ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi zimski rok – 3. veljače 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (20 bodova) Neka su A, B, C i D skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$\big((A \cup B) \times (C \cap D)\big) \triangle \big((A \cap B) \times (C \cup D)\big)$$

i

$$\big((A \triangle B) \times C\big) \cup \big(A \times (C \triangle D)\big).$$

Svoje tvrdnje argumentirajte dokazima, odnosno kontraprimjerima.

Zadatak 2. (20 bodova) Na skupu prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ zadana je relacija $\sqsupseteq$ definirana s

$$a \sqsupseteq b \Leftrightarrow \text{ postoji } c \in \mathbb{N}_0 \text{ takav da je } a - b = c^2.$$

(a) (12 bodova) Odredite, uz obrazloženje, je li $\sqsupseteq$ refleksivna, tranzitivna, simetrična, antisimetrična, irefleksivna.

(b) (8 bodova) Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na $\mathbb{N}$ koja proširuje relaciju $\sqsupseteq$ (drugim riječima, $\sqsupseteq$ je podskup od $\sim$). Dokažite da je $x \sim y$ za sve prirodne brojeve x, y.

Zadatak 3. (20 bodova) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$n \cdot 3^0 + (n-1) \cdot 3^1 + (n-2) \cdot 3^2 + \ldots + 1 \cdot 3^{n-1} = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4}.$$

Zadatak 4. (20 bodova)

(a) (6 boda) Neka je p prost broj takav da je $p \equiv 2 \pmod 3$. Pretpostavimo da $p \mid x^3 - 1$ za neki cijeli broj x. Dokažite da $p \mid x - 1$.

(b) (6 boda) Dokažite da je $M\left(\frac{(3x)^3-1}{3x-1}, 3x-1\right) = 1$ za svaki cijeli broj x.

(c) (8 boda) Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva p takvih da je $p \equiv 1 \pmod 3$.
Uputa. Pretpostavite suprotno i promotrite broj $\frac{(3P)^3-1}{3P-1}$, gdje je P umnožak svih prostih brojeva kongruentnih 1 modulo 3.

Zadatak 5. (20 bodova) Neka je $f(x) = x^5 - 9x^3 + 10x^2 + 2x - 16$.

(a) (12 bodova) Odredite sve nultočke od f, znajući da je jedna od njih $1 + i$.

(b) (8 bodova) Odredite neki realan broj c takav da polinom $f(x) + c$ ima nultočku kratnosti barem 2. Obrazložite svoj odgovor.