4. MATEMATIČKA INDUKCIJA

Aksiom matematičke indukcije

Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da:

(i) $1 \in S$;

(ii) $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in S \implies n+1 \in S)$.

Tada je $S = \mathbb{N}$.

Teorem (Princip matematičke indukcije).

Neka je $P(n)$ predikat koji ovisi o prirodnom broju $n \in \mathbb{N}$. Neka vrijedi:

BAZA: $P(1)$ je istina.

KORAK: Ako je $P(n)$ istina za neki $n \in \mathbb{N}$, onda je i $P(n+1)$ istina.

Tada je $P(n)$ istina za sve prirodne brojeve n, tj. vrijedi $(\forall n \in \mathbb{N}) P(n)$.

Dokaz. Definirajmo skup $S := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ je istina}\}$. Tada iz BAZE slijedi $1 \in S$, a iz KORAKA slijedi $(\forall n \in \mathbb{N})(n \in S \implies n+1 \in S)$. Prema aksiomu matematičke indukcije tada vrijedi $S = \mathbb{N}$, što je upravo tvrdnja teorema. $\square$

Zadatak 1. Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zadatak 4. Dokažite da je broj $3^{2n+2} - 8n - 9$ djeljiv sa 64 za svaki cijeli broj $n \geq 0$.

Varijante principa matematičke indukcije

Neka je $P(n)$ predikat koji ovisi o prirodnom broju n i neka je $m \in \mathbb{Z}$. Ako vrijedi:

BAZA: $P(m)$ je istina.

KORAK: Ako je $P(n)$ istina za neki $n \geq m$, onda je i $P(n+1)$ istina.

Onda je $P(n)$ istina za sve cijele brojeve brojeve $n \geq m$.

Neka je $P(n)$ predikat koji ovisi o prirodnom broju n i neka vrijedi:

BAZA: $P(1)$ i $P(2)$ je istina.

KORAK: Ako je $P(n)$ istina za neki $n \in \mathbb{N}$, onda je i $P(n+2)$ istina.

Tada je $P(n)$ istina za sve prirodne brojeve n.

Potpuna ili **jaka indukcija**

Neka je $P(n)$ predikat koji ovisi o prirodnom broju n i neka vrijedi:

BAZA: $P(1)$ je istina.

KORAK: Ako je $P(k)$ istina za sve prirodne brojeve k manje ili jednake od nekog $n \in \mathbb{N}$, onda je i $P(n+1)$ istina.

Tada je $P(n)$ istina za sve prirodne brojeve n.

Zadatak 7. U nekom restoranu brze hrane, pileći medaljoni prodaju se u pakiranjama od 3 ili od 5 komada. Dokažite da se za svaki prirodan broj $n \geq 8$ može naručiti točno n medaljona.

Zadatak 8. Dokažite da je $2^n > 10n^2$ za svaki prirodan broj $n \geq 10$.

Zadatak 9. Dokažite da za svaki prirodan broj n veći od 1 vrijedi

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

Zadatak 12. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\underbrace{\sqrt{4+\sqrt{4+\sqrt{\cdots+\sqrt{4}}}}}_{n \text{ korijena}} < 3.$$

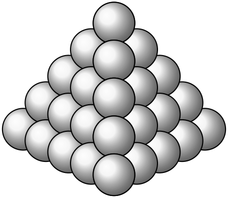
Zadatak 13. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} \leq \frac{n^2 + 3n}{4}.$$

Zadatak 14. Dokažite da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{2025} i \cdot 2^{i-1} = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 2025 \cdot 2^{2024} = 2024 \cdot 2^{2025} + 1.$$

Zadatak 15. Kuglice su složene u pravilnu trostranu piramidu tako da je n kuglica duž svakog brida (vidi sliku). Dokažite da se piramida sastoji od $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ kuglica.



Slika: Piramida za $n = 5$