ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

drugi zimski rok – 17. veljače 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (20 bodova) Neka je $S \subseteq \mathbb{Z}$ podskup skupa cijelih brojeva. Zadana je tvrdnja:

Za svaki cijeli broj vrijedi: ako je on element skupa S,
onda je i svaki njegov djelitelj element skupa S.

(a) (7 bodova) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji.

(b) (6 bodova) Odredite jedan primjer skupa S za koji je zadana tvrdnja istinita te jedan primjer skupa S za koji je ona neistinita. Obrazložite svoje odgovore.

(c) (7 bodova) Dokažite: ako je zadana tvrdnja istinita za skupove S_1 i S_2, onda je istinita i za $S_1 \cup S_2$.

Zadatak 2. (20 bodova) Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definirana je relacija ρ s

$$A \,\rho\, B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \setminus A \subseteq N,$$

gdje smo s N označili skup svih neparnih prirodnih brojeva.

(a) (10 bodova) Dokažite da je ρ relacija parcijalnog uređaja.

(b) (10 bodova) Odredite, ako postoje, i obrazložite svoj odgovor:

(b1) sve gornje međe skupa $\{\{1,2\}, \{3,4\}\}$;

(b2) infimum skupa $\{\{1,2,3\}, \{2,3,5\}\}$.

Zadatak 3. (20 bodova)

(a) (10 bodova) Rastavite na parcijalne razlomke izraz

$$\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

Napomena. Izračunajte i koeficijente u brojnicima.

(b) (10 bodova) Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

Zadatak 4. (20 bodova) Odredite neke realne koeficijente a, b, c takve da polinom

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 49$$

ima:

(a) (12 bodova) četiri različite cjelobrojne nultočke;

(b) (8 bodova) tri različite cjelobrojne nultočke i jednu koja nije cjelobrojna.

Zadatak 5.

(a) (12 bodova) Odredite sve ostatke koje izraz $x^8 + 4^y$ može dati pri dijeljenju sa 17, gdje su x i y prirodni brojevi.

(b) (8 bodova) Dokažite da jednadžba

$$x^8 + 4^y = 5z^{16} + 6$$

nema rješenja u prirodnim brojevima x, y, z.