| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

# ELEMENTARNA GEOMETRIJA

prvi kolokvij - 24. studenog 2017.

**Napomene:** Kolokvij ima ukupno 5 zadataka, svaki zadatak vrijedi 7 bodova.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Odmah potpišite sva tri lista papira koje ste dobili.
Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.
**Detaljno obrazložite svoje tvrdnje.** Nemojte koristiti trigonometriju, vektore niti metode analitičke geometrije.

**1.** (bodovi: 5+1+1)

(a) Dokažite da težišnice trokuta prolaze jednom točkom.
Nemojte koristiti Cevin teorem.

(b) Odredite duljinu polumjera upisane kružnice trokuta čije su stranice duljina $a = 9$, $b = 10$ i $c = 17$.

(c) Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta $ABC$ dane su redom točke $A'$, $B'$, $C'$ takve da je $|BA'| = \frac{1}{3}|BC|$, $|CB'| = \frac{2}{5}|CA|$, $|AC'| = \frac{3}{4}|AB|$.
Dokažite da se pravci $AA'$, $BB'$ i $CC'$ sijeku u jednoj točki.

Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

**2.** Dan je šiljastokutni trokut $ABC$. Neka je $O$ središte trokutu $ABC$ opisane kružnice, a $P$, $Q$ i $R$ točke takve da su $BOCP$, $COAQ$ i $AOBR$ paralelogrami.

Dokažite da su trokuti $ABC$ i $PQR$ sukladni.

**3.** Neka je $ABCD$ kvadrat i $T$ točka izvan tog kvadrata (u istoj ravnini). Točke $P$, $R$ i $S$ odabrane su tako da vrijedi

– točka $A$ je polovište dužine $\overline{TP}$,

– točka $B$ je polovište dužine $\overline{PR}$,

– točka $C$ je polovište dužine $\overline{RS}$.

(a) Dokažite da je točka $D$ polovište dužine $\overline{ST}$.

(b) Dokažite da vrijedi $|PR|^2 + |ST|^2 = |PT|^2 + |RS|^2$.

Napomena: U dokazu tvrdnje pod (b) možete koristiti tvrdnju pod (a) čak i ako ju niste dokazali. Dovoljno je dokazati tvrdnje u slučaju da je dobiveni četverokut konveksan.

Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

**4.** Neka je $ABC$ trokut za koji vrijedi $|AB| + |BC| = 2|AC|$. Neka je $P$ sjecište simetrale kuta $\sphericalangle ABC$ sa stranicom $\overline{AC}$, a $S$ središte trokutu $ABC$ upisane kružnice.

Odredite omjer $|SP| : |BP|$.

**5.** Neka je $ABC$ pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu $C$. S njegove vanjske strane konstruirani su jednakostranični trokuti $ABC_1$ i $ACB_1$.

(a) Dokažite da je $|CC_1| = |BB_1|$.

(b) Dokažite da vrijedi $P(ACC_1) - P(AB_1C) = \frac{1}{2}\, P(ABC)$.

Napomena: U dokazu tvrdnje pod (b) možete koristiti tvrdnju pod (a) čak i ako ju niste dokazali.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

# ELEMENTARNA GEOMETRIJA

prvi kolokvij - 24. studenog 2017.

**Napomene:** Kolokvij ima ukupno 5 zadataka, svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Odmah potpišite sva tri lista papira koje ste dobili.

Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

**Detaljno obrazložite svoje tvrdnje.** Nemojte koristiti trigonometriju, vektore niti metode analitičke geometrije.

**1.** (bodovi: 5+1+1)

(a) Dokažite da pravci na kojima leže visine trokuta prolaze jednom točkom. Nemojte koristiti Cevin teorem.

(b) Odredite duljinu polumjera upisane kružnice trokuta čije su stranice duljina $a = 13$, $b = 14$ i $c = 15$.

(c) Na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta $ABC$ dane su redom točke $A'$, $B'$, $C'$ takve da je $|BA'| = \frac{3}{5}|BC|$, $|CB'| = \frac{1}{4}|CA|$, $|AC'| = \frac{2}{3}|AB|$.
Dokažite da se pravci $AA'$, $BB'$ i $CC'$ sijeku u jednoj točki.

Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

**2.** Neka je $ABC$ je šiljastokutni trokut sa središtem opisane kružnice $O$. Točke $A_1$, $B_1$ i $C_1$ su takve da su četverokuti $BOCA_1$, $COAB_1$ i $AOBC_1$ paralelogrami.

Dokažite da su trokuti $ABC$ i $A_1B_1C_1$ sukladni.

**3.** Dan je $ABCD$ kvadrat i $P$ točka izvan tog kvadrata (u istoj ravnini). Točke $Q$, $R$ i $S$ odabrane su tako da vrijedi

– točka $A$ je polovište dužine $\overline{PQ}$,

– točka $B$ je polovište dužine $\overline{QR}$,

– točka $C$ je polovište dužine $\overline{RS}$.

(a) Dokažite da je točka $D$ polovište dužine $\overline{PS}$.

(b) Dokažite da vrijedi $|PQ|^2 + |RS|^2 = |PS|^2 + |QR|^2$.

Napomena: U dokazu tvrdnje pod (b) možete koristiti tvrdnju pod (a) čak i ako ju niste dokazali. Dovoljno je dokazati tvrdnje u slučaju da je dobiveni četverokut konveksan.

Ime i prezime, JMBAG: ____________________________________________

**4.** Dan je trokut $ABC$ takav da je $|BC| + |CA| = 2|AB|$. Neka je $S$ središte trokutu $ABC$ upisane kružnice, a $K$ sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BCA$ sa stranicom $\overline{AB}$.

Odredite omjer $|CK| : |SK|$.

**5.** Dan je pravokutni trokut $ABC$ s pravim kutom u vrhu $C$. S njegove vanjske strane konstruirani su jednakostranični trokuti $ADB$ i $AEC$.

(a) Dokažite da je $|CD| = |BE|$.

(b) Dokažite da vrijedi $P(ACD) - P(AEC) = \frac{1}{2} P(ABC)$.

Napomena: U dokazu tvrdnje pod (b) možete koristiti tvrdnju pod (a) čak i ako ju niste dokazali.