Sukladnost trokuta

Teorem 1 (S-K-S teorem o sukladnosti). *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut među njima.*

Ovaj "teorem" uzimamo za aksiom. Pomoću njega ćemo dokazati ostale teoreme o sukladnosti trokuta.

Teorem 2 (K-S-K teorem o sukladnosti). *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.*

Dokaz. Neka su ABC i $A'B'C'$ trokuti takvi da vrijedi $|AB| = |A'B'|$, $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B'$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$.

Neka je C_1 točka na polupravcu AC takva da je $|AC_1| = |A'C'|$. Tada je, prema SKS, $\triangle ABC_1 \cong \triangle A'B'C'$, pa je i $\sphericalangle ABC_1 = \sphericalangle A'B'C' = \sphericalangle ABC$. Stoga se polupravci BC i BC_1 podudaraju. No, to je moguće jedino ako je $C_1 = C$.

Sada je očito $|AC| = |A'C'|$ i $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (SKS). $\square$

Dokažimo najprije

Lema 1. *Dvije stranice trokuta su sukladne ako i samo ako su im nasuprotni kutovi sukladni.*

Dokaz. $\Rightarrow$: Neka u trokutu ABC vrijedi $|AC| = |BC|$. Tada je $\triangle ABC \cong \triangle BAC$. To slijedi iz teorema/aksioma SKS, jer je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCA$, $|CA| = |CB|$ i $|CB| = |CA|$.

Stoga je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$.

$\Leftarrow$: Neka u trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$.

Pretpostavimo da je $|AC| > |BC|$, te označimo s B_1 točku na polupravcu CB za koju je $|CB_1| = |CA|$. Prema prethodno dokazanoj implikaciji, kutovi trokuta AB_1C u vrhovima A i B_1 su jednaki. Dakle, $\sphericalangle B_1AC = \sphericalangle AB_1C$.

Označimo li kut $\sphericalangle B_1AB$ s δ (zbog pretpostavke je $B_1 \neq B$, stoga $\delta \neq 0$), vrijedi:

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle B_1AC - \delta = \sphericalangle AB_1C - \delta = (\sphericalangle ABC - \delta) - \delta = \sphericalangle ABC - 2\delta,$$

pa je $\sphericalangle BAC < \sphericalangle ABC$ (koristili smo svojstvo vanjskog kuta trokuta).

To je u kontradikciji s uvjetom $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, pa nije moguće $|AC| > |BC|$.

Slučaj $|AC| < |BC|$ se isključuje na sličan način, pa mora biti $|AC| = |BC|$. $\square$

Korolar 1. *Nasuprot veće stranice trokuta leži i veći kut i obratno, nasuprot većeg kuta trokuta leži i veća stranica.*

Dokaz. Neka u trokutu ABC vrijedi $|AC| > |BC|$. Kao u drugom dijelu dokaza prethodne leme zaključujemo da je $\sphericalangle BAC < \sphericalangle ABC$. Time je dokazana prva tvrdnja: nasuprot veće stranice trokuta leži veći kut.

Dokažimo sada da nasuprot većeg kuta leži veća stranica. Neka je $\sphericalangle ABC < \sphericalangle BAC$.

Ako bi bilo $|AC| < |BC|$, prema prethodnom bi slijedilo $\sphericalangle BAC < \sphericalangle ABC$, što je kontradikcija.
Ako bi vrijedilo $|AC| = |BC|$, prema prethodnoj lemi bi slijedilo $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$, kontradikcija.

Stoga mora biti $|AC| > |BC|$. □

Teorem 3 (S-S-S teorem o sukladnosti). *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne sve tri stranice.*

Dokaz. Neka su ABC i $A'B'C'$ trokuti takvi da vrijedi $|AB| = |A'B'|$, $|BC| = |B'C'|$ i $|CA| = |C'A'|$.

Neka je C_1 točka koja leži sa suprotne strane pravca AB u odnosu na točku C, takva da je $|AC_1| = |A'C'|$ i $\sphericalangle BAC_1 = \sphericalangle B'A'C'$. Tada je $\triangle ABC_1 \cong \triangle A'B'C'$ prema SKS teoremu/aksiomu. Dokazat ćemo da je $\triangle ABC \cong \triangle ABC_1$.

Kako je $|AC_1| = |A'C'| = |AC|$, prema Lemi je $\sphericalangle ACC_1 = \sphericalangle AC_1C$. Kako je $|BC_1| = |B'C'| = |BC|$, prema Lemi je $\sphericalangle BCC_1 = \sphericalangle BC_1C$.

Zato je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACC_1 + \sphericalangle C_1CB = \sphericalangle AC_1C + \sphericalangle CC_1B = \sphericalangle AC_1B$.

Sada po teoremu/aksiomu SKS, iz $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AC_1B$, $|AC_1| = |AC|$ i $|BC_1| = |BC|$ slijedi sukladnost trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle ABC_1$, pa onda i $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$.

□

Teorem 4 (S-S-K$^>$ teorem o sukladnosti). *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut nasuprot veće stranice.*

Dokaz. Neka su ABC i $A'B'C'$ trokuti takvi da vrijedi $|AB| = |A'B'|$, $|AC| = |A'C'|$ i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$ i neka je $|AB| > |AC|$.

Ako je $|CB| = |C'B'|$, trokuti su sukladni prema SSS teoremu. Pretpostavimo suprotno.

Bez smanjenja općenitosti, neka je $|CB| > |C'B'|$. Neka je B_1 točka na polupravcu BC takva da je $|CB_1| = |C'B'|$. Tada je, prema SKS, $\triangle ACB_1 \cong \triangle A'C'B'$, pa je i $|AB_1| = |A'B'| = |AB|$.

Prema Lemi je $\sphericalangle ABB_1 = \sphericalangle BB_1A$, pa je (zbog sume kutova u trokutu ABB_1) $\sphericalangle BB_1A$ šiljasti kut, a njegov suplement $\sphericalangle CB_1A = 180° - \sphericalangle BB_1A$ tupi kut. Zaključujemo da je $\sphericalangle CB_1A$ najveći kut u trokutu AB_1C, pa je, prema korolaru, $\overline{AC}$ najveća stranica. Stoga je $|AC| > |AB_1| = |AB|$, što je suprotno pretpostavci teorema.

□