Relacije parcijalnog uređaja

Relacija ρ na skupu A koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna zove se **relacija parcijalnog uređaja** ili jednostavno **parcijalni uređaj**.
Ako još vrijedi

$$(\forall x, y \in A)(x \rho y \ \vee \ y \rho x),$$

onda ρ zovemo **relacija totalnog uređaja** ili **totalni uređaj**.

Relacije $\leq$, $\geq$, $\subseteq$ i $|$ (na $\mathbb{N}$!) su parcijalni uređaji. Pri tome su $\leq$ i $\geq$ totalni uređaji, a $\subseteq$ i $|$ nisu totalni uređaji.

Relacija koja je irefleksivna i tranzitivna zove se **relacija strogog parcijalnog uređaja** ili jednostavno **strogi parcijalni uređaj**.

Relacije $<$ i $>$ su strogi parcijalni uređaji.

Napomena. Svaka relacija koja je irefleksivna i tranzitivna je automatski i antisimetrična.

Zadatak 5. Neka su $\leq_1$ i $\leq_2$ parcijalni uređaji na nekom skupu A. Jesu li relacije $\leq_\cup$ definirana s $\leq_1 \cup \leq_2$ i $\leq_\cap$ definirana s $\leq_1 \cap \leq_2$ nužno parcijalni uređaji?

Zadatak 6.

(a) Neka je ρ relacija strogog parcijalnog uređaja na skupu A. Neka je σ relacija na skupu A definirana s

$$x \,\sigma\, y \iff x = y \lor x \,\rho\, y.$$

Dokažite da je σ relacija parcijalnog uređaja.

(b) Neka je σ relacija parcijalnog uređaja na skupu A. Neka je ρ relacija na skupu A definirana s

$$x \,\rho\, y \iff x \,\sigma\, y \land x \neq y.$$

Dokažite da je ρ relacija strogog parcijalnog uređaja.

Neka je ρ relacija parcijalnog uređaja na skupu A i neka je $B \subseteq A$. Kažemo da je a **donja međa** skupa B ako

$$(\forall b \in B)(a \, \rho \, b).$$

Kažemo da je element $a \in A$ **najveća donja međa** ili **infimum** skupa B i pišemo $a = \inf B$ ako vrijedi

(i) a je donja međa skupa B;

(ii) za svaku donju među $x \in A$ skupa B vrijedi $x \, \rho \, a$.

Neka je ρ relacija parcijalnog uređaja na skupu A i neka je $B \subseteq A$.
Kažemo da je a **gornja međa** skupa B ako

$$(\forall b \in B)(b \,\rho\, a).$$

Kažemo da je element $a \in A$ **najmanja gornja međa** ili **supremum** skupa B i pišemo $a = \sup B$ ako vrijedi

(i) a je gornja međa skupa B;

(ii) za svaku gornju među $x \in A$ skupa B vrijedi $a \,\rho\, x$.

Zadatak 7. Na skupu $A = \{1,2,3,4\}$ dana je relacija ρ s

$$\rho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3),(3,4),(4,4)\}.$$

(a) Dokažite da je ρ relacija parcijalnog uređaja.
(b) Odredite sve donje međe skupa $\{3,4\}$. Ima li taj skup infimum?
(c) Odredite sve gornje međe skupa $\{2,3\}$. Ima li taj skup supremum?
(d) Odredite sve gornje međe skupa $\{1\}$. Ima li taj skup supremum?

Zadatak 8. Na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirana je relacija ρ sa

$$(a, b)\ \rho\ (c, d) \iff a|c \ \wedge \ b \leq d.$$

(a) Dokažite da je ρ relacija parcijalnog uređaja.

(b) Ima li skup $\{(6, 16), (9, 12), (15, 8)\}$ donju među (s obzirom na uređaj ρ)? Ima li infimum?

Zadatak 9. Neka je A proizvoljan neprazan skup. Na skupu $\mathscr{A}$ svih particija od A definirana je relacija ρ s

$$\mathscr{F}_1 \,\rho\, \mathscr{F}_2 \iff (\forall X \in \mathscr{F}_1)(\exists Y \in \mathscr{F}_2)\, X \subseteq Y.$$

(a) Dokažite da je ρ relacija parcijalnog uređaja. Je li totalan uređaj?

(b) Postoje li u $(\mathscr{A}, \rho)$ najmanji i najveći element?

(c) U slučaju kada je $A = \{1,2,3,4\}$ odredite supremum i infimum skupa $\{\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2\}$ gdje su $\mathscr{F}_1 = \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$ i $\mathscr{F}_2 = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$.