iii)$ je i $|BF| = |DC|$. Slijedi $|BF| = |AD|$ i $BF \parallel AD$. Sada teorem 2.9$(ii)\Rightarrow(i)$ povlači da je četverokut $ABFD$ paralelogram. Slijedi $DE \parallel AB$ i $|DE| = \frac{1}{2}|DF| = \frac{1}{2}|AB|$. $\square$

**Srednjica trapeza** je dužina koja spaja polovišta krakova trapeza.

**Teorem 2.13 (teorem o srednjici trapeza).** *Srednjica trapeza je paralelna osnovicama trapeza i njena duljina je jednaka polovini zbroja duljina osnovica.*



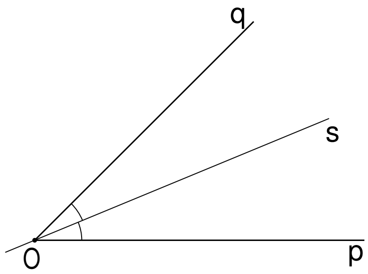



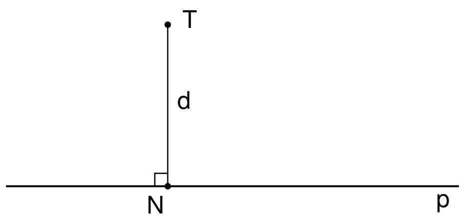

*Dokaz.* Neka je $E$ polovište kraka $\overline{AD}$, a $F$ polovište kraka $\overline{BC}$. Neka je $G$ polovište dijagonale $\overline{AC}$. Tada je $\overline{EG}$ srednjica trokuta $ACD$, a $\overline{FG}$ srednjica trokuta $ABC$. Prema teoremu 2.12, $EG \parallel CD$ i $FG \parallel AB$. Kako je $EG \parallel CD$ i $CD \parallel AB$, to je $EG \parallel AB$. Kako su i $EG$ i $FG$ pravci paralelni s $AB$ i prolaze točkom $G$, to aksiom o paralelama povlači da se pravci $EG$ i $FG$ podudaraju. Stoga točke $E, F, G$ leže na istom pravcu - to je pravac $EF$ i on je paralelan s $AB$. Dakle, točka $G$ je presjek pravaca $EF$ i $AC$. Prema teoremu 2.12 je još i $|EG| = \frac{1}{2}|CD|$ i $|FG| = \frac{1}{2}|AB|$. Konačno,

$$|EF| = |EG| + |FG| = \frac{1}{2}|CD| + \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|).$$

□

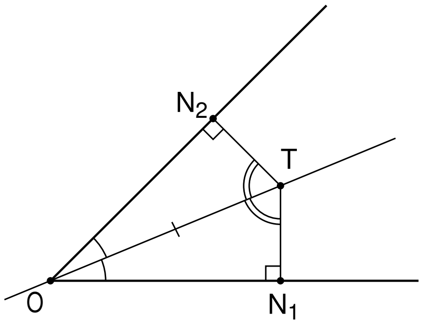
**Simetrala kuta** je pravac koji taj kut dijeli na dva jednaka dijela.

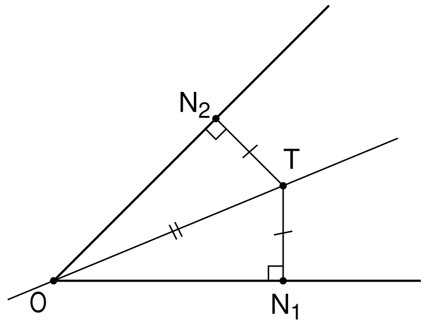



**Udaljenost točke $T$ od pravca $p$** je $|TN|$, gdje je $N$ nožište okomice spuštene iz $T$ na $p$. (Drugim riječima, točka $N$ je presjek pravca $p$ i pravca okomitog na $p$ koji prolazi točkom $T$.) Oznaka: $d(T, p)$ odnosno $d(T, AB)$ ako su $A, B \in p$.

**Teorem 2.14 (teorem o simetrali kuta).** *Točka leži na simetrali kuta ako i samo ako je jednako udaljena od njegovih krakova.*




*Dokaz.* $\Rightarrow$: Neka $T$ leži na simetrali kuta s vrhom u $O$. Iz $T$ spustimo okomice na krakove kuta, neka su $N_1$ i $N_2$ nožišta tih okomica.

Trokuti $TON_1$ i $TON_2$ su sukladni prema K-S-K teoremu (naime, $\overline{OT}$ im je zajednička stranica, $\sphericalangle TON_1 = \sphericalangle TON_2$ i $\sphericalangle TN_1O = \sphericalangle TN_2O = 90°$). Slijedi $|TN_1| = |TN_2|$.

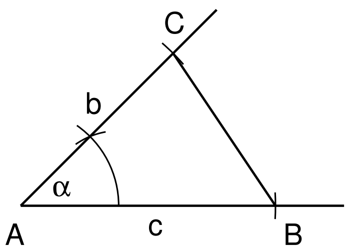
$\Leftarrow$: Neka je $T$ točka sa svojstvom $|TN_1| = |TN_2|$, gdje su $N_1$ i $N_2$ nožišta okomica spuštenih iz $T$ na krakove kuta s vrhom u $O$.

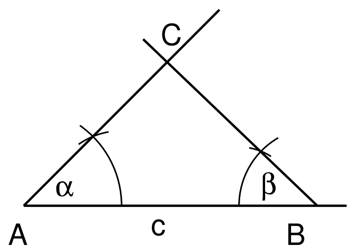
Trokuti $TON_1$ i $TON_2$ su sukladni prema S-S-K$^>$ teoremu (stranica $\overline{OT}$ im je zajednička, $|TN_1| = |TN_2|$, $\sphericalangle ON_1T = \sphericalangle ON_2T = 90°$. Stoga je $\sphericalangle TON_1 = \sphericalangle TON_2$, pa $T$ leži na simetrali kuta $\sphericalangle N_1ON_2$. □

**Četiri osnovne konstrukcije trokuta:**

1. Konstrukcija trokuta kome su zadane dvije stranice i kut među njima (primjerice $b$, $c$ i $\alpha < 180°$):

   Nacrtati kut $\alpha$ s vrhom u $A$ i na krakove tog kuta nanijeti $\overline{AC} = b$ i $\overline{AB} = c$.



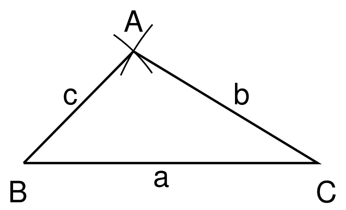



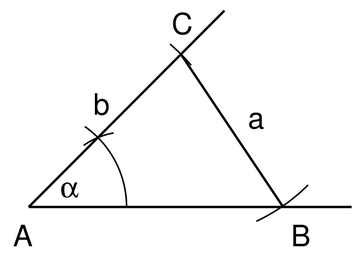

2. Konstrukcija trokuta kome su zadani jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu (primjerice $c$, $\alpha$ i $\beta$, pri čemu je $\alpha + \beta < 180°$):

   Nacrtati dužinu $\overline{AB}$ duljine $c$ i uz tu dužinu s iste strane nanijeti kutove $\alpha$ i $\beta$. Ti kutovi imaju jedan zajednički krak, a druga dva im se sijeku (zbog $\alpha + \beta < 180°$), a sjecište je točka $C$.

3. Konstrukcija trokuta kome su zadane sve tri stranice ($a$, $b$ i $c$ za koje vrijedi, uz pretpostavku $a \geq b \geq c$, nejednakost $a < b + c$):

   Nacrtati dužinu $\overline{BC}$ duljine $a$, zatim oko točke $B$ opisati kružnicu polumjera $c$, a oko točke $C$ kružnicu polumjera $b$. Vrh $A$ je sjecište tih kružnica.

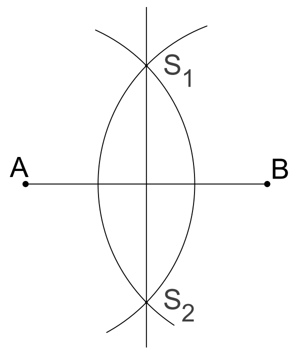



4. Konstrukcija trokuta kome su zadane dvije stranice i kut nasuprot većoj (primjerice, $a$, $b$ sa svojstvom $a > b$ i $\alpha < 180°$):

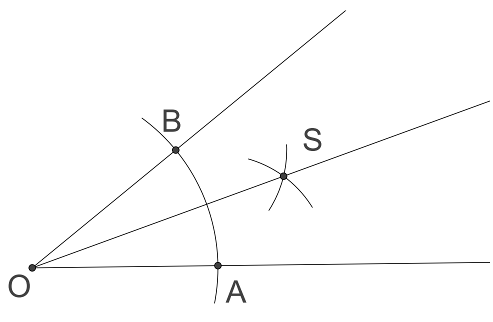
   Nanijeti kut $\alpha$ tako da mu vrh bude točka $A$, zatim nanijeti $\overline{AC}$ duljine $b$. Oko točke $C$ opisati kružnicu polumjera $a$. Ta kružnica siječe drugi krak kuta $\alpha$ u točki $B$ (zbog $a > b$ samo je jedno sjecište).

**Konstrukcija simetrale dužine:**



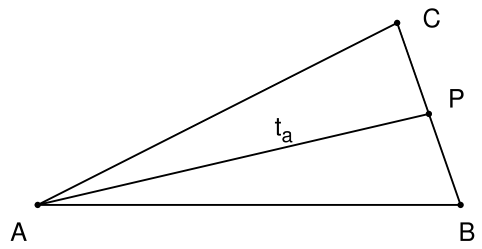

Neka je $\overline{AB}$ dana dužina. Oko točaka $A$ i $B$ opišimo kružnice istog polumjera, većeg od $\frac{1}{2}|AB|$; neka su $S_1$ i $S_2$ sjecišta tih dviju kružnica. Tada je $|AS_1| = |BS_1|$ i $|AS_2| = |BS_2|$. Dakle, $S_1$ i $S_2$ leže na simetrali dužine $\overline{AB}$, pa je pravac $S_1S_2$ simetrala dužine $\overline{AB}$.

**Konstrukcija simetrale kuta:**

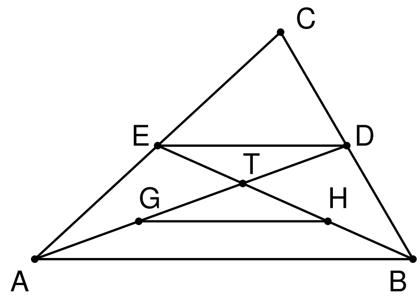



Neka je $O$ vrh danog kuta. Oko točke $O$ opišimo bilo koju kružnicu te neka ona siječe krakove danog kuta u točkama $A$ i $B$. Oko točaka $A$ i $B$ opišimo kružnice istog polumjera, većeg od $\frac{1}{2}|AB|$ i neka je $S$ jedno od sjecišta. Prema teoremu S-S-S, $\triangle OAS \cong \triangle OBS$, pa je $\sphericalangle AOS = \sphericalangle BOS$. Dakle, $OS$ je tražena simetrala.

**Težišnica trokuta** je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.




**Teorem 2.15 (teorem o težištu trokuta).** *Sve tri težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki. Udaljenost te točke od pojedinog vrha trokuta iznosi* $\frac{2}{3}$ *duljine odgovarajuće težišnice.*




*Dokaz.* Neka su $D, E, F$ redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$. Neka je točka $T$ presjek težišnica $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$. Neka je $G$ polovište dužine $\overline{AT}$, a $H$ polovište dužine $\overline{BT}$.

Kako je $\overline{DE}$ srednjica trokuta $ABC$, to teorem 2.12 povlači $DE \parallel AB$ i $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$. Također, $\overline{GH}$ je srednjica trokuta $ABT$, pa teorem 2.12 povlači $GH \parallel AB$ i $|GH| = \frac{1}{2}|AB|$. Prema tome, $DE \parallel GH$ i $|DE| = |GH|$.

Iz teorema 2.9$(ii)$⇒$(iv)$ slijedi da se u četverokutu $GHDE$ dijagonale raspolavljaju. Dakle, $|TD| = |TG|$ i $|TE| = |TH|$. Imamo

$$|AT| = |AG| + |TG| = |TG| + |TG| = 2|TG|,$$

$$|AD| = |AT| + |TD| = 2|TG| + |TG| = 3|TG|,$$

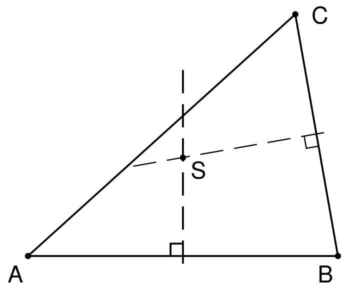
pa je $|AT| = \frac{2}{3}|AD|$. Analogno je $|BT| = \frac{2}{3}|BE|$.

Sada postupak ponovimo na težišnicama $\overline{AD}$ i $\overline{CF}$. Neka je $T'$ točka u kojoj se sijeku te dvije težišnice. Kao i ranije dobije se da je $|AT'| = \frac{2}{3}|AD|$ i $|CT'| = \frac{2}{3}|CF|$.

Dakle, točke $T$ i $T'$ nalaze se između $A$ i $D$, i pritom vrijedi $|AT'| = |AT| = \frac{2}{3}|AD|$, pa se $T$ i $T'$ podudaraju. Prema tome, sve tri težišnice prolaze istom točkom. □

Točka u kojoj se sijeku sve tri težišnice naziva se **težište** trokuta. Kaže se još da težište dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 računajući od vrha trokuta.

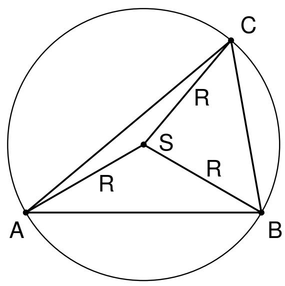
**Teorem 2.16 (teorem o simetralama stranica trokuta).** *Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki.*



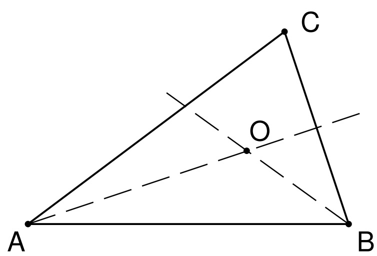

*Dokaz.* Neka je $S$ sjecište simetrala stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$. Kako $S$ leži na simetrali stranice $\overline{AB}$, teorem 2.11 povlači $|AS| = |BS|$, a kako se nalazi i na simetrali stranice $\overline{BC}$, to je $|BS| = |CS|$. Dakle, $|AS| = |CS|$. Teorem 2.11 povlači da $S$ leži na simetrali dužine $\overline{AC}$. Prema tome, simetrale dužina $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ sijeku se u $S$. $\square$

Iz prethodnog dokaza slijedi da je točka $S$ jednako udaljena od vrhova trokuta. Stavimo $R = |SA| = |SB| = |SC|$. Kružnica $k = k(S, R)$ prolazi vrhovima trokuta $ABC$ i naziva se **kružnica opisana trokutu** $ABC$.

Dakle, središte kružnice opisane trokutu je sjecište simetrala njegovih stranica.



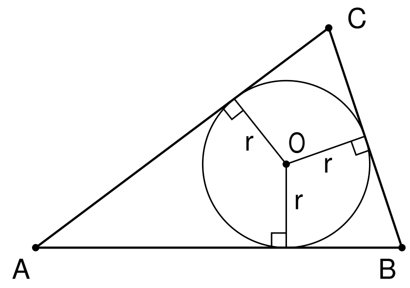

**Teorem 2.17 (teorem o simetralama kutova trokuta).** *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.*



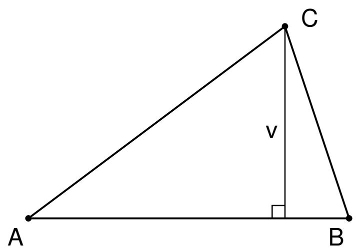

*Dokaz.* Neka je $O$ sjecište simetrala $\sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle ABC$. Kako $O$ leži na simetrali $\sphericalangle CAB$, teorem 2.14 povlači da je $d(O, AB) = d(O, AC)$, a kako $O$ leži i na simetrali $\sphericalangle ABC$, teorem 2.14 povlači da je $d(O, AB) = d(O, BC)$. Dakle, $d(O, AC) = d(O, BC)$. Prema teoremu 2.14, $O$ leži na simetrali $\sphericalangle ACB$. Prema tome, simetrale unutarnjih kutova trokuta $ABC$ sijeku se u $O$. $\square$

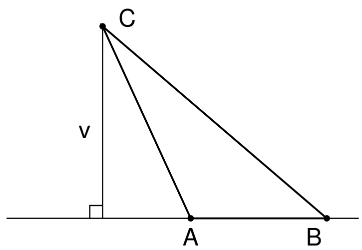
Iz prethodnog dokaza slijedi da kružnica $k(O,r)$ oko točke $O$ polumjera $r = d(O,AB) = d(O,AC) = d(O,BC)$ dodiruje sve stranice trokuta. Ta se kružnica naziva **kružnica upisana trokutu** $ABC$.

