

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

drugi jesenski rok – 10. rujna 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Zadatak 1. Neka su A, B, C i D skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$(B \times C) \cup ((A \setminus B) \times (C \setminus D))$$

i

$$((A \triangle B) \times (C \setminus D)) \cup (B \times (C \cap D)).$$

Svoje tvrdnje argumentirajte dokazima, odnosno kontraprimjerima.

Zadatak 2. Na skupu $S = \{0, 4, 5, 6, 7, 8\}$ zadana je relacija $\sqsubseteq$ s

$$a \sqsubseteq b \Leftrightarrow b - a \in S.$$

- (a) Koliko elemenata ima relacija $\sqsubseteq$?
- (b) Dokažite da je $\sqsubseteq$ relacija parcijalnog uređaja.
- (c) Ima li skup $\{0, 4, 5\}$ gornju među u odnosu na taj parcijalni uređaj? Obrazložite.

Zadatak 3. Matematičkom indukcijom dokažite sljedeće tvrdnje:

- (a) Za svaki prirodan broj m vrijedi

$$\sum_{k=m}^{2m} k^2 = \frac{1}{6}(14m^3 + 15m^2 + m).$$

- (b) Svaki razred s $n \geq 12$ učenika se može rasporediti u grupe od po 4 ili 5 učenika.

Zadatak 4.

- (a) Neka je n prirodan broj. Dokažite da je najveći zajednički djelitelj brojeva $12n + 3$ i $14n - 1$ jednak 1, 3, 9 ili 27. Pronađite neki n za koji je najveći zajednički djelitelj tih brojeva jednak 9.
- (b) Riješite jednadžbu $\varphi(n) = \frac{n}{2}$ u skupu prirodnih brojeva.

Zadatak 5. Odredite sve polinome $f(x)$ s realnim koeficijentima za koje vrijedi

$$f(x^4 + 1) = x^4 f(x^2) + 5.$$