ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi kolokvij – 25. studenog 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova)

a) (5 bodova) Dokažite da su sljedeći sudovi logički ekvivalentni:

$$(A \Rightarrow B) \ \wedge \ (B \Rightarrow C) \quad \text{i} \quad \neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

b) (5 bodova) Zadana je tvrdnja: *Za svaka dva podskupa od* $\mathbb{N}$ *vrijedi: ako im je presjek prazan, onda se broj* 1 *ne nalazi ni u jednom od skupova.*
Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, obrat po kontrapoziciji i negaciju. Za svaku od četiri tvrdnje odredite je li istinita. Obrazložite.

Zadatak 2. (10 bodova)

a) (5 bodova) Neka su A, B, C skupovi takvi da je $A \subseteq C$. Dokažite da je

$$(A \triangle B) \cap C = ((B \cap C) \setminus A) \cup (A \setminus B).$$

b) (5 bodova) Za skupove X i Y ispitajte odnos skupova $\mathcal{P}(X \setminus Y)$ i $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}(Y)$.

Zadatak 3. (10 bodova) Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zadana je relacija $\gg$ definirana s

$$a \gg b \Leftrightarrow a > b + 1000.$$

a) (6 bodova) Odredite, uz obrazloženje, je li $\gg$ refleksivna, tranzitivna, simetrična, antisimetrična, irefleksivna.

b) (4 boda) Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathbb{N}$ koja proširuje relaciju $\gg$ (drugim riječima, $\gg$ je podskup od $\sim$). Dokažite da je $x \sim y$ za sve prirodne brojeve x, y.

Zadatak 4. (10 bodova)

a) (5 bodova) Na skupu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan je parcijalni uređaj $\preccurlyeq$ (ne treba provjeravati da je stvarno parcijalni uređaj) zadan s

$$\{(x, x) : x \in A\} \cup \{(b, d), (b, c), \ (b, e), \ (a, c), \ (a, e), \ (c, e), \ (f, e)\}.$$

Odredite, ako postoje, i obrazložite svoj odgovor:

(a1) sve gornje međe skupa $\{a, f\}$;

(a2) infimum skupa $\{c, e\}$.

b) (5 bodova) Neka je ρ refleksivna relacija na skupu S koja zadovoljava

$$(\forall x, y \in S)(x \ \rho \ y \ \Rightarrow \ \langle x \rangle = \langle y \rangle),$$

gdje smo označili $\langle x \rangle = \{s \in S : x \ \rho \ s\}$. Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije.

Zadatak 5. (10 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi kolokvij – 25. studenog 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova)

a) (5 bodova) Dokažite da su sljedeći sudovi logički ekvivalentni:

$$(P \Rightarrow Q) \ \wedge \ (Q \Rightarrow R) \quad \text{i} \quad \neg(P \vee Q) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R).$$

b) (5 bodova) Zadana je tvrdnja: *Za svaka dva podskupa od* $\mathbb{N}$ *vrijedi: ako im je presjek prazan, onda se broj* 7 *ne nalazi ni u jednom od skupova.*
Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, obrat po kontrapoziciji i negaciju. Za svaku od četiri tvrdnje odredite je li istinita. Obrazložite.

Zadatak 2. (10 bodova)

a) (5 bodova) Neka su A, B, C skupovi takvi da je $C \subseteq A$. Dokažite da je

$$A \cap (B \triangle C) = ((A \cap B) \setminus C) \cup (C \setminus B).$$

b) (5 bodova) Za skupove X i Y ispitajte odnos skupova $\mathcal{P}(Y \setminus X)$ i $\mathcal{P}(Y) \setminus \mathcal{P}(X)$.

Zadatak 3. (10 bodova) Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zadana je relacija $\gg$ definirana s

$$a \gg b \Leftrightarrow a > b + 7000.$$

a) (6 bodova) Odredite, uz obrazloženje, je li $\gg$ refleksivna, tranzitivna, simetrična, antisimetrična, irefleksivna.

b) (4 boda) Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathbb{N}$ koja proširuje relaciju $\gg$ (drugim riječima, $\gg$ je podskup od $\sim$). Dokažite da je $x \sim y$ za sve prirodne brojeve x, y.

Zadatak 4. (10 bodova)

a) (5 bodova) Na skupu $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan je parcijalni uređaj $\preccurlyeq$ (ne treba provjeravati da je stvarno parcijalni uređaj) zadan s

$$\{(x, x) : x \in A\} \cup \{(b, d), (b, c), \ (b, e), \ (a, c), \ (a, e), \ (c, e), \ (f, e)\,\}.$$

Odredite, ako postoje, i obrazložite svoj odgovor:

(a1) sve donje međe skupa $\{c, e\}$;

(a2) supremum skupa $\{b\}$.

b) (5 bodova) Neka je ρ refleksivna relacija na skupu T koja zadovoljava

$$(\forall x, y \in T)(x \ \rho \ y \ \Rightarrow \ \langle x \rangle = \langle y \rangle),$$

gdje smo označili $\langle x \rangle = \{t \in T : x \ \rho \ t\}$. Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije.

Zadatak 5. (10 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \leq \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} \right) - \frac{1}{2}.$$