Dakle, središte kružnice upisane trokutu je sjecište simetrala njegovih kutova.

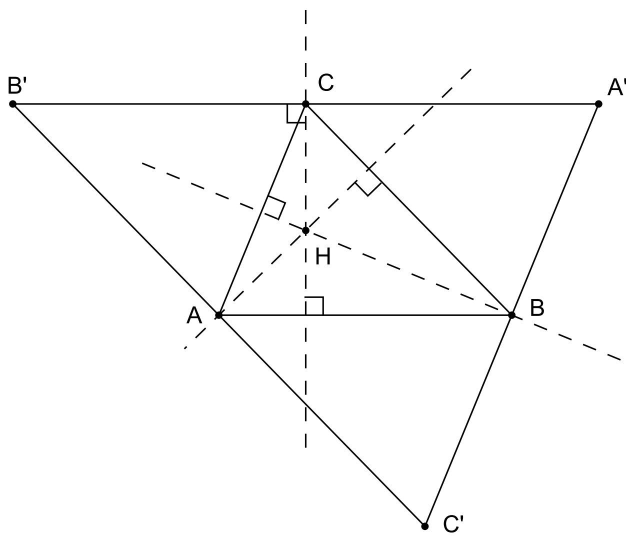



**Visina trokuta** je dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi nožište okomice spuštene iz tog vrha na pravac na kojemu leži suprotna stranica.



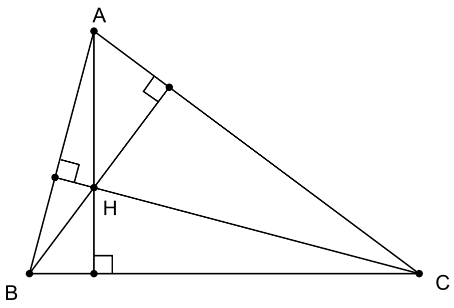

**Teorem 2.18 (teorem o ortocentru).** *Pravci na kojima leže visine trokuta sijeku se u jednoj točki.*



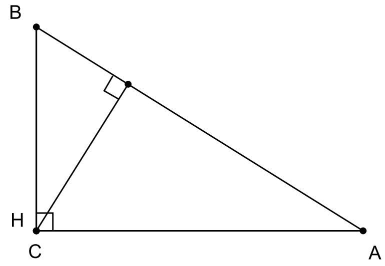

*Dokaz.* Svakim vrhom trokuta povucimo paralelu sa suprotnom stranicom. Tako se dobije $\triangle A'B'C'$.

Četverokut $ABA'C$ je paralelogram. Teorem 2.9($i$)⇒($iii$) povlači $|AB| = |CA'|$. Također, četverokut $ABCB'$ je paralelogram, pa teorem 2.9($i$)⇒($iii$) povlači $|AB| = |B'C|$. Dakle, $|B'C| = |CA'|$, pa je $C$ polovište stranice $\overline{A'B'}$.

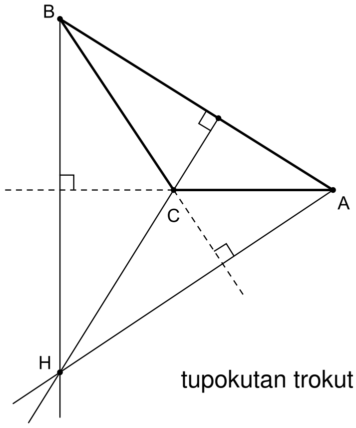
Visina na stranicu $\overline{AB}$ okomita je na tu stranicu, pa onda i na $\overline{A'B'}$. Prema tome, pravci na kojima leže visine trokuta $ABC$ ujedno su simetrale stranica trokuta $A'B'C'$. Prema teoremu 2.16, simetrale stranica trokuta $A'B'C'$ sijeku se u jednoj točki. Stoga se i tri pravca na kojima leže visine trokuta $ABC$ sijeku u jednoj točki. □



šiljastokutan trokut



pravokutan trokut



tupokutan trokut

Točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta naziva se **ortocentar** trokuta.

Uočite da nismo rekli: "visine trokuta se sijeku u jednoj točki ", već: "pravci na kojima leže visine trokuta se sijeku u jednoj točki".

Težište, središte trokutu opisane kružnice, središte trokutu upisane kružnice i ortocentar zajedničkim imenom nazivamo **četiri karakteristične točke trokuta**.

# Poglavlje 3

# Površina

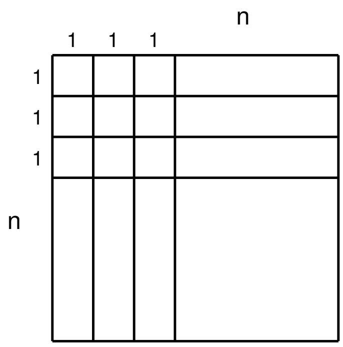
Izvest ćemo formule za površine nekih istaknutih skupova točaka u ravnini, podrazumijevajući pod njihovom površinom veličinu pripadnog dijela ravnine.

Polazimo od pretpostavke da kvadrat čija je stranica duljine 1 ima površinu 1.

U čitavom tekstu traženu površinu označavamo s $P$.

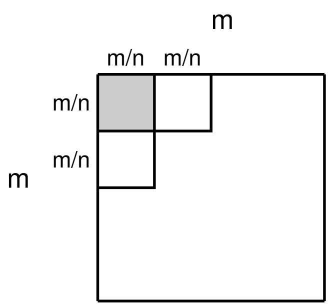
**Površina kvadrata** sa stranicom duljine $a$:

Neka je $a = n \in \mathbb{N}$.



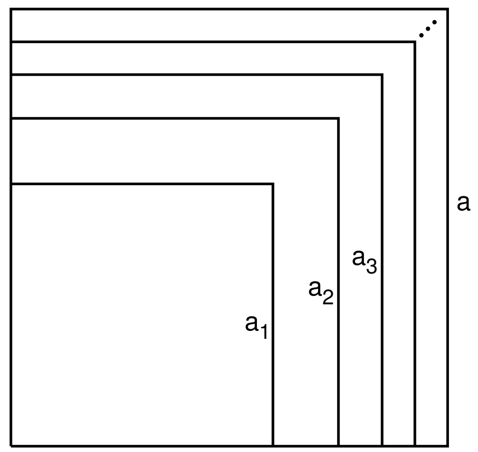

Uočimo da je kvadrat sa stranicom duljine $n$ unija $n^2$ kvadrata sa stranicom duljine 1. Slijedi $P = 1 + 1 + \cdots + 1 = n^2$.

Neka je $a \in \mathbb{Q}^+$ tj. $a = \dfrac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$.



Dopunimo kvadrat sa stranicom duljine $\frac{m}{n}$ kvadratima čije su stranice također duljina $\frac{m}{n}$ dok ne dobijemo kvadrat sa stranicom duljine $m$. Ukupno $n^2$ kvadrata sa stranicom duljine $\frac{m}{n}$ čini kvadrat sa stranicom duljine $m$. Slijedi $P + P + \cdots + P = m^2$, pa je $n^2 P = m^2$ i konačno $P = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

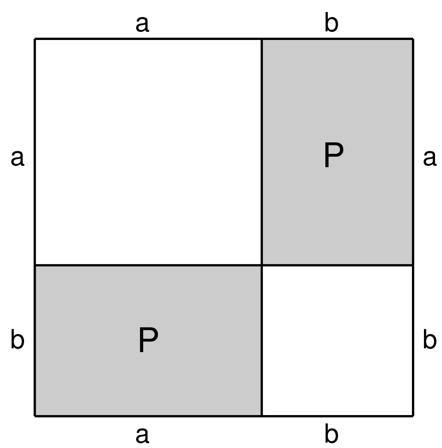
Neka je $a \in \mathbb{R}$. Iz matematičke analize poznato je da postoji rastući niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ racionalnih brojeva koji teži k $a$.




Površine kvadrata sa stranicama duljina $a_1, a_2, a_3, \ldots$ teže površini kvadrata sa stranicom duljine $a$; stoga $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ teži prema $P$. No, kako niz $a_1, a_2, a_3, \ldots$ teži k $a$, niz $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ teži k $a^2$. Slijedi $P = a^2$.

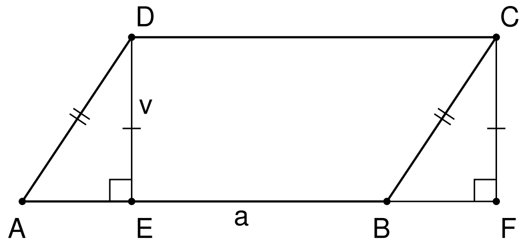
Dakle, površina kvadrata sa stranicom duljine $a$ iznosi $a^2$.

**Površina pravokutnika** sa stranicama duljina $a$ i $b$:




Pravokutnik dopunimo do kvadrata sa stranicom duljine $a + b$. Polaznom pravokutniku se dodaju jedan njemu sukladan pravokutnik, te dva kvadrata sa stranicama duljine $a$ odnosno $b$. Slijedi $2P + a^2 + b^2 = (a + b)^2$ i konačno $P = ab$.

**Površina paralelograma** kojemu je jedna stranica duljine $a$, a pripadna visina duljine $v$ :

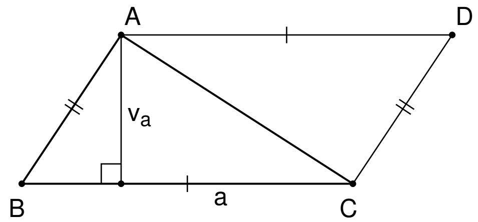



Prema S-S-K$^>$ teoremu trokuti $BFC$ i $AED$ su sukladni, pa imaju jednaku površinu. Stoga je

$$\begin{aligned} P(ABCD) &= P(AED) + P(EBCD) = P(BFC) + P(EBCD) \\ &= P(EFCD) = av, \end{aligned}$$

jer je $EFCD$ pravokutnik sa stranicama duljina $a$ i $v$.

**Površina trokuta** kojemu je jedna stranica duljine $a$, a pripadna visina duljine $v_a$ :

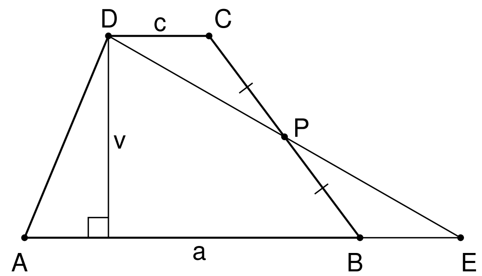



Neka je $D$ sjecište paralele s $BC$ kroz $A$ i paralele s $AB$ kroz $C$. Tada je $ABCD$ paralelogram, pa je $|AD| = |BC|$ i $|CD| = |AB|$. Kako su, prema S-S-S teoremu o sukladnosti, trokuti $ABC$ i $CDA$ sukladni, to su im površine jednake. Slijedi

$$P(ABC) + P(CDA) = P(BCDA) = av_a$$

odnosno $2P(ABC) = av_a$ i konačno $P(ABC) = \frac{1}{2}\, av_a$.

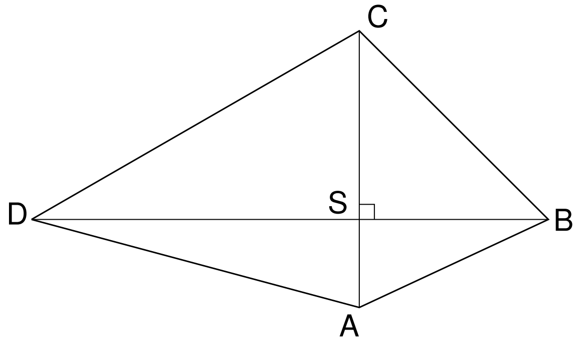
**Površina trapeza** kojemu osnovice imaju duljine $a$ i $c$, a visina duljinu $v$ :



Neka je $P$ polovište stranice $\overline{BC}$. Prema K-S-K teoremu su trokuti $DPC$ i $EPB$ sukladni. Slijedi $P(DPC) = P(EPB)$ i $|CD| = |BE|$. Sada je

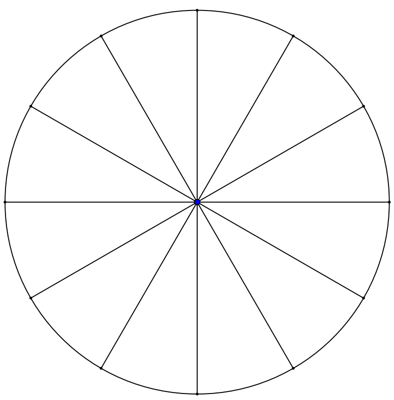
$$\begin{aligned} P(ABCD) &= P(ABPD) + P(DPC) = P(ABPD) + P(EPB) \\ &= P(AED) = \frac{1}{2}\,|AE|v = \frac{1}{2}\,(|AB| + |BE|)\,v = \frac{1}{2}(a+c)v. \end{aligned}$$

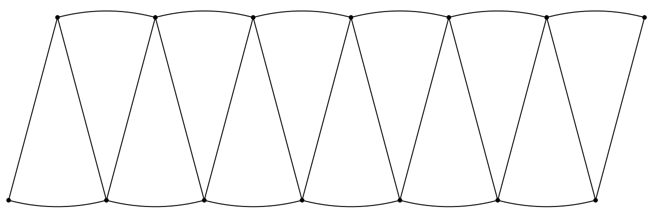
**Površina četverokuta s okomitim dijagonalama:**




$$\begin{aligned} P(ABCD) &= P(ABS) + P(BCS) + P(CDS) + P(DAS) \\ &= \frac{1}{2}|SA|\,|SB| + \frac{1}{2}|SB|\,|SC| + \frac{1}{2}|SC|\,|SD| + \frac{1}{2}|SD|\,|SA| \\ &= \frac{1}{2}|SB|\,(|SA| + |SC|) + \frac{1}{2}|SD|\,(|SA| + |SC|) \\ &= \frac{1}{2}\,(|SA| + |SC|)\,(|SB| + |SD|) = \frac{1}{2}|AC|\,|BD|. \end{aligned}$$

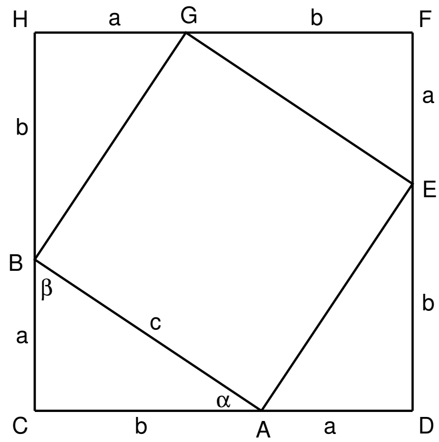
Prisjetimo se, broj $\pi$ smo definirali kao omjer opsega i promjera kružnice. Može se dokazati da **površina kruga** polumjera $r$ iznosi $r^2\pi$.





Iako je za strogi matematički dokaz potrebno poznavanje metoda matematičke analize, u ispravnost navedene formule možemo se uvjeriti na sljedeći način. Podijelimo krug na jednake dijelove koje zatim presložimo kao na desnoj slici. Dobiveni lik podsjeća na paralelogram; što je više dijelova, sličnost će biti veća. Osnovica tog "paralelograma" je duljine $r\pi$ (polovina opsega kruga), a njegova visina $r$.

**Teorem 3.1 (Pitagorin teorem).** *U pravokutnom trokutu je kvadrat duljine hipotenuze jednak zbroju kvadrata duljina kateta.*




*Dokaz.* Neka je trokut $ABC$ pravokutan s hipotenuzom duljine $c$ i katetama duljina $a$ i $b$. Dopunimo taj trokut do kvadrata $CDFH$ sa stranicom $a+b$; $|AD| = a$, $|BH| = b$. Neka je $E$ točka na stranici $\overline{DF}$ takva da je $|DE| = b$, $|EF| = a$; neka je $G$ točka na stranici $\overline{FH}$ takva da je $|FG| = b$, $|GH| = a$.

