

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

pismeni ispit – 28. kolovoza 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta.
Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i geometrijskog pribora.

Zadatak 1. Neka je S središte upisane kružnice trokuta ABC . Kružnica koja prolazi točkama A i S siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama M i N . Dokažite da vrijedi $|BM| + |CN| = |BC|$.

Zadatak 2. Neka je t pozitivan realan broj. Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC leži točka M za koju vrijedi $|AM| : |MC| = 1 : t$, a na stranici $\overline{BC}$ točka N za koju vrijedi $|BN| : |NC| = t : 1$. Pravci AN i BM sijeku se u točki S . U ovisnosti o t , odredite u kojem omjeru točka S dijeli dužinu $\overline{AN}$.

Zadatak 3.

(a) Neka su $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ takvi da $\vec{v} \times \vec{w}$ nije nulvektor. Pretpostavimo da vrijedi

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{w} = \vec{v} - \vec{w}.$$

Dokažite da je $\vec{w}$ duljine 1.

(b) Odredite sve vektore $\vec{v}, \vec{w} \in V^3$ za koje vrijedi

$$((\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{w}) \times \vec{w} = \vec{v} - \vec{w}.$$

Zadatak 4. Odredite pravac p koji je paralelan s ravninama π_1 i π_2 te siječe pravce q_1 i q_2 , gdje su

$$\pi_1 \quad \dots \quad x + y - 2z = 1,$$

$$\pi_2 \quad \dots \quad 2x + 2z = 5,$$

$$q_1 \quad \dots \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{2},$$

$$q_2 \quad \dots \quad \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

Zadatak 5. Neka je $\mathcal{C}$ skup središta svih kružnica koje izvana diraju kružnicu s jednadžbom $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, a os y im je tangenta.

Pokažite da je $\mathcal{C}$ krivulja drugog reda i zapišite njenu jednadžbu u kanonskom obliku. O kojoj se krivulji radi? Napišite koordinate barem jednog fokusa i barem jednog tjemena te krivulje.