ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

drugi kolokvij – 3. veljače 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja $2^{503^{503^{80}}}$ brojem 5^4.

Zadatak 2. (10 bodova)

(a) (3 boda) Neka je p prost broj takav da je $p \equiv 2 \pmod 3$. Pretpostavimo da $p \mid x^3 - 1$ za neki cijeli broj x. Dokažite da $p \mid x - 1$.

(b) (3 boda) Dokažite da je $M\left(\frac{(3x)^3-1}{3x-1}, 3x-1\right) = 1$ za svaki cijeli broj x.

(c) (4 boda) Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva p takvih da je $p \equiv 1 \pmod 3$.
Uputa. Pretpostavite suprotno i promotrite broj $\frac{(3P)^3-1}{3P-1}$, gdje je P umnožak svih prostih brojeva kongruentnih 1 modulo 3.

Zadatak 3. (10 bodova) Neka je $f(x) = x^5 - 9x^3 + 10x^2 + 2x - 16$.

(a) (6 bodova) Odredite sve nultočke od f, znajući da je jedna od njih $1 + i$.

(b) (4 boda) Odredite neki realan broj c takav da polinom $f(x) + c$ ima nultočku kratnosti barem 2. Obrazložite svoj odgovor.

Zadatak 4. (10 bodova) Polinom f s cjelobrojnim koeficijentima pri dijeljenju s $x^2 - 6x + 5$ daje ostatak $-7x + 20$, a pri dijeljenju s $x + 2$ daje ostatak 13.

(a) (6 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma f s $(x-1)(x-5)(x+2)$.

(b) (4 boda) Dokažite da ne postoji cijeli broj k takav da je $f(k) = 14$.

Zadatak 5. (10 bodova) Riješite u skupu kompleksnih brojeva sustav jednadžbi

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 5, \\ x + y + z = xyz + 2, \\ xyz(x + y + z) = 8. \end{cases}$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

drugi kolokvij – 3. veljače 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja $2^{503^{503^{80}}}$ brojem 5^4.

Zadatak 2. (10 bodova)

(a) (3 boda) Neka je p prost broj takav da je $p \equiv 2 \pmod 3$. Pretpostavimo da $p \mid x^3 - 1$ za neki cijeli broj x. Dokažite da $p \mid x - 1$.

(b) (3 boda) Dokažite da je $M\left(\frac{(3x)^3-1}{3x-1}, 3x-1\right) = 1$ za svaki cijeli broj x.

(c) (4 boda) Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva p takvih da je $p \equiv 1 \pmod 3$.
Uputa. Pretpostavite suprotno i promotrite broj $\frac{(3P)^3-1}{3P-1}$, gdje je P umnožak svih prostih brojeva kongruentnih 1 modulo 3.

Zadatak 3. (10 bodova) Neka je $f(x) = x^5 - 9x^3 + 10x^2 + 2x - 16$.

(a) (6 bodova) Odredite sve nultočke od f, znajući da je jedna od njih $1 - i$.

(b) (4 boda) Odredite neki realan broj c takav da polinom $f(x) - c$ ima nultočku kratnosti barem 2. Obrazložite svoj odgovor.

Zadatak 4. (10 bodova) Polinom f s cjelobrojnim koeficijentima pri dijeljenju s $x^2 - 6x + 5$ daje ostatak $-7x + 20$, a pri dijeljenju s $x + 2$ daje ostatak 13.

(a) (6 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma f s $(x-1)(x-5)(x+2)$.

(b) (4 boda) Dokažite da ne postoji cijeli broj k takav da je $f(k) = 14$.

Zadatak 5. (10 bodova) Riješite u skupu kompleksnih brojeva sustav jednadžbi

$$\begin{cases} xy + yz + zx = 5, \\ x + y + z = xyz + 2, \\ xyz(x + y + z) = 8. \end{cases}$$