Trokuti $EAD$, $GEF$, $BGH$ i $ABC$ su sukladni prema S-K-S teoremu. Slijedi $|AE| = |AB| = c$ i $\sphericalangle EAD = \sphericalangle ABC = \beta$, pa slijedi

$$\sphericalangle BAE = 180^\circ - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle EAD) = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Također je $|AE| = |EG| = |GB| = |BA| = c$, pa je četverokut $AEGB$ kvadrat sa stranicom duljine $c$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
P(CDFH) &= P(ABC) + P(EAD) + P(GEF) + P(BGH) + P(AEGB),\\
P(CDFH) &= 4P(ABC) + P(AEGB),\\
(a+b)^2 &= 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2,\\
a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2,\\
c^2 &= a^2 + b^2.
\end{aligned}$$

□

Sada dokažimo obrat Pitagorinog teorema:

**Propozicija 3.2.** *Ako za stranice $a, b, c$ trokuta $ABC$ vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, tada je trokut $ABC$ pravokutan s pravim kutom kod vrha $C$.*

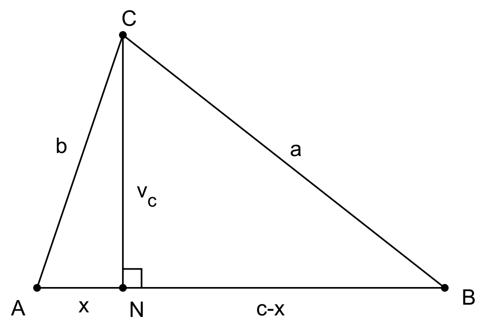
*Dokaz.* Neka je $\triangle A'B'C'$ pravokutan s pravim kutom kod vrha $C'$ te neka je $|B'C'| = a$ i $|A'C'| = b$. Pitagorin teorem povlači $|A'B'|^2 = a^2 + b^2$. No, po pretpostavci je $a^2 + b^2 = c^2$. Slijedi $|A'B'|^2 = c^2$, pa je $|A'B'| = c$. Prema tome $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ prema S-S-S teoremu. Slijedi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B' = 90^\circ$. Dakle, trokut $ABC$ je pravokutan s pravim kutom kod vrha $C$. □

**Teorem 3.3 (Heronova formula).** *Ako stranice trokuta imaju duljine $a$, $b$, $c$, tada je površina tog trokuta dana sa*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

*gdje je $s$ poluopseg trokuta tj. $s = \frac{a+b+c}{2}$.*

*Dokaz.* Neka je $C$ vrh trokuta takav da je pripadni kut $\gamma$ šiljast. Neka je $N$ nožište visine iz vrha $C$. Tada je $|CN| = v_c$. Neka je $|AN| = x$. Tada je $|NB| = |AB| - |AN| = c - x$.




Kako je $\triangle ANC$ pravokutan, a katete mu imaju duljine $x$, $v_c$ i hipotenuza duljinu $b$, Pitagorin teorem daje

$$v_c^2 = b^2 - x^2. \tag{3.1}$$

Obzirom da je $\triangle CNB$ pravokutan, a katete mu imaju duljine $v_c$, $c - x$ i hipotenuza duljinu $a$, Pitagorin teorem daje

$$v_c^2 = a^2 - (c-x)^2. \tag{3.2}$$

Iz (3.1) i (3.2) slijedi

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= a^2 - (c-x)^2 \\ &= a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \\ 2cx &= -a^2 + b^2 + c^2, \\ x &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem (3.3) u (3.1) dobije se

$$\begin{aligned} v_c^2 &= b^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)^2 \\ &= \left(b - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right) \cdot \left(b + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right) \\ &= \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2c} \cdot \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2c} \\ &= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2c} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2c} \end{aligned}$$

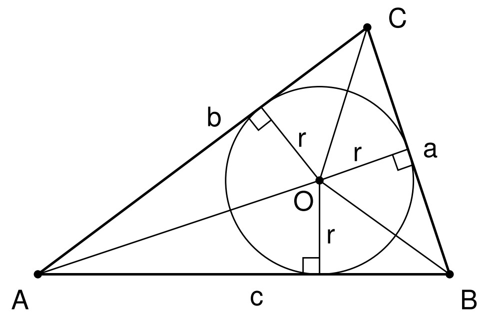
$$
\begin{aligned}
&= \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2c}\cdot\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2c}\\
&= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4c^2}\\
&= \frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4c^2}\\
&= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2},\\
v_c &= \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\\
\frac{cv_c}{2} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\\
P &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.
\end{aligned}
$$

□

Prisjetimo se, kružnica upisana trokutu je kružnica koja dodiruje sve tri stranice trokuta; njeno središte je sjecište simetrala kutova trokuta.

Odredimo vezu površine trokuta, duljina njegovih stranica i polumjera trokutu upisane kružnice.

Neka je $ABC$ trokut čije stranice imaju duljine $a, b, c$ i sa $s$ označimo njegov poluopseg. Neka je $P$ njegova površina, $r$ polumjer upisane kružnice, a $O$ njeno središte.



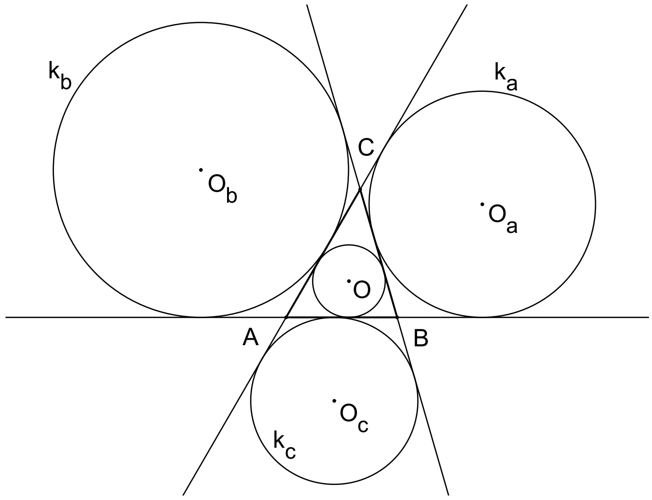

Kako je

$$
\begin{aligned}
P &= P(ABO)+P(BCO)+P(CAO)\\
&= \frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs,
\end{aligned}
$$

to je

$$
r=\frac{P}{s}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.
$$

Za svaki trokut, osim upisane kružnice, postoje još tri kružnice koje dodiruju pravce na kojima leže stranice trokuta. Kažemo da su to **kružnice pripisane trokutu**.

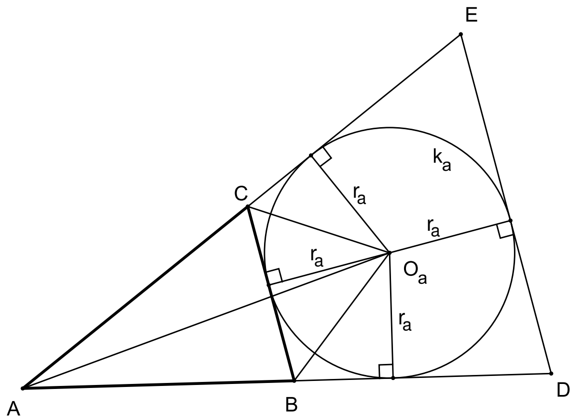



Neka je $k_a$ kružnica pripisana trokutu $ABC$, koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$. Povucimo paralelu sa $\overline{BC}$ koja dodiruje $k_a$; sjecišta te paralele s pravcima $AB$ i $AC$ redom označimo sa $D$ i $E$.

Uočimo da je $k_a$ kružnica upisana trokutu $ADE$; stoga je njeno središte $O_a$ sjecište simetrala kutova $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle DEA$.

Prema teoremu o simetrali kuta, točka $O_a$ je jednako udaljena od pravaca $AB$, $AC$ i $DE$. Kako je udaljenost točke $O_a$ od $DE$ jednaka udaljenosti točke $O_a$ od $BC$, to je $O_a$ jednako udaljena od pravaca $AB$, $AC$ i $BC$.

Dakle, $O_a$ leži na simetralama kutova $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle BCE$, $\sphericalangle CBD$.




Prema tome, središte kružnice pripisane trokutu je sjecište simetrala jednog unutarnjeg kuta i dvaju vanjskih kutova trokuta.

Odredimo vezu površine trokuta, duljina njegovih stranica i polumjerâ njemu pripisanih kružnica.

Iz

$$\begin{aligned} P &= P(ABO_a) + P(AO_aC) - P(BO_aC) = \frac{1}{2}\,cr_a + \frac{1}{2}\,br_a - \frac{1}{2}\,ar_a \\ &= \frac{1}{2}\,r_a(b+c-a) = r_a\left(\frac{1}{2}\,(a+b+c) - a\right) = r_a(s-a) \end{aligned}$$

slijedi

$$r_a = \frac{P}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}.$$

Analogno,

$$r_b = \frac{P}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}, \qquad r_c = \frac{P}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}.$$

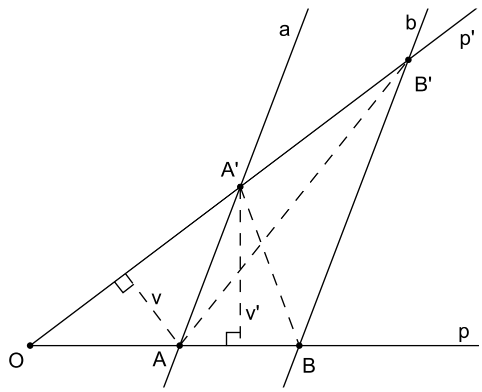
# Poglavlje 4

# Sličnost trokuta

Sljedeći teorem je poznat pod nazivom Talesov teorem o proporcionalnosti. Dovodi se u vezu s Talesom (oko 600. god. pr. Kr.) jer je, prema Plutarhu, ovom metodom izračunao visinu Keopsove piramide.

**Teorem 4.1 (Talesov teorem o proporcionalnosti).** *Paralelni pravci $a$ i $b$ na krakovima $\sphericalangle pOp'$ odsijecaju proporcionalne dužine, tj. (uz oznake na slici) vrijedi*

*(i)* $\dfrac{|OA|}{|OB|} = \dfrac{|OA'|}{|OB'|}$, *(ii)* $\dfrac{|OA|}{|AB|} = \dfrac{|OA'|}{|A'B'|}$, *(iii)* $\dfrac{|OA|}{|OB|} = \dfrac{|AA'|}{|BB'|}$.




*Dokaz.* $(i)$ Najprije uočimo da je

$$P(OAB') = P(OAA') + P(AA'B'),\ P(OA'B) = P(OAA') + P(AA'B).$$

Kako su $a$ i $b$ paralelni, to je duljina visine na stranicu $\overline{AA'}$ u trokutu $AA'B$ jednaka duljini visine na tu istu stranicu u trokutu $AA'B'$. Slijedi $P(AA'B) = P(AA'B')$. Stoga je $P(OAB') = P(OA'B)$, pa je i

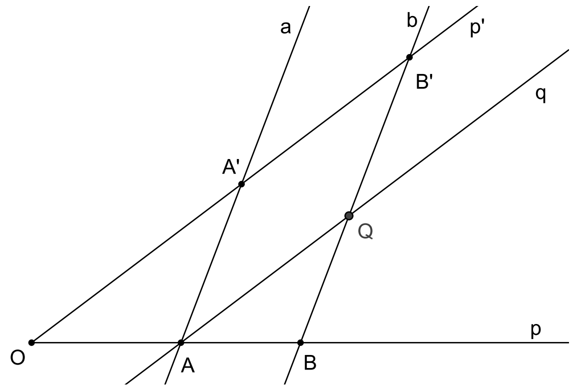
$$\frac{P(OAA')}{P(OA'B)} = \frac{P(OAA')}{P(OAB')}.$$

Kako je visina iz vrha $A'$ zajednička za trokute $\triangle OAA'$ i $\triangle OA'B$, to je lijeva strana gornje jednakosti jednaka $\frac{|OA|}{|OB|}$. Analogno, visina iz vrha $A$ je zajednička za trokute $\triangle OAA'$ i $\triangle OAB'$, pa je desna strana gornje jednakosti jednaka $\frac{|OA'|}{|OB'|}$. Slijedi tvrdnja.

(*ii*) Vrijedi

$$\frac{|A'B'|}{|OA'|} = \frac{|OB'| - |OA'|}{|OA'|} = \frac{|OB'|}{|OA'|} - 1 \overset{1^\circ}{=} \frac{|OB|}{|OA|} - 1 = \frac{|OB| - |OA|}{|OA|} = \frac{|AB|}{|OA|}.$$

(*iii*) Neka je $q$ pravac koji prolazi kroz $A$ i paralelan je s $p'$. Neka je točka $Q$ pre-



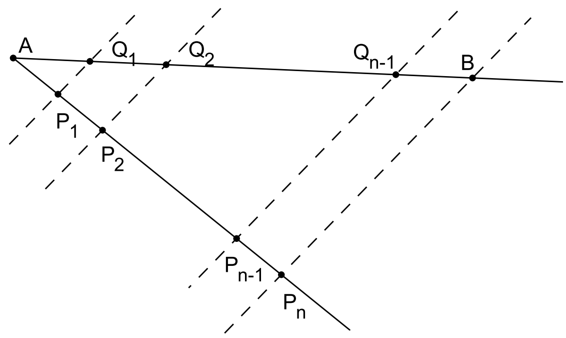

sjek pravaca $b$ i $q$. Prema (*i*), paralelni pravci $p'$ i $q$ na krakovima $\sphericalangle OBB'$ odsijecaju proporcionalne dužine, $\dfrac{|BA|}{|BO|} = \dfrac{|BQ|}{|BB'|}$. Redom slijedi

$$\frac{|OB| - |OA|}{|OB|} = \frac{|BB'| - |QB'|}{|BB'|}, \quad 1 - \frac{|OA|}{|OB|} = 1 - \frac{|QB'|}{|BB'|}, \quad \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|QB'|}{|BB'|}.$$

Kako je $QAA'B'$ paralelogram, $|B'Q| = |AA'|$ pa slijedi tvrdnja. □

**Problem.** Zadani su dužina $\overline{AB}$ i $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dužinu $\overline{AB}$ podijeliti na $n$ jednakih dijelova.

Neka je $p$ bilo koji polupravac s početkom u $A$, različit od $AB$. Na $p$ izaberimo bilo koju točku $P_1$. Neka su $P_2, \ldots, P_n$ točke na polupravcu $p$ takve da je $|P_1P_2| = |P_2P_3| = \cdots = |P_nP_{n-1}| = |AP_1|$.




Slijedi $|AP_1| = \frac{1}{n}|AP_n|$ i $|AP_i| = i|AP_1| = \frac{i}{n}|AP_n|$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Neka je sa $q_n$ označen pravac $BP_n$ te neka je $q_i$ pravac paralelan s $q_n$ koji prolazi kroz $P_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Sa $Q_i$ označimo sjecište pravca $q_i$ i dužine $\overline{AB}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti je $\dfrac{|AQ_i|}{|AB|} = \dfrac{|AP_i|}{|AP_n|}$ i stoga $\dfrac{|AQ_i|}{|AB|} = \dfrac{i}{n}$, $|AQ_i| = \dfrac{i}{n}\,|AB|$. Sada je

$$|Q_iQ_{i+1}| = |AQ_{i+1}| - |AQ_i| = \frac{i+1}{n}\,|AB| - \frac{i}{n}\,|AB| = \frac{1}{n}\,|AB|.$$

Dakle, točke $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ dijele $\overline{AB}$ na $n$ jednakih dijelova.

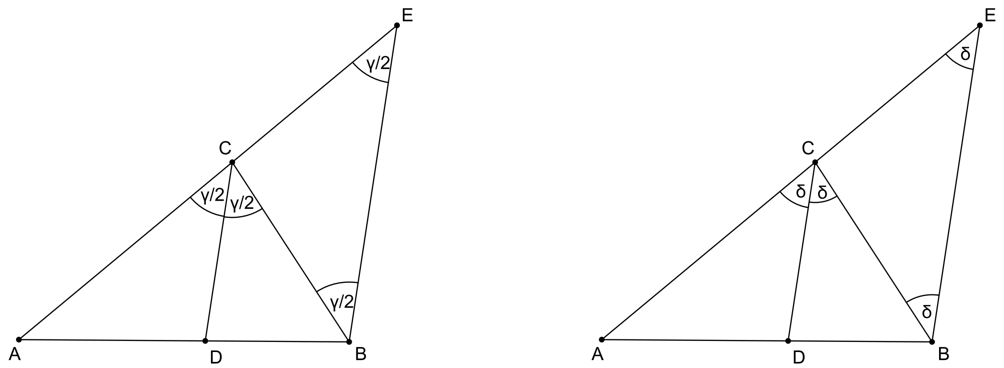
**Teorem 4.2 (o simetrali unutarnjeg kuta trokuta).** *Simetrala unutarnjeg kuta trokuta dijeli tom kutu nasuprotnu stranicu u omjeru preostalih stranica i obratno, točka koja stranicu trokuta dijeli u omjeru preostalih stranica leži na simetrali kuta nasuprot te stranice.*

*Dokaz.* $\Rightarrow$: Neka je $CD$ simetrala kuta $\gamma$. Kroz točku $B$ povucimo paralelu sa $CD$. Neka je $E$ sjecište te paralele s produžetkom $\overline{AC}$ preko $C$. Vrijedi $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$.

