Elementarna matematika 1

Vježbe 13

Lema

Neka je f polinom s cjelobrojnim koeficijentima i $k \in \mathbb{Z}$ cijeli broj. Tada dijeljenjem polinoma f polinomom $x - k$ ponovno dobivamo polinom s cjelobrojnim koeficijentima.

Zadatak 21. Neka je f polinom s cjelobrojnim koeficijantima. Dokažite: ako su $f(0)$ i $f(1)$ neparni brojevi, onda f nema cjelobrojnih nultočaka.

Zadatak 22. Dokažite da ne postoji polinom f s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $f(0) = 2$ i $f(2) = 5$.

Zadatak 23. Neka je f polinom s cjelobrojnim koeficijentima i neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ međusobno različiti brojevi takvi da je $f(a) = f(b) = f(c) = 3$. Dokažite da ne postoji $d \in \mathbb{Z}$ takav da je $f(d) = 2$.

Zadatak 24. Odredite sve nultočke polinoma

$$f(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 16x - 40$$

ako znate da je jedna od njih $x_1 = 1 - i\sqrt{3}$.

Zadatak 25. Zadana su dva polinoma

$$f(x) = x^3 - (a+4)x^2 + (4a+3)x - 3a,$$

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$$

Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da je njihova najveća zajednička mjera $M(f,g)$ polinom stupnja 2.

Viéteove formule

Neka je

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

te neka su $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ sve njegove nultočke (ne nužno različite).

Tada vrijedi

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Množenjem zagrada u desnom izrazu i izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata možemo dovesti u vezu nultočke i koeficijente polinoma f.

Viéteove formule

$$
\begin{gathered}
x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_{n-1} \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = a_{n-2} \\
\vdots \\
x_2x_3\cdots x_n + x_1x_3\cdots x_n + \cdots + x_1x_2\cdots x_{n-1} = (-1)^{n-1}a_1 \\
x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n a_0
\end{gathered}
$$

Viéteove formule za $n = 2$

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1 x_2 = b$$

Viéteove formule za $n = 3$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$
$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = b$$
$$x_1 x_2 x_3 = -c$$

Zadatak 26. Odredite površinu trokuta kojemu su duljine stranica nultočke polinoma

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Zadatak 27. Dokažite: ako polinom $f(x) = x^3 - px + q$ s realnim koeficijentima ima tri realne međusobno različite nultočke, onda je $p > 0$.

Zadatak 28. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ xy+yz+zx=27 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1. \end{cases}$$

Jednadžbu koja nakon zamjene bilo kojih dviju varijabli ostaje ista nazivamo **simetričnom**.
Sustav takvih jednadžbi nazivamo **simetričnim sustavom**.

Izrazi $x+y+z$, $xy+yz+zx$ i xyz iz Viéteovih formula su simetrični.

Svaki simetrični izraz u tri varijable može se izraziti pomoću $x+y+z$, $xy+yz+zx$ i xyz.

Zadatak. Izrazite $x^2+y^2+z^2$ pomoću $x+y+z$, $xy+yz+zx$ i xyz.

Zadatak. Izrazite $x^3 + y^3 + z^3$ pomoću $x + y + z$, $xy + yz + zx$ i xyz.

Zadatak 29. Riješite sustav

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20. \end{cases}$$

Zadatak 30. Riješite sustav

$$\begin{cases} xyz = 1, \\ x + y + z = xy + yz + zx, \\ x^3 + y^3 + z^3 = \frac{73}{8}. \end{cases}$$

Rastav na parcijalne razlomke

Promatramo racionalnu funkciju

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

pri čemu su $f, g \in \mathbb{R}[x]$ polinomi i g je normiran.

Cilj: zapisati tu funkciju kao sumu što jednostavnijih racionalnih funkcija $\longrightarrow$ rastaviti na **parcijalne razlomke**.

1. Primijenimo teorem o dijeljenju s ostatkom:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \qquad \deg r < \deg g.$$

Neka g ima sljedeću faktorizaciju:

$$g(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s} (x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{r_1} \cdots (x^2+\beta_t x+\gamma_t)^{r_t}.$$

2. Za svaki faktor oblika $(x-\alpha_i)^{k_i}$ rastav na parcijalne razlomke sadržavat će pribrojnike

$$\frac{*}{x-\alpha_i} + \frac{*}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{*}{(x-\alpha_i)^{k_i}}.$$

3. Za svaki faktor oblika $(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{r_i}$ rastav na parcijalne razlomke sadržavat će pribrojnike

$$\frac{*x+*}{x^2+\beta_i x+\gamma_i} + \frac{*x+*}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^2} + \cdots + \frac{*x+*}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^{r_i}}.$$

Pri tome su sa $*$ označeni nepoznati koeficijenti koje određujemo ovisno o $f(x)$ (tj. $r(x)$).

Odredite oblik rastava na parcijalne razlomke funkcije

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+3x+5}{(x-1)^5(x^2+x+2)^3}.$$

Zadatak 31. Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{3x^2-2}{x^3-x}.$$

Zadatak 32. Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{1}{x^3+x^2-x-1}.$$

Zadatak 33. Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{14x^2 - 51x + 43}{x^3 - 7x^2 + 17x - 15}.$$

Zadatak 34. Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{6x^3 - 29x^2 + 100x - 64}{(x^2 - 4x + 13)^2}.$$

Zadatak 35. Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{15x^2+26x-5}{x^3+3x^2-4}.$$