Elementarna matematika 1

Vježbe 2

Tehnike dokazivanja

Napraviti **direktan dokaz** tvrdnje $P \Rightarrow Q$ znači, uz pretpostavku da je tvrdnja P istinita, logičkim zaključivanjem pronaći tvrdnje $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ takve da vrijedi

$$P \Rightarrow Q_1 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q_n \Rightarrow Q.$$

Zbog tranzitivnosti implikacije tada vrijedi $P \Rightarrow Q$.

Slično, napraviti direktan dokaz tvrdnje P znači pronaći tvrdnje $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ takve da je

$$Q_1 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow Q_n \Rightarrow P,$$

pri čemu je Q_1 aksiom teorije ili neka očito istinita tvrdnja.

Zadatak 15. Dokažite da za svaka dva pozitivna realna broja a i b vrijedi **AG nejednakost**:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Napraviti dokaz tvrdnje $P \Rightarrow Q$ **obratom po kontrapoziciji** znači dokazati tvrdnju $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Kako je taj sud semantički jednak sudu $P \Rightarrow Q$, time smo ujedno dokazali i $P \Rightarrow Q$.

Zadatak 16. Dokažite da za svaki cijeli broj x vrijedi: ako je broj $x^2 - 6x + 5$ paran, onda je x neparan.

Napraviti dokaz tvrdnje P **svođenjem na kontradikciju** znači dokazati $\neg P \Rightarrow \perp$, pri čemu je $\perp$ neka očito lažna tvrdnja. Tada $\neg P$ mora biti laž, pa P mora biti istina.

Zadatak 17. Dokažite da ne postoje cijeli brojevi x, y i z takvi da je

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 90.$$

2. SKUPOVI

Neka su A i B skupovi.

- Kažemo da je A **podskup** skupa B i pišemo $A \subseteq B$ ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, tj. ako vrijedi
$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$
- Kažemo da su skupovi A i B **jednaki** i pišemo $A = B$ ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, tj.
$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$
- Kažemo da je skup A **pravi podskup** skupa B i pišemo $A \subsetneq B$ ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \not\subseteq A$.

Zapišimo sve podskupove skupa $\{1, 2, 3\}$.

Neka je S skup. Skup svih podskupova od S zovemo **partitivni skup** skupa S i označavamo sa $\mathscr{P}(S)$.

Zadatak 1. Dokažite da vrijedi $\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$ ako i samo ako je $A = B$.

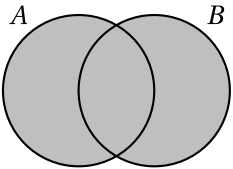
Skupovne operacije

Unija skupova A i B je skup čiji elementi su svi objekti koji pripadaju ili skupu A, ili skupu B.

Uniju skupova A i B označavamo sa $A \cup B$.

Vrijedi

$$x \in A \cup B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \vee x \in B.$$

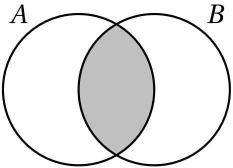


Presjek skupova A i B je skup čiji elementi su svi objekti koji pripadaju i skupu A i skupu B.

Presjek skupova A i B označavamo sa $A \cap B$.

Vrijedi

$$x \in A \cap B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \in B.$$

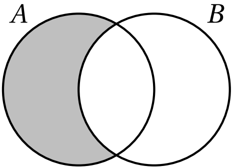


Razlika skupova A i B je skup čiji elementi su svi objekti koji pripadaju skupu A, a ne pripadaju skupu B.

Razliku skupova A i B označavamo sa $A \setminus B$.

Vrijedi

$$x \in A \setminus B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B.$$

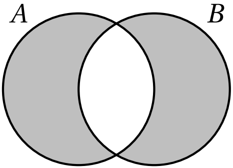


Simetrična razlika skupova A i B je skup čiji elementi su svi objekti koji pripadaju jednom od skupova A i B, a ne pripadaju drugom.

Simetričnu razliku skupova A i B označavamo sa $A \triangle B$.

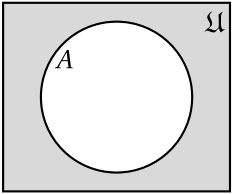
Vrijedi

$$x \in A \triangle B \quad \Leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B).$$



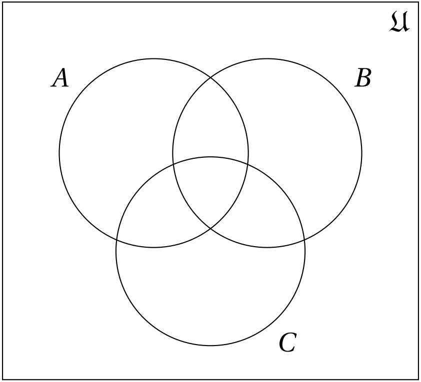
Ako je $A \subseteq \mathfrak{U}$ za neki skup $\mathfrak{U}$, skup $\mathfrak{U} \setminus A$ označavamo još sa A^c i zovemo **komplement skupa** A u odnosu na $\mathfrak{U}$.

Ovdje $\mathfrak{U}$ ima ulogu *univerzalnog skupa*.



Neka je $\mathfrak{U} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ i

$$A = \{1,2,4,8\}, \quad B = \{1,3,5,7,9\}, \quad C = \{2,3,5,7\}.$$



$A \cup B =$

$B \cap C =$

$A \setminus C =$

$C \setminus A =$

$(A \cup B)^c =$

$C \setminus (A \cup B) =$

Zadatak 2. Neka su A i B podskupovi univerzalnog skupa $\mathfrak{U}$. Dokažite da je

$$A \setminus B = A \cap B^c.$$

Zadatak 3. Neka je $\mathfrak{U} = \mathbb{N}$. Ako postoji, navedite primjer skupa $A \subseteq \mathbb{N}$ takvog da:

(a) A je konačan i A^c je beskonačan;

(b) A je beskonačan i A^c je konačan;

(c) A i A^c su oba beskonačni;

(d) A i A^c su oba konačan;

Za skupove A i B takve da vrijedi $A \cap B = \emptyset$ kažemo da su **disjunktni**.

Zadatak 4. Neka su A i B podskupovi univerzalnog skupa $\mathfrak{U}$. Dokažite da su A i B disjunktni ako i samo ako je $A \subseteq B^c$.

Zadatak 5. Neka su A, B i C skupovi. Dokažite da vrijedi

$$A \subseteq C \text{ i } B \subseteq C \quad \text{ako i samo ako} \quad A \cup B \subseteq C.$$

Zadatak 6. Neka su A i B skupovi. Dokažite da vrijedi

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zadatak 7. Neka su A, B i C skupovi. Dokažite

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Provjerimo vrijedi li

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Zadatak 8. Neka su A, B i C skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$(A \setminus B) \cup C \qquad \text{i} \qquad (A \cup C) \setminus B.$$

Zadatak 9. Neka su A, B, C i D skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$(A \setminus B) \cup (C \setminus D) \qquad \text{i} \qquad (A \cup C) \setminus (B \cup D).$$