Tada je, prema teoremu 1.3, $\sphericalangle BEC = \sphericalangle DCA = \frac{\gamma}{2}$ i $\sphericalangle EBC = \sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$.

Zaključujemo $\sphericalangle BEC = \sphericalangle EBC$, pa je trokut $BEC$ jednakokračan s osnovicom $\overline{BE}$. Slijedi $|BC| = |CE|$. Primijenimo Talesov teorem o proporcionalnosti (teorem 4.1($ii$)) na $\sphericalangle EAB$ i paralelne pravce $CD$ i $BE$ :

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CE|} \quad \Rightarrow \quad \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$



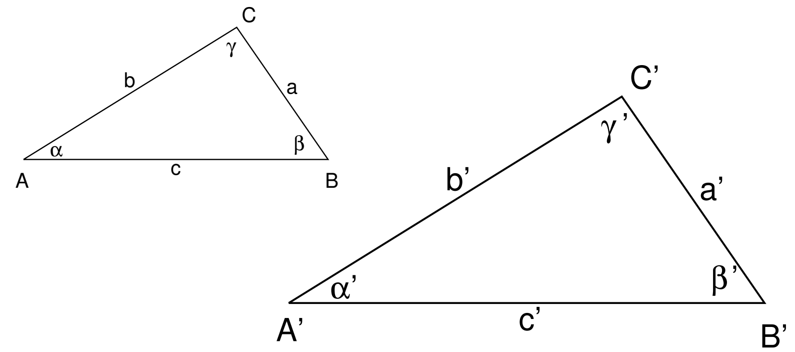

$\Leftarrow$: Neka je $D \in \overline{AB}$ točka sa svojstvom $\dfrac{|AD|}{|BD|} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$. Kroz točku $B$ povucimo paralelu sa $CD$. Neka je $E$ sjecište te paralele s produžetkom $\overline{AC}$ preko $C$.

Primijenimo Talesov teorem o proporcionalnosti (teorem 4.1($ii$)) na $\sphericalangle EAB$ i paralelne pravce $CD$ i $BE$ : $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AC|}{|CE|}$. Dakle, $|BC| = |CE|$, pa je $\triangle BEC$ jednakokračan s osnovicom $\overline{BE}$. Stoga je $\sphericalangle BEC = \sphericalangle CBE$. Taj kut označimo s $\delta$.

Obzirom da je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CBE = \delta$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BEC = \delta$ (kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca $BE$ i $CD$), slijedi $\sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$, pa je $CD$ je simetrala kuta $\sphericalangle ACB$. $\square$

Za dva trokuta kažemo da su **slični** ako su im odgovarajući kutovi sukladni i odgovarajuće stranice proporcionalne. Oznaka: $\sim$ .

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ako je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ i $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.




Možemo reći da slični trokuti imaju isti oblik, a sukladni trokuti imaju isti oblik i veličinu. Jasno je da su sukladni trokuti ujedno i slični trokuti.

U definiciji sličnosti trokuta zahtijeva se previše, a to nam govore sljedeći teoremi o sličnosti trokuta, tj. minimalni dovoljni uvjeti za sličnost trokuta.

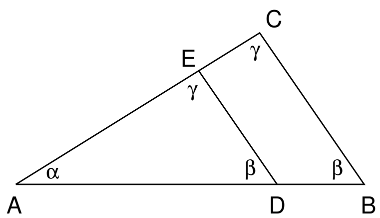
**Teorem 4.3 (K-K-K sličnost).** *Dva trokuta su slična ako su im sva tri kuta sukladna.*

Napomenimo da je dovoljno zahtijevati sukladnost dvaju parova kutova jer im tada i treći par kutova mora biti sukladan.

*Dokaz.* Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.

Ako su im i odgovarajuće stranice sukladne, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ i stoga $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Preostaje dokazati teorem u slučaju kada postoje odgovarajuće stranice koje nisu sukladne, recimo $c' \neq c$.

Pretpostavimo da je $c' < c$ (inače zamijenimo uloge trokuta $ABC$ i trokuta $A'B'C'$).




Neka je $D$ točka na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|AD| = c'$. Kroz točku $D$ povučemo paralelu sa $BC$; neka je $E$ presjek te paralele sa $\overline{AC}$. Vrijedi: $\sphericalangle ADE = \beta$, $\sphericalangle DEA = \gamma$ (kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca).

Kako je $|AD| = |A'B'|$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle A'B'C'$, $\sphericalangle EAD = \sphericalangle C'A'B'$, to su trokuti $ADE$ i $A'B'C'$ sukladni prema K-S-K teoremu. Slijedi $|AE| = |A'C'|$, $|DE| = |B'C'|$. Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti je

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|BC|}{|DE|}, \qquad \text{to jest} \qquad \frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|}.$$

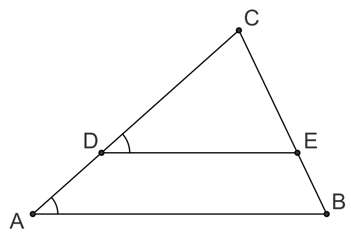
Dakle, trokuti $ABC$ i $A'B'C'$ su slični. $\square$

**Teorem 4.4 (S-S-S sličnost).** *Dva trokuta su slična ako su im odgovarajuće stranice proporcionalne.*

*Dokaz.* Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$.

Ako je $b = b'$, tada je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ prema S-S-S teoremu.

Neka je $b \neq b'$. Pretpostavimo da je $b' < b$ (inače zamijenimo $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$). Neka je $D$ točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $|CD| = b'$. Neka je $E$ sjecište dužine $\overline{BC}$ i paralele s $AB$ kroz $D$.




Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti je

$$\frac{|DE|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|BC|},$$

odakle slijedi

$$\frac{|DE|}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{|CE|}{a}, \qquad \frac{|DE|}{c} = \frac{c'}{c}, \qquad \frac{|CE|}{a} = \frac{a'}{a},$$

pa je $|DE| = c'$ i $|CE| = a'$.

Sada je $|DE| = |A'B'|$, $|CE| = |B'C'|$, $|CD| = |A'C'|$, pa su trokuti $DEC$ i $A'B'C'$ sukladni prema S-S-S teoremu. Znači da su odgovarajući kutovi trokuta $A'B'C'$ sukladni odgovarajućim kutovima trokuta $DEC$, a oni su opet sukladni odgovarajućim kutovima trokuta $ABC$ (kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca).

Slijedi $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, pa su trokuti $ABC$ i $A'B'C'$ slični. □

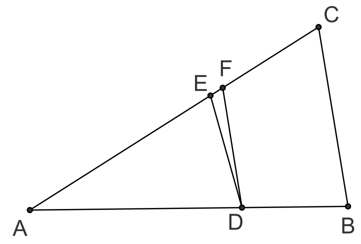
**Teorem 4.5 (S-K-S sličnost).** *Dva trokuta su slična ako su im dva para stranica proporcionalna, a kutovi među njima sukladni.*

*Dokaz.* Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ i $\alpha = \alpha'$.

Ako je $c = c'$, tada je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ prema S-K-S teoremu.

Neka je $c \neq c'$. Pretpostavimo da je $c' < c$ (inače zamijenimo $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$).

Neka je $D$ točka na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|AD| = c'$, a $E$ točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $|AE| = b'$. Iz $|AD| = |A'B'|$, $|AE| = |A'C'|$, $\sphericalangle EAD = \sphericalangle C'A'B'$ slijedi $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ prema S-K-S teoremu. Odavde je $\sphericalangle ADE = \beta'$, $\sphericalangle AED = \gamma'$, $|DE| = |B'C'|$.



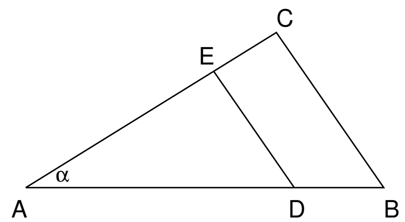

Neka je $F$ točka na pravcu $AC$ takva da su pravci $DF$ i $BC$ paralelni. Talesov teorem o proporcionalnosti povlači

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AF|}, \qquad \frac{c}{c'} = \frac{b}{|AF|},$$

pa zbog $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$ slijedi $|AF| = b'$, odnosno $|AF| = |AE|$. Zaključujemo da se točke $E$ i $F$ podudaraju, pa su pravci $DE$ i $BC$ paralelni. Odatle je $\sphericalangle ADE = \beta$ i $\sphericalangle AED = \gamma$ (kutovi uz transverzalu paralelnih pravaca), pa je $\beta' = \beta$ i $\gamma' = \gamma$.

Nadalje, prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti je i $\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|AD|}$, $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{c}{c'}$. Dakle, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. $\square$

**Teorem 4.6 (S-S-K$^>$ sličnost).** *Dva trokuta su slična ako su im dva para stranica proporcionalna, a kutovi nasuprot većim stranicama sukladni.*




*Dokaz.* Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ takvi da je $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$ i $\alpha = \alpha'$, uz $a > c$.

Ako je $c' = c$, tada je $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ prema S-S-K$^>$ teoremu. Neka je $c' < c$ (inače zamijenimo $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$).

Neka je $D$ točka na stranici $\overline{AB}$ takva da je $|AD| = c'$, a $E$ točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $DE \parallel BC$.

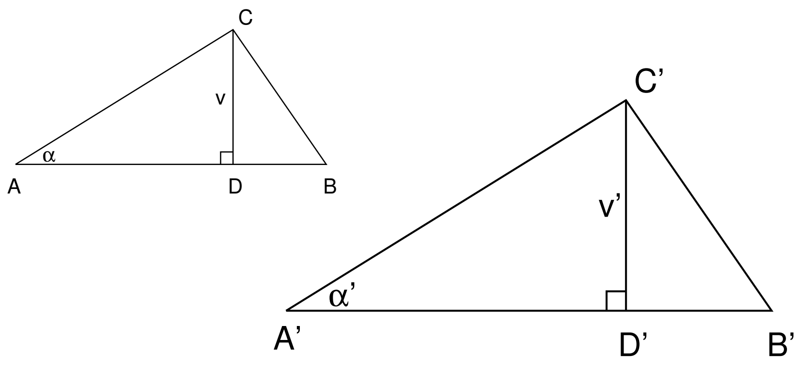
Zbog jednakosti odgovarajućih kutova uz transverzalu paralelnih pravaca, $\sphericalangle ADE = \beta$ i $\sphericalangle AED = \gamma$. Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti je $\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|}$. Stoga je $|DE| = \dfrac{|BC| \cdot |AD|}{|AB|} = \dfrac{a \cdot c'}{c} = a'$.

Sada je $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$ po S-S-K$^>$ teoremu, jer je $|AD| = c'$, $|DE| = a'$ i $\sphericalangle DAE = \alpha'$. Slijedi $|AE| = b'$, $\sphericalangle ADE = \sphericalangle A'B'C'$ tj. $\beta = \beta'$ i $\sphericalangle AED = \sphericalangle A'C'B'$ tj. $\gamma = \gamma'$.

Prema Talesovom teoremu o proporcionalnosti je $\frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|}$, $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$. $\square$

Neka je $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ te neka je $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c} = k,\ k \in \mathbb{R}^+$.

Tada je $o(A'B'C') = a' + b' + c' = ka + kb + kc = k(a + b + c) = k \cdot o(ABC)$.



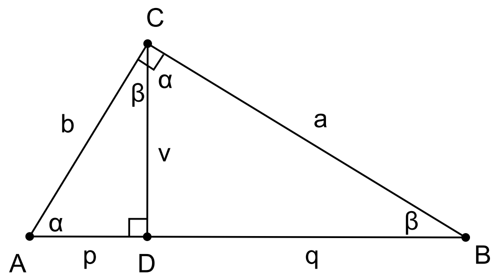

Neka je $v$ duljina visine na $\overline{AB}$ te neka je $D$ nožište te visine. Neka je $v'$ duljina visine na $\overline{A'B'}$ te neka je $D'$ nožište te visine. Kako je $\alpha' = \alpha$, to je $\triangle A'D'C' \sim \triangle ADC$ prema K-K-K teoremu. Slijedi $\frac{v'}{v} = \frac{b'}{b} = k$, pa je

$$P(A'B'C') = \frac{1}{2}c'v' = \frac{1}{2}(kc)(kv) = k^2 \cdot \frac{1}{2}cv = k^2 \cdot P(ABC).$$

Tako smo vidjeli kako se odnose **opsezi i površine sličnih trokuta**.

**Teorem 4.7 (Euklidov teorem).** *(a) Visina na hipotenuzu pravokutnog trokuta je geometrijska sredina njenih odsječaka na hipotenuzi.*

*(b) Kateta pravokutnog trokuta je geometrijska sredina hipotenuze i svoje ortogonalne projekcije na hipotenuzu.*




*Dokaz.* Neka je $D$ nožište visine iz vrha $C$ na hipotenuzu. Neka je $v = |CD|$, $p = |AD|$, $q = |DB|$. Uočimo da je $\sphericalangle DCB = \sphericalangle CAB = \alpha$ i $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC = \beta$ (šiljasti kutovi s okomitim kracima).

(a) Prema K-K-K teoremu, $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, pa je $\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|BD|}$. Slijedi $\frac{p}{v} = \frac{v}{q}$ odnosno $v = \sqrt{pq}$.

(b) Prema K-K-K teoremu, $\triangle ADC \sim \triangle ACB$, pa je $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Odatle je $\frac{p}{b} = \frac{b}{c}$ i konačno $b = \sqrt{cp}$. Analogno iz $\triangle CDB \sim \triangle ACB$ slijedi $\frac{a}{c} = \frac{q}{a}$ odnosno $a = \sqrt{cq}$.

$\square$

Uočimo da iz (b) slijedi Pitagorin teorem:

Neka je $\triangle ABC$ pravokutan s katetama $a$ i $b$ i hipotenuzom $c$. Neka su $q$ i $p$ redom ortogonalne projekcije kateta $a$ i $b$ na hipotenuzu. Tada je

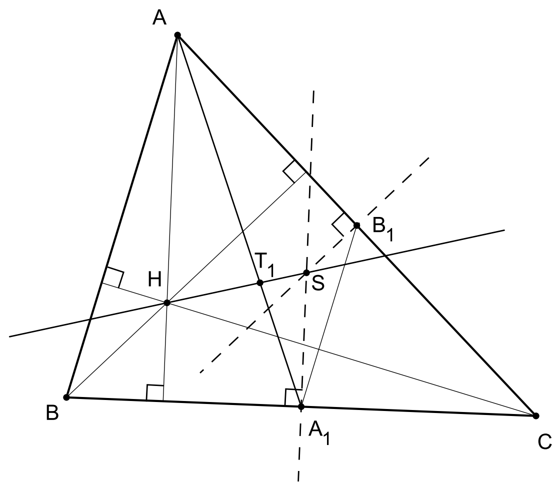
$$a^2 + b^2 = cq + cp = c(p + q) = c \cdot c = c^2.$$

**Lema 4.8.** *Ako su $X$ i $Y$ točke na dužini $\overline{AB}$ sa svojstvom $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$, tada se točke $X$ i $Y$ podudaraju.*

*Dokaz.* Iz $\frac{|AX|}{|BX|} = \frac{|AY|}{|BY|}$ slijedi $\frac{|AB|-|BX|}{|BX|} = \frac{|AB|-|BY|}{|BY|}$, pa je $\frac{|AB|}{|BX|} = \frac{|AB|}{|BY|}$. Dakle, $|BX| = |BY|$, pa se $X$ i $Y$ podudaraju. □

**Teorem 4.9.** *Središte $S$ opisane kružnice, težište $T$ i ortocentar $H$ svakog trokuta su kolinearne točke, tj. leže na jednom pravcu. Nadalje, $|TH| = 2|TS|$.*

Pravac iz teorema 4.9 naziva se **Eulerov pravac** tog trokuta.




*Dokaz.* Neka je u trokutu $ABC$ točka $A_1$ polovište stranice $\overline{BC}$, a $B_1$ polovište stranice $\overline{AC}$. Tada je $\overline{A_1B_1}$ srednjica trokuta $ABC$, pa su pravci $A_1B_1$ i $AB$ paralelni i $|A_1B_1| = \frac{1}{2}|AB|$.

Kako je pravac $AH$ okomit na $BC$ i $A_1S$ okomit na $BC$, to su pravci $AH$ i $A_1S$ paralelni. Također, pravac $BH$ je okomit na $AC$ i $B_1S$ je okomit na $AC$, pa su i pravci $BH$ i $B_1S$ paralelni. Dakle, odgovarajuće stranice u trokutima $ABH$ i $A_1B_1S$ su paralelne.

