Elementarna matematika 1

Vježbe 4

25.10.2024.

Zadatak 2. Na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$ dana je relacija

$$\rho = \{(1,2), (2,3), (3,4), (1,3), (2,4), (4,4), (1,4)\}.$$

Odredite je li ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna, irefleksivna.

Zadatak 5. Za svaku od sljedećih relacija na skupu realnih brojeva odredite njena svojstva:

(a) $x \Diamond y \iff x \cdot y = 0$,

(b) $x \, \delta \, y \iff x \cdot y \neq 0$,

(c) $x \otimes y \iff |x - y| < 5$,

(d) $x \circledcirc y \iff x^2 + y^2 = 1$,

(e) $x \, \rho \, y \iff x^2 + y^2 = 0$.

U narednim zadacima, *ispitati svojstva relacije* znači provjeriti je li relacija refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna, irefleksivna.

Zadatak 3. Na skupu prirodnih brojeva definirana je relacija ρ sa

$$m \, \rho \, n \quad \Leftrightarrow \quad 3m \text{ i } 5n \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju sa } 7.$$

Ispitajte svojstva ove relacije.

Neka je ρ relacija. **Suprotna relacija** od ρ je relacija

$$\rho^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in \rho\}.$$

Uočimo: vrijedi $x\,\rho^{-1}\,y \;\Leftrightarrow\; y\,\rho\,x$.

Zadatak 4. Neka je ρ relacija na A. Dokažite:

(a) $\rho = \rho^{-1} \;\Leftrightarrow\; \rho$ je simetrična,

(b) ρ je tranzitivna $\;\Leftrightarrow\; \rho^{-1}$ je tranzitivna,

(c) ρ je antisimetrična $\;\Leftrightarrow\; \rho \cap \rho^{-1} \subseteq \{(x, x) \mid x \in A\}$.

Relacije ekvivalencije

Binarna relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna zove se **relacija ekvivalencije**.
Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na nepraznom skupu A, te neka je $x \in A$. Skup

$$[x] := \{y \in A \mid x \sim y\}$$

zovemo **klasa ekvivalencije** elementa x. Nadalje, kažemo da je x **reprezentant** klase $[x]$.
Skup svih klasa ekvivalencije zovemo **kvocijentni skup** od $\sim$ i označavamo ga sa

$$A/_{\sim} := \{[x] \mid x \in A\}.$$

Teorem

Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu A te neka su $x, y \in A$ proizvoljni. Tada:

(a) $x \in [x]$;

(b) ako $x \not\sim y$, onda $[x] \cap [y] = \emptyset$;

(c) ako $x \sim y$, onda $[x] = [y]$.

Zadatak 6. Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je relacija $\sim$ sa

$$m \sim n \iff m - n \text{ je paran cijeli broj.}$$

Dokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije i odredite klase ekvivalencije.

Zadatak 7. Odredite relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupu A čije klase su $A/_\sim$, ako je:

(a) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $A/_\sim = \big\{\{1,4,5\},\ \{2,3\}\big\}$;

(b) $A = \mathbb{N}$, $A/_\sim = \big\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\big\}$;

(c) $A = \mathbb{R}$, $A/_\sim = \big\{[k, k+1\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\big\}$.

Neka je A skup. **Particija skupa** A je bilo koja familija skupova $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(A)$ sa sljedećim svojstvima:

(i) Za sve $X \in \mathscr{F}$ vrijedi $X \neq \emptyset$;

(ii) Za sve $X, Y \in \mathscr{F}$ vrijedi $X = Y$ ili $X \cap Y = \emptyset$;

(iii) $\displaystyle\bigcup_{X \in \mathscr{F}} X = A$.

Primjeri:

1. $\mathscr{F}_1 = \big\{\{1,4,5\},\ \{2,3\}\big\}$ je particija skupa $\{1,2,3,4,5\}$.

2. $\mathscr{F}_2 = \big\{\{2k \mid k \in \mathbb{N}\},\ \{2k+1 \mid k \in \mathbb{N}\}\big\}$ je particija skupa prirodnih brojeva.

   $\mathscr{F}_3 = \big\{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\big\}$ je također particija skupa prirodnih brojeva.

3. $\mathscr{F}_4 = \big\{[k, k+1\rangle \mid k \in \mathbb{Z}\big\}$ je particija skupa $\mathbb{R}$.

Korolar

Neka je A neprazan skup i $\sim$ relacija ekvivalencije na A. Tada je kvocijentni skup $A/_{\sim}$ particija skupa A.

Zadatak 8. Neka je A skup i neka je $\mathscr{F}$ particija skupa A. Definirajmo relaciju $\sim$ na skupu A sa

$$a \sim b \iff (\exists X \in \mathscr{F})(a \in X \land b \in X).$$

Dokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije na A i da vrijedi $A/_{\sim} = \mathscr{F}$.

Zadatak 9. Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je relacija ρ sa

$$a \,\rho\, b \iff (\exists p \in \mathbb{P})(p \mid a \wedge p \mid b),$$

gdje je $\mathbb{P}$ skup prostih brojeva.

(a) Ispitajte svojstva relacije ρ. Je li ρ relacija ekvivalencije?

(b) Odredite najmanju relaciju ekvivalencije koja sadrži ρ.

Zadatak 10. Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadana je relacija ρ na sljedeći način:

$$(a,b)\ \rho\ (c,d) \iff 2 \mid a-c \ \vee\ 3 \mid b-d.$$

(a) Ispitajte svojstva relacije ρ. Je li ρ relacija ekvivalencije?

(b) Odredite sve načine na koje se ρ može nadopuniti do relacije ekvivalencije.

Zadatak 11. Neka je $S \neq \emptyset$ skup i $T \subseteq S$. Na skupu $\mathscr{P}(S)$ zadana je relacija ρ sa

$$A \,\rho\, B \iff A \cap T = B \cap T.$$

(a) Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije.

(b) Za $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $T = \{2, 3, 4\}$ odredite $[\{2, 5\}]$.