ANALITIČKA GEOMETRIJA

prvi kolokvij, 30. studenog 2022.

1. (20)

a) Definirajte ekvivalentnost usmjerenih dužina u E^3, dokažite da ona ima svojstvo simetričnosti te potom definirajte pojam vektora. (6)

b) Definirajte množenje vektora skalarom. Dokažite da je zbrajanje vektora komutativno. Za vektore $\vec{a} = (1, -3, 2)$ i $\vec{b} = (1, -1, 0)$ napišite neki vektor $\vec{c} \in V^3$ koji se ne može zapisati kao njihova linearna kombinacija te obrazložite Vaš odgovor. (7)

c) Pretpostavimo da vektori $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V^3$ čine bazu prostora V^3. Precizno napišite koje sve uvjete takvi vektori moraju zadovoljavati da bi $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ bila desno orijentirana ortonormirana baza. Neka su dani vektori $\vec{e} = (0, 1, 0)$ i $\vec{f} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Odredite neki vektor $\vec{g}$ takav da $(\vec{e}, \vec{f}, \vec{g})$ bude lijevo orijentirana ortonormirana baza. (3)

d) Dokažite formulu za vrijednost mješovitog produkta tri vektora iz V^3 koji su zadani svojim koordinatama u nekoj desno orijentiranoj ortonormiranoj bazi. Koristeći tu formulu, ispitajte jesu li vektori $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ i $\vec{w} = (0, 1, -1)$, čije su koordinate zadane u nekoj desno orijentiranoj ortonormiranoj bazi, komplanarni. Obrazložite Vaš odgovor. (4)

2. (5)

a) Izvedite parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca u ravnini koji prolazi dvjema točkama $T_1 = (x_1, y_1)$ i $T_2 = (x_2, y_2)$. (3)

b) Napišite kanonske oblike jednadžbi neka tri različita pravca p, q i r u ravnini takva da je p paralelan q te da je r okomit na q. (2)

3. (7) Neka je $\vec{a} = (0, 3, 4) \in V^3$ te neka je $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$ rastav vektora $\vec{a}$ na dva međusobno okomita nenul vektora takvih da je $\vec{y}$ kolinearan vektoru $\vec{b} = (1, 0, 1)$.

a) Odredite vektore $\vec{x}$ i $\vec{y}$. (4)

b) Odredite površinu pravokutnika razapetog vektorima $\vec{x}$ i $\vec{y}$. (2)

c) Neka je $\vec{t_a}$ težišnica na stranicu određenu vektorom $\vec{a}$ u trokutu koji je određen vektorima $\vec{a}$, $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Odredite kut između vektora $\vec{x}$ i $\vec{t_a}$ (dovoljno je odrediti kosinus kuta). (1)

4. (7) Zadan je trapez $ABCD$ pri čemu je $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Neka je točka S sjecište pravaca AC i BD, a točka T sjecište pravaca AD i BC. Neka je točka X sjecište pravaca ST i CD. Odredite omjer duljina dužina $\overline{TX}$ i $\overline{SX}$.

5. (6) Zadana je trostrana piramida $ABCD$ s vrhom D i bazom trokutom ABC gdje su $A = (1, 1, 0)$, $B = (4, -1, -1)$, $C = (3, 1, 2)$ i $D = (1, -4, 2)$. Neka je točka E nožište okomice iz točke D na bazu. Odredite volumen piramide $AECD$.
(**Uputa** : Vektor $\overrightarrow{AE}$ je ortogonalna projekcija vektora $\overrightarrow{AD}$ na ravninu ABC.)

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulatore i službene šalabahtere.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

prvi kolokvij, 30. studenog 2022.

1. (20)

a) Definirajte ekvivalentnost usmjerenih dužina u E^3, dokažite da ona ima svojstvo simetričnosti te potom definirajte pojam vektora. (6)

b) Definirajte množenje vektora skalarom. Dokažite da je zbrajanje vektora komutativno. Za vektore $\vec{x} = (3, -2, -1)$ i $\vec{y} = (0, -1, 1)$ napišite neki vektor $\vec{z} \in V^3$ koji se ne može zapisati kao njihova linearna kombinacija te obrazložite Vaš odgovor. (7)

c) Pretpostavimo da vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ čine bazu prostora V^3. Precizno napišite koje sve uvjete takvi vektori moraju zadovoljavati da bi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bila desno orijentirana ortonormirana baza. Neka su dani vektori $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ i $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Odredite neki vektor $\vec{w}$ takav da $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ bude lijevo orijentirana ortonormirana baza. (3)

d) Dokažite formulu za vrijednost mješovitog produkta tri vektora iz V^3 koji su zadani svojim koordinatama u nekoj desno orijentiranoj ortonormiranoj bazi. Koristeći tu formulu, ispitajte jesu li vektori $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ i $\vec{w} = (1, 1, -1)$, čije su koordinate zadane u nekoj desno orijentiranoj ortonormiranoj bazi, komplanarni. Obrazložite Vaš odgovor. (4)

2. (5)

a) Izvedite parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca u ravnini koji prolazi dvjema točkama $A = (x_A, y_A)$ i $B = (x_B, y_B)$. (3)

b) Napišite kanonske oblike jednadžbi neka tri različita pravca p, q i r u ravnini takva da je p okomit na q te da je r paralelan q. (2)

3. (7) Neka je $\vec{a} = (0, -2, 5) \in V^3$ te neka je $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$ rastav vektora $\vec{a}$ na dva međusobno okomita nenul vektora takvih da je $\vec{y}$ kolinearan vektoru $\vec{b} = (1, 1, -2)$.

a) Odredite vektore $\vec{x}$ i $\vec{y}$. (4)

b) Odredite površinu pravokutnika razapetog vektorima $\vec{x}$ i $\vec{y}$. (2)

c) Neka je $\vec{t_a}$ težišnica na stranicu određenu vektorom $\vec{a}$ u trokutu koji je određen vektorima $\vec{a}$, $\vec{x}$ i $\vec{y}$. Odredite kut između vektora $\vec{x}$ i $\vec{t_a}$ (dovoljno je odrediti kosinus kuta). (1)

4. (7) Zadan je trapez $ABCD$ pri čemu je $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Neka je točka S sjecište pravaca AC i BD, a točka T sjecište pravaca AD i BC. Neka je točka X sjecište pravaca ST i CD. Odredite omjer duljina dužina $\overline{TX}$ i $\overline{SX}$.

5. (6) Zadana je trostrana piramida $ABCD$ s vrhom D i bazom trokutom ABC gdje su $A = (3, 1, 2)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (4, -1, -1)$ i $D = (1, -4, 2)$. Neka je točka E nožište okomice iz točke D na bazu. Odredite volumen piramide $BECD$.
(**Uputa** : Vektor $\overrightarrow{BE}$ je ortogonalna projekcija vektora $\overrightarrow{BD}$ na ravninu ABC.)

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.
Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulatore i službene šalabahtere.