

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

pismeni ispit – 11. rujna 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i geometrijskog pribora.

Zadatak 1. Neka je $\overline{AB}$ zajednička tetiva dviju kružnica. Pravac prolazi točkom A te siječe jednu kružnicu još u točki C , a drugu još u točki D . Tangente u točkama C i D (na odgovarajuće kružnice) sijeku se u točki M . Dokažite da je $BCMD$ tetivni četverokut.

Zadatak 2. Neka je $ABCD$ paralelogram i S sjecište njegovih dijagonala. Neka je E točka na pravcu BC različita od C takva da je $|BC| = |BE|$. Označimo sa F sjecište pravaca AB i SE . Konačno, pravac DF siječe pravac BC u točki M . Odredite omjer $|DF| : |FM|$.

Zadatak 3.

(a) Vektor $\vec{c}$ paralelan je s duljom dijagonalom paralelograma kojeg razapinju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Ako vrijedi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 12$ i $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, zapišite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

(b) Dokažite jednakost:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Zadatak 4. Dane su ravnine $\pi_1 \dots 2x - y - z = 3$ i $\pi_2 \dots 2x + 3z = 15$ te pravac

$$q \quad \dots \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{0}$$

koji leži u ravnini π_1 . Odredite pravac p koji se nalazi u ravnini π_2 , a pravac q mu je ortogonalna projekcija na ravninu π_1 .

Zadatak 5. Odredite jednadžbu elipse kojoj je jedna tangenta pravac $y = x + 7$, a fokusi joj se podudaraju s fokusima hiperbole $x^2 - 24y^2 = 6$.