Stoga su šiljasti kutovi $\angle HAB$ i $\angle SA_1B_1$ s paralelnim kracima međusobno sukladni, kao i $\angle ABH$ i $A_1B_1S$. Sada K-K-K teorem o sličnosti povlači da su trokuti $ABH$ i $A_1B_1S$ slični, pa vrijedi $\dfrac{|AH|}{|A_1S|} = \dfrac{|AB|}{|A_1B_1|} = 2.$

Neka je točka $T_1$ presjek pravaca $HS$ i $AA_1$. Kako su pravci $AH$ i $A_1S$ paralelni, a točke $A$, $A_1$ i $T_1$ odnosno $H$, $S$ i $T_1$ kolinearne, to su trokuti $AHT_1$ i $A_1ST_1$ slični prema K-K-K teoremu. Slijedi $\dfrac{|AT_1|}{|A_1T_1|} = \dfrac{|AH|}{|A_1S|} = 2.$

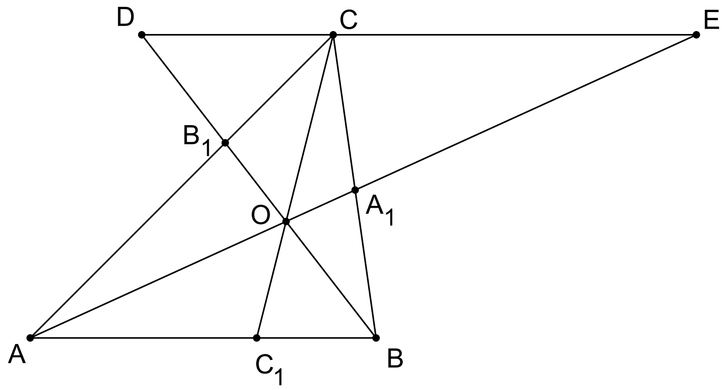
Međutim, dužina $\overline{AA_1}$ je težišnica trokuta $ABC$ i za težište $T$ tog trokuta vrijedi $\dfrac{|AT|}{|A_1T|} = 2$. Sada iz $\dfrac{|AT_1|}{|A_1T_1|} = \dfrac{|AT|}{|A_1T|}$ zbog leme 4.8 slijedi da se $T_1$ i $T$ podudaraju.

Dakle, $T$ leži na pravcu $HS$ odnosno točke $T$, $H$, $S$ su kolinearne. Kako je $\triangle AHT \sim \triangle A_1ST$, to je $\dfrac{|TH|}{|TS|} = \dfrac{|AT|}{|A_1T|} = 2$. Prema tome, $|TH| = 2|TS|$. $\square$

**Teorem 4.10 (Cevin teorem).** *Neka su $A_1$, $B_1$, $C_1$ točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta $ABC$, redom. Pravci $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ prolaze jednom točkom ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

*Dokaz.* $\Rightarrow$: Neka se pravci $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ sijeku u točki $O$.




Vrhom $C$ povučemo paralelu s $AB$. Neka je $D$ sjecište te paralele s $BB_1$, a $E$ njeno sjecište s $AA_1$.

Prema K-K-K teoremu je

$\triangle CDB_1 \sim \triangle ABB_1$, pa je $\dfrac{|CB_1|}{|B_1A|} = \dfrac{|CD|}{|AB|}$,

$\triangle ECA_1 \sim \triangle ABA_1$, pa je $\dfrac{|BA_1|}{|A_1C|} = \dfrac{|AB|}{|CE|}$,

$\triangle OAC_1 \sim \triangle OEC$, pa je $\dfrac{|AC_1|}{|CE|} = \dfrac{|C_1O|}{|CO|}$,

$\triangle CDO \sim \triangle C_1BO$, pa je $\dfrac{|CD|}{|C_1B|} = \dfrac{|CO|}{|C_1O|}$.

Slijedi

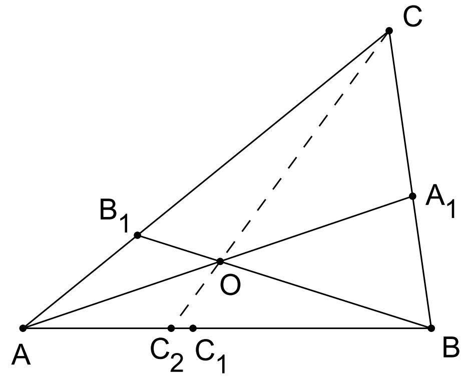
$$\frac{|CB_1|}{|B_1A|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|AC_1|}{|CE|} \cdot \frac{|CD|}{|C_1B|} = \frac{|CD|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|CE|} \cdot \frac{|C_1O|}{|CO|} \cdot \frac{|CO|}{|C_1O|}$$

i nakon kraćenja konačno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

$\Leftarrow$: Obratno, neka je

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$




Neka je sa $O$ označen presjek pravaca $AA_1$ i $BB_1$, a sa $C_2$ presjek pravaca $CO$ i $AB$. Prema već dokazanom, vrijedi

$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

Dakle,

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = \frac{|AC_2|}{|C_2B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

pa je

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC_2|}{|BC_2|}.$$

Kako točke $C_1$ i $C_2$ leže na dužini $\overline{AB}$, to lema 4.8 povlači da se one podudaraju. Stoga i pravac $CC_1$ prolazi točkom $O$. □

**Teorem 4.11 (Menelajev teorem).** *Neka su točke $B_1$ i $C_1$ na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$, a točka $A_1$ na produžetku stranice $\overline{BC}$, trokuta $ABC$. Točke $A_1$, $B_1$, $C_1$ su kolinearne ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|} \cdot \frac{|BA_1|}{|A_1C|} \cdot \frac{|CB_1|}{|B_1A|} = 1.$$

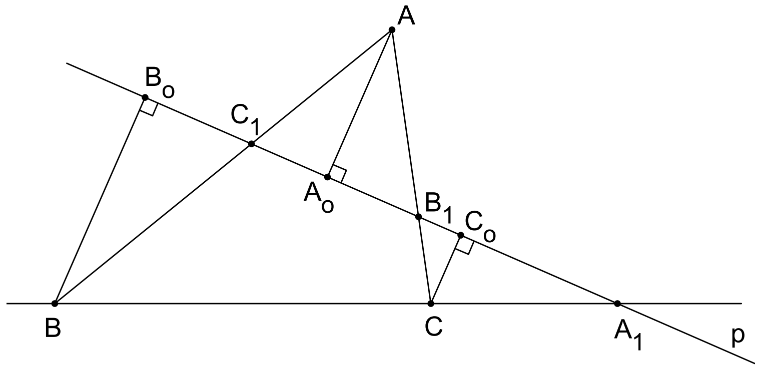
*Dokaz.* $\Rightarrow$: Neka su točke $A_1$, $B_1$, $C_1$ kolinearne te neka je $p$ pravac na kojem leže. Neka su $A_0$, $B_0$, $C_0$ točke na pravcu $p$ sa svojstvom da su pravci $AA_0$, $BB_0$, $CC_0$ okomiti na $p$.

Prema K-K-K teoremu,

$\triangle AC_1A_0 \sim \triangle BC_1B_0$, pa je $\dfrac{|AC_1|}{|C_1B|} = \dfrac{|AA_0|}{|BB_0|}$,

$\triangle CC_0B_1 \sim \triangle AA_0B_1$, pa je $\dfrac{|CB_1|}{|B_1A|} = \dfrac{|CC_0|}{|AA_0|}$,

$\triangle BA_1B_0 \sim \triangle CA_1C_0$, pa je $\dfrac{|BA_1|}{|A_1C|} = \dfrac{|BB_0|}{|CC_0|}$.




Odavde slijedi

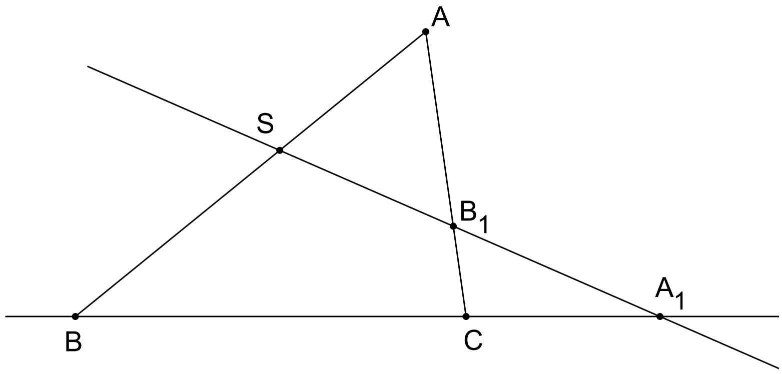
$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=\frac{|AA_0|}{|BB_0|}\cdot\frac{|CC_0|}{|AA_0|}\cdot\frac{|BB_0|}{|CC_0|}$$

odnosno

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=1.$$

$\Leftarrow$: Neka je

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1.$$




Sa $S$ označimo točku presjeka pravaca $A_1B_1$ i $AB$. Prema već dokazanom je

$$\frac{|AS|}{|SB|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=1.$$

Dakle,

$$\frac{|AC_1|}{|C_1B|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|}=\frac{|AS|}{|SB|}\cdot\frac{|BA_1|}{|A_1C|}\cdot\frac{|CB_1|}{|B_1A|},$$

pa je

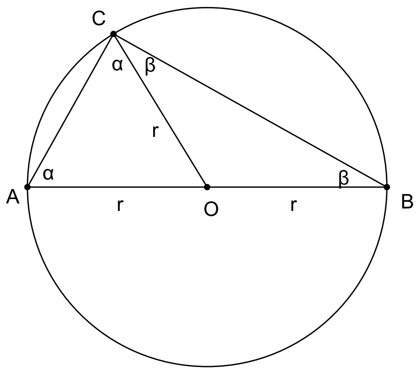
$$\frac{|AS|}{|SB|}=\frac{|AC_1|}{|C_1B|}.$$

Kako su $C_1$ i $S$ točke na dužini $\overline{AB}$, iz leme 4.8 slijedi $C_1=S$, dakle točke $A_1$, $B_1$ i $C_1$ su kolinearne. $\square$

# Poglavlje 5

# Teoremi o kružnici

**Teorem 5.1 (Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice).** *Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, a $C$ bilo koja točka kružnice različita od $A$ i $B$, tada je $\sphericalangle ACB$ pravi.*

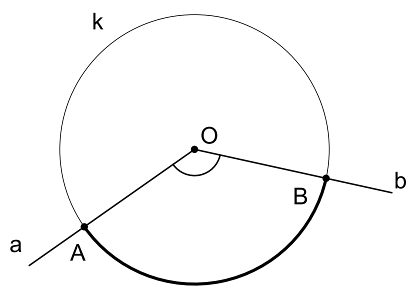


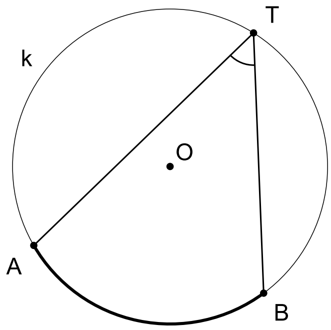

*Dokaz.* Neka je $O$ središte kružnice promjera $\overline{AB}$. Neka je $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Kako je $\triangle AOC$ jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$, to je $\sphericalangle ACO = \alpha$, a kako je $\triangle BOC$ jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$, to je $\sphericalangle BCO = \beta$. Slijedi $\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACO + \sphericalangle OCB = \alpha + \beta$. Konačno, iz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ slijedi $2\gamma = 180°$ i konačno $\gamma = 90°$. □

Kut kojemu je vrh središte $O$ kružnice $k$ zovemo **središnji kut** kružnice $k$. Krakovi $a$ i $b$ nekog središnjeg kuta $\sphericalangle aOb$ kružnice $k$ sijeku kružnicu $k$ u dvije točke $A$ i $B$. Presjek kružnice $k$ i $\sphericalangle aOb$ naziva se **kružni luk**. Često kažemo da je $\sphericalangle aOb$ (odnosno $\sphericalangle AOB$) središnji kut nad lukom $\widehat{AB}$.

Konveksni kut kojemu vrh $T$ leži na kružnici $k$ i čiji krakovi sijeku kružnicu $k$ u dvije točke $A$ i $B$ zovemo **obodni kut** kružnice $k$. Često kažemo da je $\sphericalangle ATB$ obodni kut nad lukom $\widehat{AB}$.

Sada Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice možemo izreći i ovako: Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi. Drugim riječima, središnji kut nad promjerom kružnice je dvostruko veći od obodnog kuta nad tim promjerom.



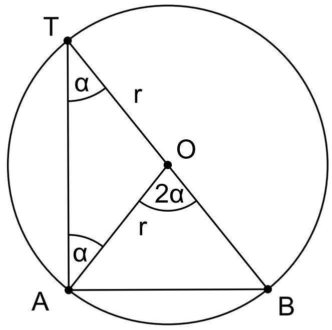




Sada ćemo poopćiti Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice:

**Teorem 5.2.** *Središnji kut nad nekim lukom jednak je dvostrukom obodnom kutu nad tim istim lukom.*

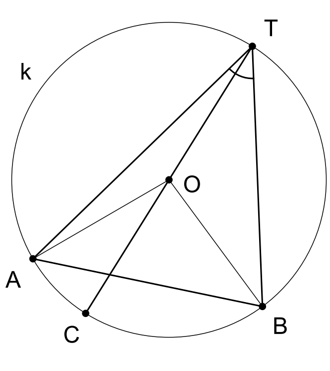
*Dokaz.* Neka je $\widehat{AB}$ luk kružnice, a $\sphericalangle ATB$ obodni kut nad tim lukom. Razlikovat ćemo tri slučaja.

1° Krak $TB$ kuta $\sphericalangle ATB$ prolazi središtem $O$ kružnice.



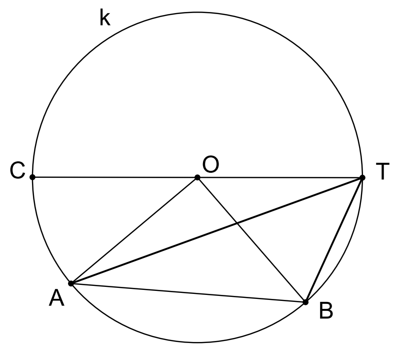

Sa $\alpha$ označimo $\sphericalangle ATB$. Kako je trokut $AOT$ jednakokračan s osnovicom $\overline{AT}$, to je i $\sphericalangle TAO = \alpha$. Obzirom da je $\sphericalangle AOB$ vanjski kut trokuta $AOT$, to je $\sphericalangle AOB = 2\alpha$. Dakle, $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ATB$.

2° Središte $O$ je unutar kuta $\sphericalangle ATB$.



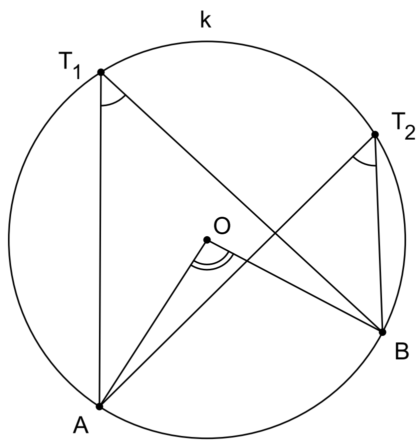
Neka je $C$ drugo sjecište pravca $TO$ i kružnice $k$. Tada je $\sphericalangle ATC$ obodni kut nad $\widehat{AC}$, a $\sphericalangle CTB$ obodni kut nad $\widehat{CB}$. Prema već dokazanom je $\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle ATC$ i analogno $\sphericalangle COB = 2\sphericalangle CTB$. Zbrajanjem dobijemo $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ATB$.

3° Središte $O$ je izvan kuta $\sphericalangle ATB$.




Neka je $C$ drugo sjecište pravca $TO$ i kružnice $k$. Tada je $\sphericalangle COA$ obodni kut nad $\widehat{CA}$, a $\sphericalangle COB$ obodni kut nad $\widehat{CB}$. Prema već dokazanom je $\sphericalangle COA = 2\sphericalangle CTA$ i analogno $\sphericalangle COB = 2\sphericalangle CTB$. Oduzimanjem dobijemo $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ATB$. □

Prema ovom teoremu, obodni kutovi nad istim lukom su sukladni.



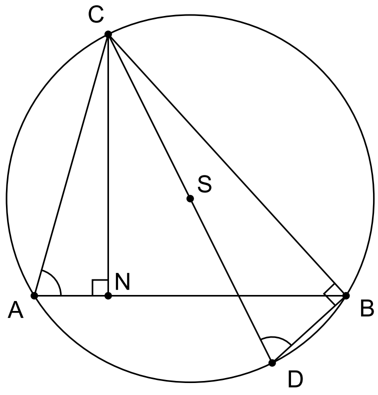

Nadalje, iz teorema 5.2 izravno slijedi i obrat teorema 5.1.

Posebno, kružnica opisana pravokutnom trokutu ima središte u polovištu hipotenuze, a polumjer joj je jednak polovini duljine hipotenuze.

