

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi jesenski rok – 12. rujna 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta.
Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (20 bodova)

(a) Zapišite simbolima tvrdnju:

*Ako je π racionalan broj, onda je kvadrat
svakog cijelog broja prirodan broj*

te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji.

(b) Dokažite da je broj

$$mn^{13} - m^{13}n$$

djeljiv s 39 za sve cijele brojeve $m, n \in \mathbb{Z}$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi jesenski rok – 12. rujna 2024.

Zadatak 2. (20 bodova) Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ definirana je binarna relacija ρ :

$$A \rho B \iff A \triangle B \subseteq \mathbb{N}.$$

Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije. Odredite klasu ekvivalencije kojoj pripada skup $\{-1, 0, 1\}$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi jesenski rok – 12. rujna 2024.

Zadatak 3. (20 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{3^n-1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n-1} < 2n.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi jesenski rok – 12. rujna 2024.

Zadatak 4. (20 bodova) Odredite sve prirodne brojeve n za koje postoje točno 42 prirodna broja manja ili jednaka od n koji su relativno prosti s n .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Drugi jesenski rok – 12. rujna 2024.

Zadatak 5. (20 bodova)

- (a) Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma

$$x^{2024} - 2x^{1012} + 4x^5 - 6$$

polinomom $x^3 + x^2 - x - 1$.

- (b) Odredite oblik rastava na parcijalne razlomke

$$\frac{1}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}.$$

Nije potrebno određivati konstante u brojnicima.