Elementarna matematika 1

Vježbe 12

Kratnost nultočke

Neka je $f \in \mathbb{C}[x]$ i $k \in \mathbb{N}_0$. Za $\alpha \in \mathbb{C}$ kažemo da je ***k*-struka** nultočka (ili nultočka **kratnosti** k) polinoma f ako je f djeljiv polinomom $(x-\alpha)^k$, ali nije djeljiv polinomom $(x-\alpha)^{k+1}$.

Odredite kratnost nultočke $\alpha = 2$ polinoma

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8.$$

Osnovni teorem algebre

Neka je $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f \geq 1$. Tada postoji $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $f(\alpha) = 0$, tj. α je nultočka polinoma f.

Korolar

Svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geq 1$ se može na jedinstven način zapisati kao produkt n polinoma prvog stupnja.
Preciznije, ako je $a_n \in \mathbb{C}$ vodeći koeficijent od f, onda postoje $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n), \qquad \forall x \in \mathbb{C}.$$

Iz prethodnog korolara slijedi da se svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geq 1$ može zapisati u obliku

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_p)^{k_p},$$

pri čemu su $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in \mathbb{C}$ međusobno različite nultočke polinoma f s kratnostima $k_1,\ldots,k_p$, te vrijedi $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$.

Nadalje, svaki polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ se može zapisati u obliku

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{r_1} \cdots (x^2+\beta_t x+\gamma_t)^{r_t},$$

gdje su $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t, \gamma_1, \dots, \gamma_t \in \mathbb{R}$, te vrijedi
$2\sum_{i=1}^{t} r_i + \sum_{j=1}^{s} k_j = n$.

Korolar

(1) Svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geq 1$ ima točno n nultočaka, pri čemu svaku nultočku brojimo onoliko puta kolika joj je kratnost.

(2) Ako se polinomi $f, g \in \mathbb{C}[x]$ stupnja najviše n podudaraju u barem $n+1$ točaka, onda je $f = g$.

Derivacija polinoma

Neka je $f \in \mathbb{C}[x]$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$. **Derivaciju polinoma** f definiramo kao polinom $f' \in \mathbb{C}[x]$ dan s

$$f'(x) := n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1.$$

Također, induktivno možemo definirati n-tu derivaciju polinoma: $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ itd., općenito

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})', \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Svojstva derivacije

Za $f, g \in \mathbb{C}[x]$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ vrijedi

(1) $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$,

(2) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(3) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Propozicija

Ako je $\alpha \in \mathbb{C}$ nultočka kratnosti $k \geq 2$ polinoma $f \in \mathbb{C}[x]$, onda je α nultočka kratnosti $k-1$ polinoma f'.

Zadatak 10. Dokažite da polinom $x^n - 1$ nema višestrukih nultočaka.

Zadatak 11. Odredite nužne i dovoljne uvjete na koeficijente polinoma

$$p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

da bi on bio djeljiv polinomom $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Zadatak 12. Odredite koeficijente a i b polinoma

$$f(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + b$$

tako da bude djeljiv polinomom $(x-2)^2$.

Zadatak 13. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma

$$f(x) = x^{100} - x^{50} + 1$$

polinomom $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Zadatak 14. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ polinom

$$f(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$$

djeljiv polinomom

$$g(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Zadatak 15. Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju

$$(x+1)f(x) = x^3 + 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 16. Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju

$$f(x^2-3) = x^2 f(x-1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{$\star$}$$

Cjelobrojne i racionalne nultočke

Teorem o racionalnim nultočkama

Neka je f polinom s cjelobrojnim koeficijentima koji ima racionalnu nultočku $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $M(p, q) = 1$. Tada p dijeli slobodni koeficijent, a q vodeći koeficijent polinoma f.

Ako polinom $f \in \mathbb{Z}[x]$ ima cjelobrojnu nultočku α, tada iz prethodnog teorema slijedi da α dijeli slobodni koeficijent od f.

Zadatak 17. Odredite nultočke polinoma

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6.$$

Zadatak 18. Odredite nultočke polinoma

$$f(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 3.$$

Zadatak 19. Odredite koeficijente a i b polinoma

$$f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b$$

ako je poznato da on ima trostruku cjelobrojnu nultočku.

Zadatak 20. Nađite polinom s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je nultočka broj $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.