Odredimo vezu površine trokuta, duljina njegovih stranica i polumjera opisane mu kružnice.

Neka je $ABC$ trokut čije stranice imaju duljine $a$, $b$, $c$. Neka je $P$ njegova površina, a $R$ polumjer njegove opisane kružnice.

Neka je $N$ nožište visine trokuta $ABC$ iz vrha $C$. Neka je $S$ središte kružnice opisane trokutu $ABC$ te neka je $D$ druga točka u kojoj pravac $CS$ siječe tu kružnicu.




Tada je prema Talesovom teoremu (teorem 5.1) $\sphericalangle CBD = 90°$.

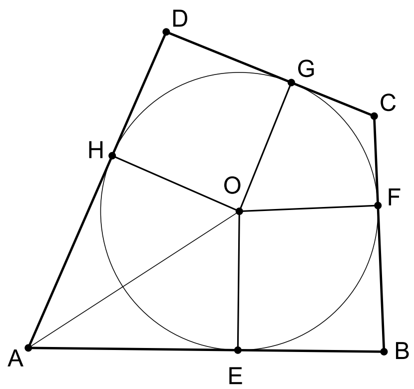
Uz to je i $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$ (obodni kutovi nad $\widehat{BC}$), pa je $\triangle ANC \sim \triangle DBC$ prema K-K-K teoremu o sličnosti.

Slijedi $\dfrac{|CN|}{|BC|} = \dfrac{|AC|}{|CD|}$ odnosno $\dfrac{|CN|}{a} = \dfrac{b}{2R}$, pa je $|CN| = \dfrac{ab}{2R}$.

Konačno,

$$P = \frac{1}{2}\,|AB| \cdot |CN| = \frac{1}{2}\,c \cdot \frac{ab}{2R} = \frac{abc}{4R}.$$

**Tangencijalni četverokut** je četverokut kome se može upisati kružnica.




Kvadrat je tangencijalni četverokut. Kružnica upisana kvadratu ima središte u sjecištu dijagonala kvadrata, a polumjer joj je jednak polovini duljine stranice kvadrata.

**Teorem 5.3.** *Zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta jednak je zbroju duljina drugih dviju stranica tog četverokuta.*

*Dokaz.* Prema S-S-K$^{>}$ teoremu je $\triangle AEO \cong \triangle AHO$ ($\overline{AO}$ im je zajednička stranica, $|OE| = |OH|$, $\sphericalangle AEO = \sphericalangle AHO = 90°$). Slijedi $|AE| = |AH|$.

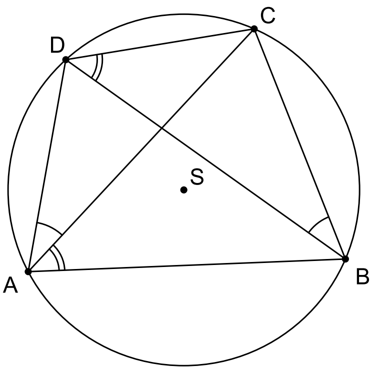
Analogno je $|BE| = |BF|$, $|CF| = |CG|$, $|DG| = |DH|$.

Konačno,

$$
\begin{aligned}
|AB| + |CD| &= (|AE| + |BE|) + (|CG| + |DG|) \\
&= (|AH| + |BF|) + (|CF| + |DH|) \\
&= (|AH| + |DH|) + (|BF| + |CF|) \\
&= |AD| + |BC|.
\end{aligned}
$$

□

**Tetivni četverokut** je četverokut kome se može opisati kružnica.




Pravokutnik je tetivni četverokut. Kružnica opisana pravokutniku ima središte u sjecištu njegovih dijagonala, a polumjer joj je jednak polovini duljine dijagonale.

**Teorem 5.4.** *Zbroj dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta je* $180°$.

*Dokaz.* Uočimo sukladnost sljedećih obodnih kutova nad istim lukom: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CDB$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD$, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Unutarnje kutove četverokuta kod vrhova $A$, $B$, $C$, $D$ označimo redom s $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Vrijedi:

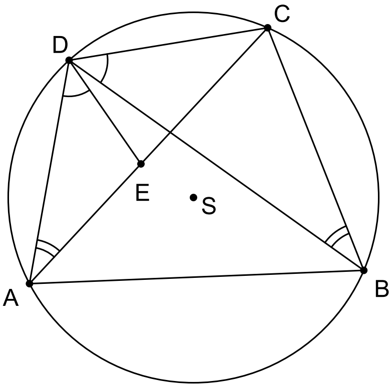
$$
\begin{aligned}
\alpha + \gamma &= (\sphericalangle DAC + \sphericalangle CAB) + (\sphericalangle ACD + \sphericalangle ACB) \\
&= (\sphericalangle DBC + \sphericalangle CDB) + (\sphericalangle ABD + \sphericalangle ADB) \\
&= (\sphericalangle ABD + \sphericalangle DBC) + (\sphericalangle ADB + \sphericalangle CDB) = \beta + \delta.
\end{aligned}
$$

Kako je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, to mora biti $\alpha + \gamma = 180°$ i $\beta + \delta = 180°$. □

**Teorem 5.5 (Ptolomejev teorem).** *Umnožak duljina dijagonala tetivnog četverokuta jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica četverokuta.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da je $\sphericalangle BDC \leq \sphericalangle ADB$ (inače zamijenimo vrhove $A$ i $C$).

Neka je $E$ točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BDC$. Kako je uz to još i $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ (obodni kutovi nad lukom $\widehat{CD}$), to su trokuti $AED$ i $BCD$ slični prema K-K-K teoremu o sličnosti.




Slijedi $\dfrac{|AE|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|BD|}$ i stoga

$$|AD| \cdot |BC| = |AE| \cdot |BD|. \tag{5.1}$$

Uočimo da je

$$\sphericalangle CDE = \sphericalangle BDC + \sphericalangle EDB = \sphericalangle ADE + \sphericalangle EDB = \sphericalangle ADB.$$

Uz to je i $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$ (obodni kutovi nad lukom $\widehat{DA}$), pa su trokuti $BDA$ i $CDE$ slični prema K-K-K teoremu. Slijedi $\dfrac{|BD|}{|CD|} = \dfrac{|BA|}{|CE|}$, pa je

$$|AB| \cdot |CD| = |BD| \cdot |CE|. \tag{5.2}$$

Zbrajanjem (5.1) i (5.2) dobije se

$$\begin{aligned} |AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| &= |AE| \cdot |BD| + |BD| \cdot |CE| \\ &= |BD|(|AE| + |CE|) = |AC| \cdot |BD|. \end{aligned}$$

$\square$

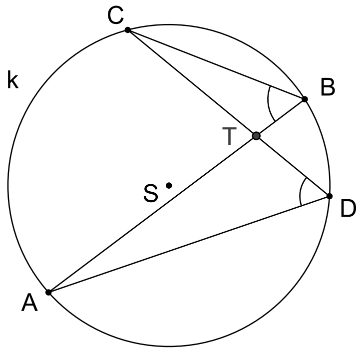
**Teorem 5.6.** *Neka je $k$ kružnica, a $T$ točka ravnine. Neka je $p$ bilo koji pravac koji prolazi točkom $T$ i siječe kružnicu $k$ u točkama $A$ i $B$. Tada je vrijednost izraza $|TA| \cdot |TB|$ konstantna, tj. ne ovisi o izboru pravca $p$.*

*Dokaz.* $1^\circ$ $T$ leži na $k$

Tada se jedna od točaka $A$ i $B$ podudara s $T$, pa je ili $|TA| = 0$ ili $|TB| = 0$. U oba slučaja je $|TA| \cdot |TB| = 0$.

$2^\circ$ $T$ je unutar $k$

Neka su kroz $T$ povučena dva pravca. Neka prvi siječe $k$ u $A$ i $B$, a drugi u $C$ i $D$.

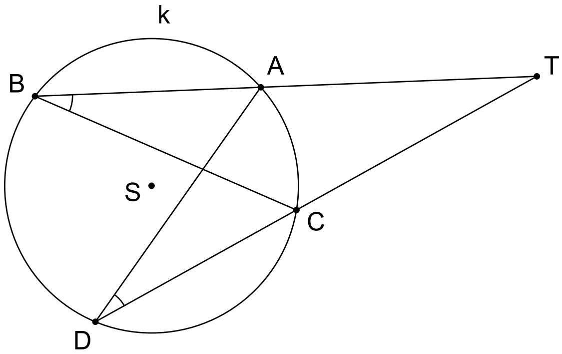



Kako je $\sphericalangle ATD = \sphericalangle CTB$ (vršni kutovi) i $\sphericalangle CBT = \sphericalangle TDA$ (obodni kutovi nad $\widehat{AC}$), to su trokuti $ATD$ i $CTB$ slični prema K-K-K teoremu o sličnosti.

Slijedi $\dfrac{|TA|}{|TD|} = \dfrac{|TC|}{|TB|}$ i odatle $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$.

3° $T$ je izvan $k$

Ponovo, neka su kroz $T$ povučena dva pravca. Neka prvi siječe $k$ u $A$ i $B$, a drugi u $C$ i $D$.




Trokuti $ATD$ i $CTB$ imaju zajednički kut kod vrha $T$. Uz to je i $\sphericalangle CBT = \sphericalangle TDA$ (obodni kutovi nad $\widehat{AC}$), pa su ti trokuti slični prema K-K-K teoremu.

Slijedi $\dfrac{|TA|}{|TD|} = \dfrac{|TC|}{|TB|}$, pa je $|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|$. □

Za danu točku $T$ i kružnicu $k$ definira se **potencija točke** $T$ obzirom na kružnicu $k$:

za točku $T$ izvan kružnice, potencija je $|TA| \cdot |TB|$,

za točku unutar kružnice, potencija je $-|TA| \cdot |TB|$.

ako je $T$ na kružnici $k$, potencija je 0.

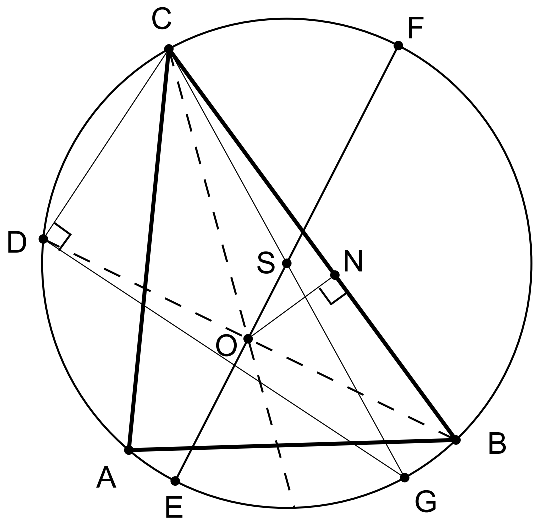
**Teorem 5.7 (Eulerov teorem).** *Neka je $k(S,R)$ kružnica opisana, a $k(O,r)$ kružnica upisana trokutu $ABC$. Tada je $|SO|^2 = R^2 - 2Rr$.*

*Dokaz.* Neka je $D$ sjecište pravca $BO$ i kružnice opisane trokutu. Pravac $BO$ je simetrala kuta $\beta$, a $CO$ simetrala kuta $\gamma$. Neka su $E$ i $F$ sjecišta pravca $SO$ i kružnice opisane trokutu. Imamo

$$|BO|\cdot|OD| \overset{\text{tm5.6}}{=} |EO|\cdot|OF| = (R-|SO|)(R+|SO|) = R^2 - |SO|^2,$$

pa je $|SO|^2 = R^2 - |BO|\cdot|OD|$.

Preostaje dokazati da je $|BO|\cdot|OD| = 2Rr$.




Vrijedi $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA$ (obodni kutovi nad $\widehat{DA}$), $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DBC = \dfrac{\beta}{2}$ ($DB$ je simetrala kuta $\beta$), $\sphericalangle ACO = \sphericalangle BCO = \dfrac{\gamma}{2}$ ($CO$ je simetrala kuta $\gamma$).

Sada je $\sphericalangle DCO = \sphericalangle DCA + \sphericalangle ACO = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$.

Osim toga, $\sphericalangle DOC$ je vanjski kut trokuta $BCO$, pa je $\sphericalangle DOC = \sphericalangle DBC + \sphericalangle BCO = \dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$. Znači da je $\sphericalangle DCO = \sphericalangle DOC$, odakle slijedi $|OD| = |CD|$.

Neka je $N$ nožište okomice iz $O$ na $\overline{BC}$. Neka je $G$ sjecište pravca $CS$ i kružnice opisane trokutu. Prema Talesovom teoremu je $\sphericalangle CDG = 90^\circ$ i stoga $\sphericalangle CDG = \sphericalangle ONB$.

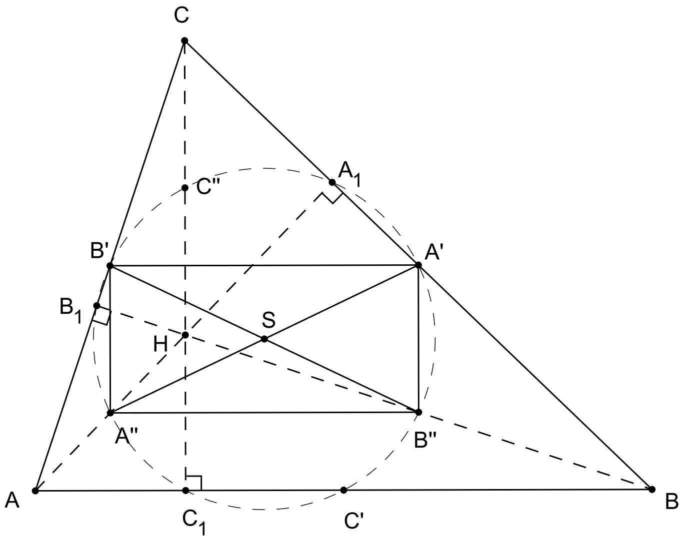
Uz to je i $\sphericalangle DGC = \sphericalangle DBC$ (obodni kutovi nad $\widehat{CD}$), pa su prema K-K-K teoremu o sličnosti trokuti $BNO$ i $GDC$ slični.

Slijedi $\dfrac{|BO|}{|GC|} = \dfrac{|NO|}{|DC|}$ odnosno $\dfrac{|BO|}{2R} = \dfrac{r}{|DC|}$, pa je konačno

$$|BO|\cdot|OD| = |BO|\cdot|CD| = 2Rr.$$

$\square$

**Teorem 5.8.** *Neka su u trokutu $ABC$ točke $A'$, $B'$, $C'$ polovišta stranica, točke $A''$, $B''$, $C''$ polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, gdje je $H$ ortocentar, a točke $A_1$, $B_1$, $C_1$ nožišta visina. Svih devet točaka $A'$, $B'$, $C'$, $A''$, $B''$, $C''$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ leže na istoj kružnici.*




*Dokaz.* Kako je $\overline{A'B'}$ srednjica trokuta $ABC$, to je $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$ i $A'B' \parallel AB$, a kako je $\overline{A''B''}$ srednjica trokuta $ABH$, to je $|A''B''| = \frac{1}{2}|AB|$ i $A''B'' \parallel AB$. Slijedi $|A'B'| = |A''B''|$ i $A'B' \parallel A''B''$. Stoga je četverokut $A'B'A''B''$ paralelogram, pa se $\overline{A'A''}$ i $\overline{B'B''}$ međusobno raspolavljaju. Sa $S$ označimo njihov presjek.

Kako je $\overline{A''B'}$ srednjica trokuta $AHC$, to je $A''B' \parallel CH$, pa je $A''B' \perp AB$ i stoga $A''B' \perp A''B''$. Dakle, $\sphericalangle B'A''B'' = 90°$. Prema tome, četverokut $A'B'A''B''$ je pravokutnik, pa mu možemo opisati kružnicu $k(S, \frac{1}{2}|A'A''|)$ (tu kružnicu ćemo kraće označavati s $k$).

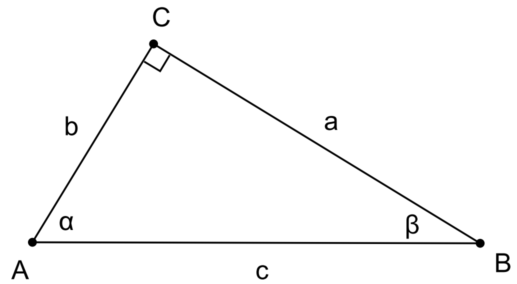
Analogno se dokazuje i da je $A'C'A''C''$ pravokutnik, pa mu možemo opisati kružnicu $k(S, \frac{1}{2}|A'A''|)$. Dakle, točke $A'$, $B'$, $C'$, $A''$, $B''$, $C''$ leže na istoj kružnici $k$.

Kako je trokut $A'A''A_1$ pravokutan s hipotenuzom $\overline{A'A''}$, to je kružnica opisana tom trokutu $k(S, \frac{1}{2}|A'A''|) = k$. Znači da i $A_1$ leži na $k$. Analogno se dokazuje i da $B_1$ i $C_1$ leže na $k$. $\square$

Kružnica iz teorema 5.8 označava se sa $k_9$ i naziva **kružnica devet točaka** (Feuerbachova kružnica, Eulerova kružnica).

# Poglavlje 6

# Trigonometrija trokuta




Definirajmo trigonometrijske funkcije šiljastih kutova pravokutnog trokuta:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a},$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}, \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Drugim riječima, u pravokutnom trokutu za šiljasti kut vrijedi:

**Sinus** kuta je omjer nasuprotne katete i hipotenuze.

**Kosinus** kuta je omjer priležeće katete i hipotenuze.

**Tangens** kuta je omjer nasuprotne i priležeće katete.

**Kotangens** kuta je omjer priležeće i nasuprotne katete.

Uočimo:

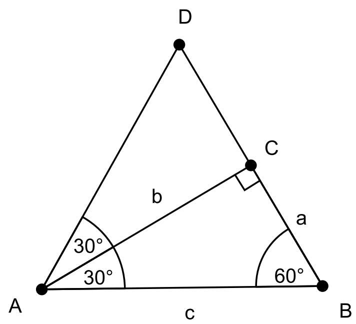
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\beta = \frac{a}{c} = \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Nadalje, u pravokutnom trokutu je $0 < a < c$ i $0 < b < c$, pa je $0 < \sin\alpha < 1$ i $0 < \sin\beta < 1$.

Izračunajmo vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih šiljastih kutova.




Neka je trokut $ABC$ takav da je $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 90°$. Produljimo stranicu $\overline{BC}$ preko vrha $C$. Neka je $D$ točka na tom produžetku sa svojstvom $\sphericalangle DAB = 60°$.

Znači da je $\sphericalangle DAC = 30°$. Uočimo da je trokut $ABD$ jednakostraničan.

Također uočimo da su trokuti $ABC$ i $ADC$ sukladni prema K-S-K teoremu, pa je $|CD| = |BC| = a$.

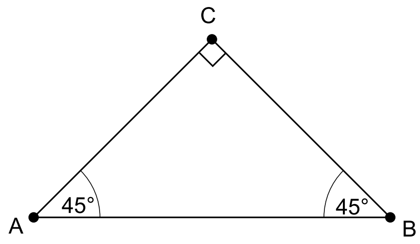
Slijedi $c = 2a$ i prema Pitagorinom teoremu $b = \sqrt{c^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Konačno,

$$\sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \operatorname{ctg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 30°} = \sqrt{3}.$$

Nadalje,

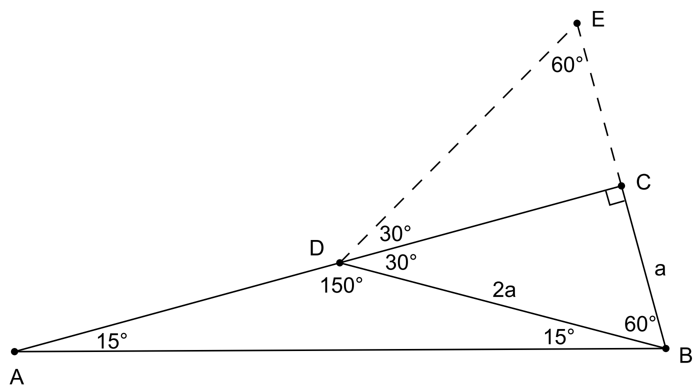
$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2},$$
$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg} 60° = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$




Neka je trokut $ABC$ takav da je $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$. Tada je trokut $ABC$ jednakokračan, pa je $b = a$. Nadalje, Pitagorin teorem povlači $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, pa je $c = a\sqrt{2}$. Konačno,

$$\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1, \qquad \operatorname{ctg} 45° = 1.$$




Neka je trokut $ABC$ takav da je $\alpha = 15°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 90°$. Neka je $D$ točka na stranici $\overline{AC}$ sa svojstvom $\sphericalangle ABD = 15°$.

Kako je $\sphericalangle BDC$ vanjski kut trokuta $ABD$, to je $\sphericalangle BDC = 30°$. Nadalje, $\sphericalangle CBD = 60°$, pa trokut $BCD$ možemo nadopuniti do jednakostraničnog trokuta.

Kao i ranije zaključimo da je $|BD| = 2|BC| = 2a$ i $|DC| = a\sqrt{3}$. Kako je trokut $ABD$ jednakokračan, to je i $|AD| = 2a$.

Sada je $b = |AC| = |AD| + |DC| = a(2 + \sqrt{3})$. Pitagorin teorem povlači $c^2 = a^2 + b^2 = a^2(8 + 4\sqrt{3}) = 4a^2(2 + \sqrt{3})$, pa je $c = 2a\sqrt{2 + \sqrt{3}} = a(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

Konačno,

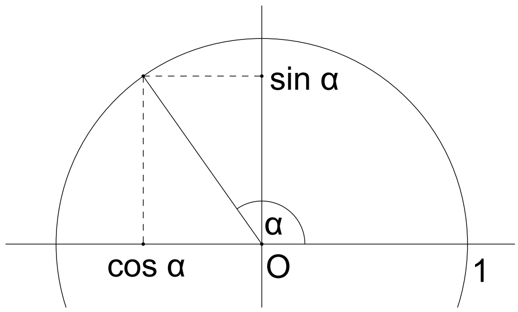
$$\sin 15° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$

$$\cos 15° = \frac{b}{c} = \frac{a(2 + \sqrt{3})}{a(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{a}{b} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{b}{a} = 2+\sqrt{3},$$

$$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{ctg} 15^\circ = 2+\sqrt{3}, \qquad \operatorname{ctg} 75^\circ = \operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3}.$$




Trigonometrijske funkcije definiraju se pomoću trigonometrijske kružnice za sve kutove, ne samo za šiljaste. Nama su zanimljivi kutovi trokuta, dakle kutovi između 0° i 180°.

Sinus pravog kuta je 1, a kosinus 0.

Sinus tupog kuta je pozitivan broj, $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$, a kosinus tupog kuta negativan: $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$.

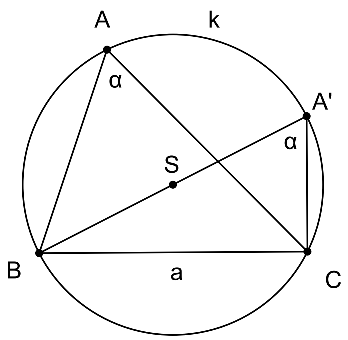
**Teorem 6.1 (teorem o sinusima).** *Stranice trokuta odnose se kao sinusi kutova nasuprot tih stranica, tj.*

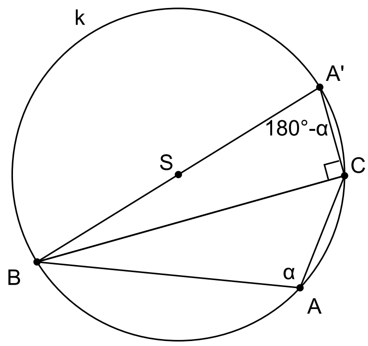
$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

*Preciznije,*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

*gdje je $R$ polumjer trokutu opisane kružnice.*



*Dokaz.* Neka je $k = k(S, R)$ kružnica opisana trokutu $ABC$. Neka je $A'$ takva da je $\overline{BA'}$ promjer kružnice $k$. Tada je, prema Talesovom teoremu, $\sphericalangle BCA' = 90°$, pa je trokut $BCA'$ pravokutan.

Ako je kut $\sphericalangle BAC$ šiljast, onda je $\sphericalangle BA'C = \sphericalangle BAC = \alpha$ (obodni kutovi nad $\widehat{BC}$). Sada iz pravokutnog trokuta $BCA'$ dobivamo $\sin\alpha = \dfrac{|BC|}{|A'B|} = \dfrac{a}{2R}$, pa je $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Ako je $\sphericalangle BAC$ tupi kut, onda je $\sphericalangle BA'C = 180° - \sphericalangle BAC = 180° - \alpha$ (četverokut $ABA'C$ je tetivan). Zato vrijedi $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin\sphericalangle BA'C = \dfrac{|BC|}{|A'B|} = \dfrac{a}{2R}$, pa je i u ovom slučaju $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Ako je $\sphericalangle BAC$ pravi kut, onda je $a = 2R$ odnosno ponovo $2R = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

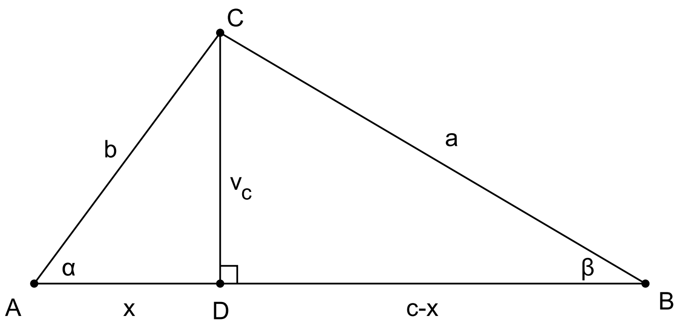
Analogno se dobije $2R = \dfrac{b}{\sin\beta}$ i $2R = \dfrac{c}{\sin\gamma}$. Dakle, $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$. □

**Teorem 6.2 (teorem o kosinusu).** *Ako su $a$, $b$, $c$ duljine stranica trokuta i $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ njegovi kutovi, tada je*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

*Dokaz.* Dovoljno je dokazati prvu jednakost.

1° Neka je $\alpha$ šiljasti kut.




Iz pravokutnih trokuta $ADC$ i $CDB$ dobije se

$$v_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2,$$

odakle slijedi

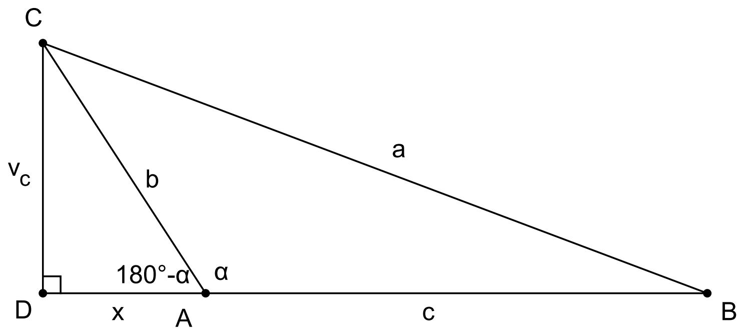
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx.$$

U pravokutnom trokutu $ADC$ je $\cos\alpha = \dfrac{x}{b}$, pa je $x = b\cos\alpha$ i konačno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

2° Neka je $\alpha$ pravi kut.

Tada je $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

3° Neka je $\alpha$ tupi kut.




Iz pravokutnih trokuta $ADC$ i $CDB$ dobije se

$$v_c^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c+x)^2,$$

odakle je

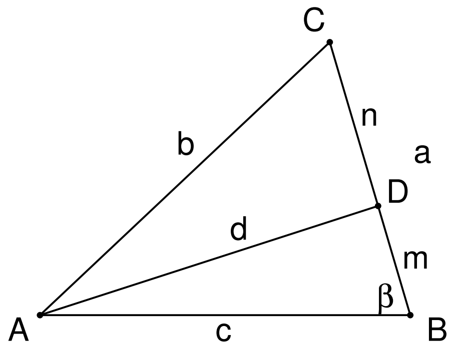
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx.$$

U pravokutnom trokutu $ADC$ je $\cos(180° - \alpha) = \dfrac{x}{b}$, pa je $x = b\cos(180° - \alpha) = -b\cos\alpha$ i konačno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. □

Dakle,

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \qquad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

**Lema 6.3 (Stewartov teorem).** *Neka je $ABC$ trokut sa stranicama duljina $a$, $b$, $c$, i neka je $D$ točka na stranici $\overline{BC}$. Ako je $|AD| = d$, $|BD| = m$ i $|CD| = n$, onda vrijedi $b^2m + c^2n = (d^2 + mn)a$.*



*Dokaz.* Primjenom teorema o kosinusu na trokut $ABC$ dobivamo $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, a primjenom na trokut $ABD$ $\cos\beta = \dfrac{c^2+m^2-d^2}{2cm}$.

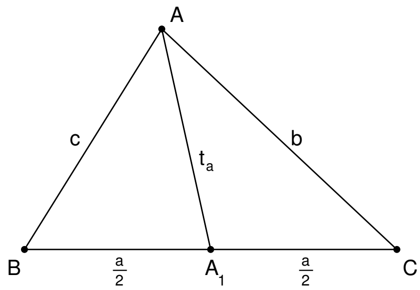
Redom slijedi

$$\begin{aligned} \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} &= \frac{c^2+m^2-d^2}{2cm}, \\ m(a^2+c^2-b^2) &= a(c^2+m^2-d^2), \\ ma^2-m^2a+ad^2 &= mb^2+ac^2-mc^2, \\ ma(a-m)+ad^2 &= mb^2+(a-m)c^2, \\ (mn+d^2)a &= mb^2+nc^2. \end{aligned}$$

□

**Propozicija 6.4.** *Ako su $a$, $b$, $c$ duljine stranica trokuta, a $t_a$, $t_b$, $t_c$ duljine odgovarajućih težišnica, tada je*

$$\begin{aligned} t_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}, \\ t_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}, \\ t_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}. \end{aligned}$$



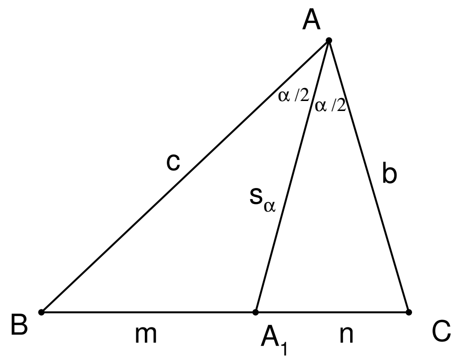

*Dokaz.* Dovoljno je dokazati prvu jednakost. U formulu iz leme 6.3 uvrstimo $m = n = \frac{a}{2}$ i $d = t_a$:

$$b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} = \left(t_a^2 + \frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\right) a.$$

Sređivanjem dobivamo $2(b^2+c^2) = a^2 + 4t_a^2$, odakle slijedi tvrdnja. □

**Propozicija 6.5.** *Ako su $a$, $b$, $c$ duljine stranica trokuta, a $s_\alpha$, $s_\beta$, $s_\gamma$ duljine simetrala unutarnjih kutova trokuta (preciznije, duljine odsječaka simetrala od vrha trokuta do sjecišta s nasuprotnom stranicom), tada je*

$$\begin{aligned} s_\alpha &= \frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}, \\ s_\beta &= \frac{1}{a+c}\sqrt{ac(a+b+c)(a+c-b)}, \\ s_\gamma &= \frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}. \end{aligned}$$




*Dokaz.* Dovoljno je dokazati prvu jednakost.

Prema teoremu 4.2 simetrala kuta dijeli nasuprotnu stranicu na dijelove $m$ i $n$ tako da vrijedi $m : n = c : b$, pa zbog $m + n = a$ slijedi $m = \dfrac{ca}{b+c}$, $n = \dfrac{ab}{b+c}$.

Sada možemo primijeniti lemu 6.3:

$$b^2 \cdot \frac{ca}{b+c} + c^2 \cdot \frac{ab}{b+c} = \left(s_\alpha^2 + \frac{ca}{b+c} \cdot \frac{ab}{b+c}\right) a.$$

Slijedi $\dfrac{abc(b+c)}{b+c} = a\left(s_\alpha^2 + \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}\right)$ i dalje

$$s_\alpha^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} = bc \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{(b+c)^2},$$

te konačno $s_\alpha = \dfrac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}$. □

# Poglavlje 7

# Preslikavanja ravnine

Sa $M$ označimo skup svih točaka ravnine.

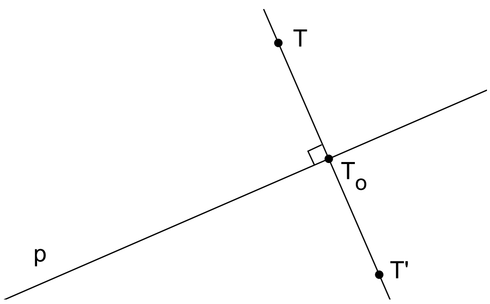
Kažemo da je preslikavanje $f : M \to M$ **izometrija ravnine** $M$ ako za sve točke $A$ i $B$ ravnine $M$ vrijedi $|A'B'| = |AB|$, gdje je $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

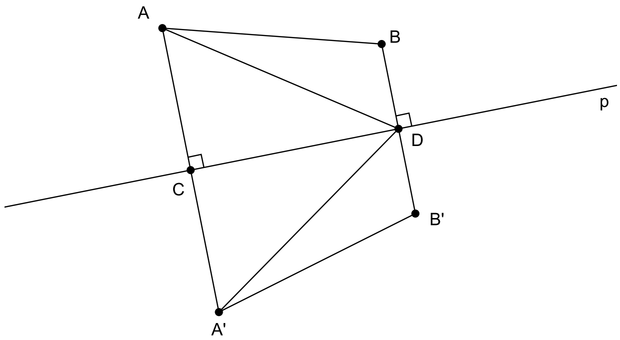
Neka je $p$ pravac koji leži u ravnini $M$. **Osna simetrija** ravnine $M$ obzirom na pravac $p$ je preslikavanje $s_p : M \to M$ definirano na sljedeći način:

Ako točka $T$ leži na pravcu $p$, definira se $s_p(T) = T$.

Ako točka $T$ ne leži na pravcu $p$, tada okomica kroz $T$ na pravac $p$ siječe $p$ u nekoj točki $T_0$. Neka je $T'$ točka na pravcu $TT_0$, različita od $T$, takva da je $|TT_0| = |T_0T'|$. Takva točka $T'$ je jedinstvena. Definira se $s_p(T) = T'$.

Uočimo da je $p$ simetrala dužine $\overline{TT'}$.




**Teorem 7.1.** *Osna simetrija $s_p : M \to M$ je izometrija ravnine $M$.*

*Dokaz.* Neka su $A$ i $B$ točke u ravnini $M$. Stavimo $A' = s_p(A)$, $B' = s_p(B)$. Neka je $C$ polovište dužine $\overline{AA'}$, a $D$ polovište dužine $\overline{BB'}$. Prema S-K-S teoremu su trokuti $ACD$ i $A'CD$ sukladni ($\overline{CD}$ im je zajednička stranica, $|AC| = |A'C|$, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle A'CD = 90°$), pa je $|AD| = |A'D|$ i $\sphericalangle ADC = \sphericalangle A'DC$. Stoga je

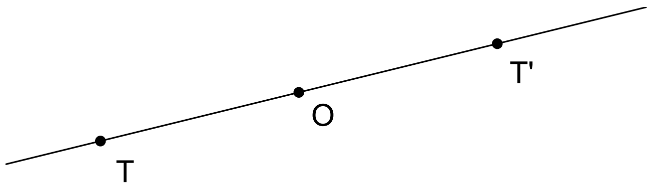
$$\begin{aligned}\sphericalangle ADB &= \sphericalangle CDB - \sphericalangle CDA = 90° - \sphericalangle CDA \\ &= 90° - \sphericalangle CDA' = \sphericalangle B'DC - \sphericalangle CDA' = \sphericalangle A'DB'.\end{aligned}$$

Uz to je i $|BD| = |B'D|$ i $|AD| = |A'D|$, pa su trokuti $ABD$ i $A'B'D$ sukladni prema S-K-S teoremu. Slijedi $|AB| = |A'B'|$. $\square$

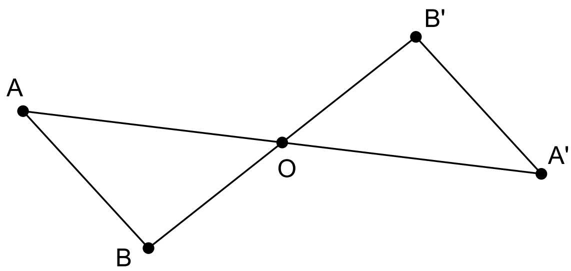
Neka je $O$ čvrsta točka ravnine $M$. **Centralna simetrija** ravnine $M$ obzirom na točku $O$ je preslikavanje $s_O : M \to M$ definirano na sljedeći način:

Najprije je $s_O(O) = O$. Ako je $T$ točka različita od $O$, neka je $T'$ točka na pravcu $TO$, različita od $T$, takva da je $|TO| = |OT'|$. Takva točka $T'$ je jedinstvena. Definira se $s_O(T) = T'$.

Uočimo da je $O$ polovište dužine $\overline{TT'}$.

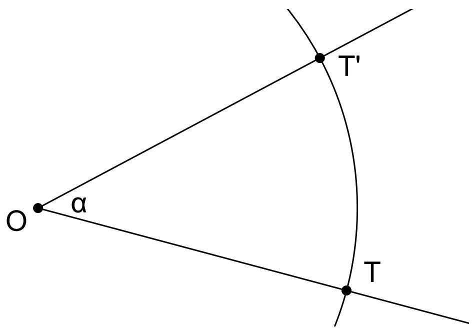



**Teorem 7.2.** *Centralna simetrija $s_O : M \to M$ je izometrija ravnine $M$.*



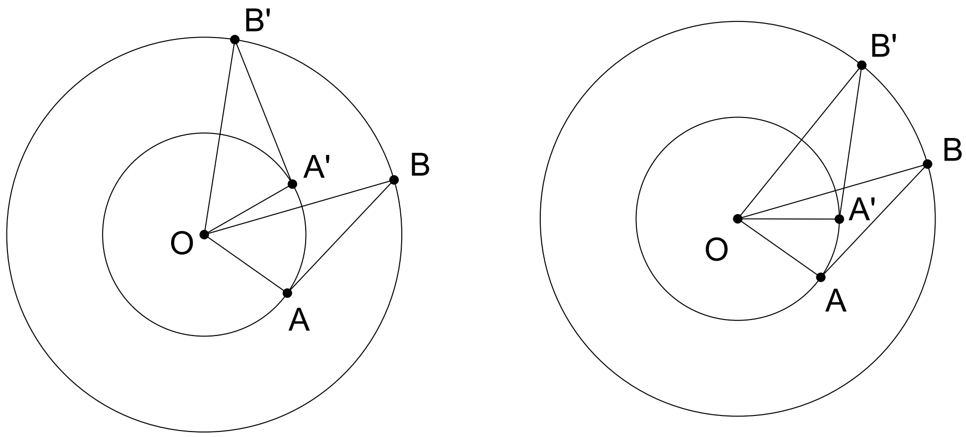

*Dokaz.* Neka su $A$ i $B$ točke ravnine $M$ te neka je $A' = s_O(A)$, $B' = s_O(B)$. Kako je $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB'$, $|AO| = |A'O|$ i $|BO| = |B'O|$, trokuti $AOB$ i $A'OB'$ su sukladni prema S-K-S teoremu. Slijedi $|AB| = |A'B'|$. $\square$

**Rotacija** ravnine $M$ oko čvrste točke $O$ (središta rotacije) za kut $\alpha$ (kut rotacije) u pozitivnom smjeru je preslikavanje $r : M \to M$ definirano na sljedeći način:




Najprije je $r(O) = O$. Ako je $T$ točka različita od $O$, neka je $k = k(O, |OT|)$. Neka je $T'$ točka na kružnici $k$ takva da luku $\widehat{TT'}$, kojim se od $T$ do $T'$ dolazi gibanjem u pozitivnom smjeru, pripada središnji kut $\alpha$. Takva točka $T'$ je jedinstvena. Definira se $r(T) = T'$.

Uočimo da je $|OT'| = |OT|$.




**Teorem 7.3.** *Rotacija $r : M \to M$ je izometrija ravnine $M$.*

*Dokaz.* Neka je $O$ središte, a $\alpha$ kut rotacije. Neka su $A$ i $B$ točke u ravnini $M$ te neka je $A' = r(A)$, $B' = r(B)$. Ako točka $B$ leži unutar kuta $\sphericalangle AOA'$, imamo

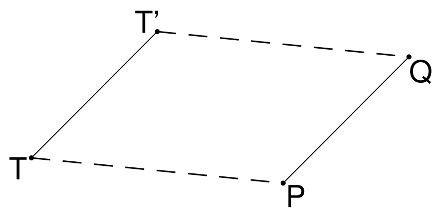
$$\begin{aligned} \sphericalangle AOB &= \sphericalangle AOA' - \sphericalangle A'OB = \alpha - \sphericalangle A'OB \\ &= \sphericalangle BOB' - \sphericalangle A'OB = \sphericalangle A'OB'. \end{aligned}$$

Uz to je i $|OA| = |OA'|$ i $|OB| = |OB'|$. Stoga su, prema S-K-S teoremu, trokuti $AOB$ i $A'OB'$ sukladni. Slijedi $|AB| = |A'B'|$.

Slično se tvrdnja pokaže i u drugom slučaju. $\square$

**Usmjerena dužina** je uređen par točaka. Oznaka za usmjerenu dužinu čiji je početak točka $A$, a kraj točka $B$ je $\overrightarrow{AB}$. Usmjerene dužine su predstavnici ***vektora***[1].

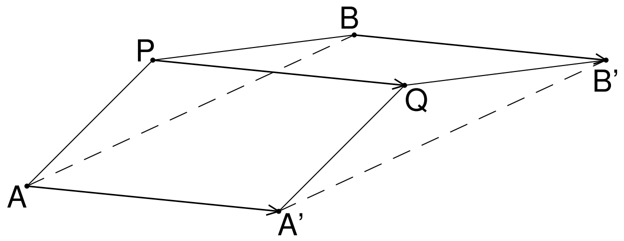
Neka su $P$, $Q$ dvije točke u ravnini $M$, i neka je $\vec{a}$ vektor s predstavnikom $\overrightarrow{PQ}$.




Za svaku točku $T$ iz $M$ postoji jedinstvena točka $T'$ takva da je $TPQT'$ paralelogram. **Translacija** ravnine $M$ za vektor $\vec{a}$ je preslikavanje $t_{\vec{a}} : M \to M$ definirano sa $t_{\vec{a}}(T) = T'$.

[1] Više o vektorima studenti će naučiti na kolegiju Analitička geometrija.

**Teorem 7.4.** *Translacija $t_{\vec{a}} : M \to M$ je izometrija ravnine $M$.*

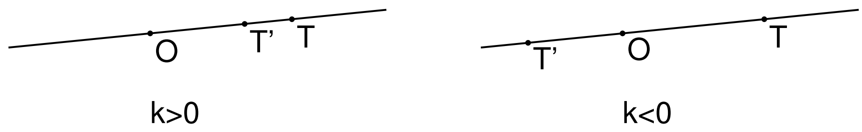



*Dokaz.* Neka su $A$ i $B$ dvije točke i $A'$, $B'$ njihove slike pri translaciji $t_{\vec{a}}$. Tada su $APQA'$ i $BPQB'$ paralelogrami, pa je $|AA'| = |PQ|$, $AA' \parallel PQ$ i $|BB'| = |PQ|$, $BB' \parallel PQ$. Stoga je $|AA'| = |BB'|$ i $AA' \parallel BB'$, pa je i četverokut $ABB'A'$ paralelogram, a odatle slijedi $|AB| = |A'B'|$. $\square$

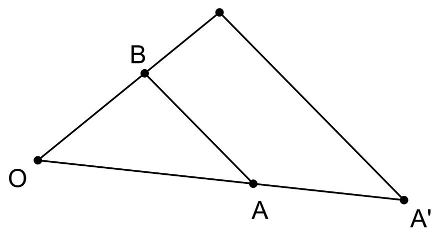
Neka je $O$ čvrsta točka ravnine $M$ i $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Za točku $T$ iz $M$ neka je $T'$ točka na pravcu $OT$ takva da vrijedi $|OT'| = |k| \cdot |OT|$ i
$(i)$ za $k > 0$, točke $T$ i $T'$ leže s iste strane točke $O$,
$(ii)$ za $k < 0$, točke $T$ i $T'$ leže sa suprotnih strana točke $O$.

**Homotetija** je preslikavanje $h : M \to M$ definirano s $h(T) = T'$.

Jasno je da je $h(O) = O$ za svaki $k$. Točka $O$ se naziva središte homotetije, a broj $k \neq 0$ koeficijent homotetije.




**Teorem 7.5.** *Neka je $h : M \to M$ homotetija, i neka je $A' = h(A)$, $B' = h(B)$. Tada vrijedi $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$.*




*Dokaz.* Trokuti $AOB$ i $A'OB'$ su slični po teoremu 4.5 jer je $|OA'| : |OA| = |OB'| : |OB| = |k|$, a kut pri vrhu $O$ zajednički. Zato je i $|A'B'| : |AB| = |k|$. $\square$

Posebno, homotetija je izometrija ako i samo ako je $|k| = 1$.

Ako je $k = 1$, homotetija je identiteta.

Ako je $k = -1$, tada je $|OT'| = |OT|$, a točke $T$ i $T'$ se nalaze sa suprotnih strana točke $O$, tj. $T$ i $T'$ su centralno simetrične obzirom na točku $O$. Dakle, centralna simetrija ravnine obzirom na točku $O$ je homotetija ravnine sa središtem u $O$ i koeficijentom $k = -1$.

Preslikavanje $f : M \to M$ nazivamo **preslikavanje sličnosti** ako postoji realan broj $s > 0$ takav da za sve $A$ i $B$ iz $M$ vrijedi $|A'B'| = s|AB|$, gdje je $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

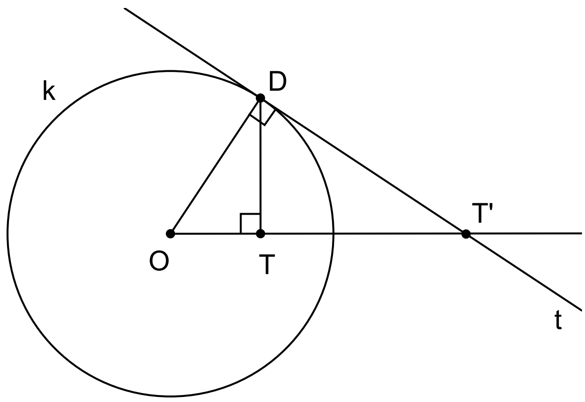
Jasno, svaka izometrija je preslikavanje sličnosti ($s = 1$).

Svaka homotetija s koeficijentom $k$ je preslikavanje sličnosti s koeficijentom $s = |k|$.

Neka je $O$ neka čvrsta točka ravnine $M$ te neka je $R$ pozitivan broj. Preslikavanje $I_O : M \setminus \{0\} \to M \setminus \{0\}$ koje $T \mapsto T'$ zove se **inverzija** sa središtem $O$ i polumjerom $R$ ako su točke $O$, $T$ i $T'$ kolinearne, $T$ i $T'$ s iste strane točke $O$ i ako je $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.

Pokažimo kako se konstruira $T' = I_O(T)$.

1° $T$ unutar kružnice inverzije $k = k(O, R)$




Povučemo okomicu iz $T$ na $OT$. Neka je $D$ jedno od sjecišta te okomice s $k$. U točki $D$ povučemo tangentu $t$ na $k$. Neka je $T'$ presjek te tangente s $OT$.

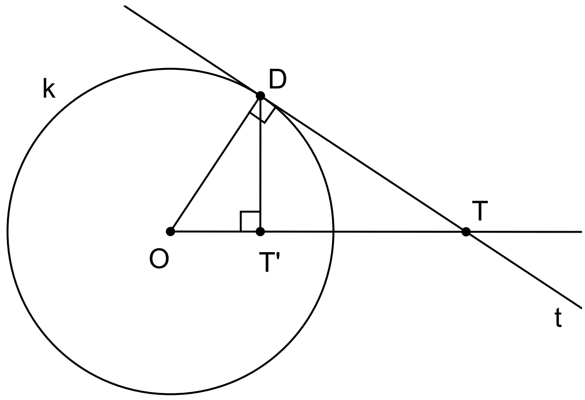
Kako je $\sphericalangle OTD = \sphericalangle ODT' = 90°$ i $\sphericalangle DOT = \sphericalangle T'OD$, to su trokuti $OTD$ i $ODT'$ slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Slijedi $\dfrac{|OT|}{|OD|} = \dfrac{|OD|}{|OT'|}$ i konačno $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.

2° $T$ leži na kružnici inverzije $k = k(O, R)$

Dovoljno je definirati $T' = T$.

3° $T$ izvan kružnice inverzije $k = k(O, R)$

Povučemo tangentu $t$ iz $T$ na $k$. Neka je $D$ dirālište tangente i kružnice. Iz $D$ povučemo okomicu na $OT$. Neka je $T'$ presjek te okomice s $OT$.




Kako je $\sphericalangle OT'D = \sphericalangle ODT = 90^\circ$ i $\sphericalangle DOT' = \sphericalangle TOD$, to su trokuti $OT'D$ i $ODT$ slični prema K-K-K teoremu o sličnosti. Slijedi $\dfrac{|OT'|}{|OD|} = \dfrac{|OD|}{|OT|}$ i konačno $|OT| \cdot |OT'| = R^2$.

Očigledno inverzija nutrinu kružnice $k$ preslikava u njenu vanjštinu i obratno.

# Sadržaj