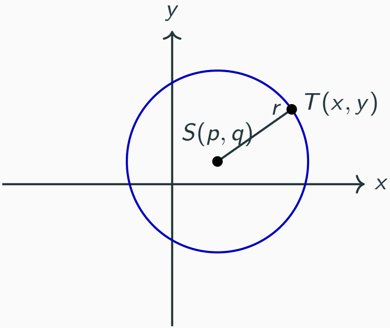
Analitička geometrija

Definicija kružnice

Prisjetimo se: Kružnica je skup točaka u ravnini E^2 jednako udaljenih od čvrste točke u ravnini.

Čvrsta točka zove se središte kružnice, a udaljenost od središta do bilo koje točke kružnice zove se polumjer ili radijus.



Jednadžba kružnice

Neka je $S = (p, q)$ središte kružnice, r njezin polumjer, a $T = (x, y)$ proizvoljna točka ravnine E^2.

$$\begin{aligned} T \in k &\Longleftrightarrow \mathrm{d}^2(S, T) = r^2 \\ &\Longleftrightarrow (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2. \end{aligned}$$

Kanonski oblik jednadžbe kružnice:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

Posebno, za središte u ishodištu: $x^2 + y^2 = r^2$.

Pravac i kružnica

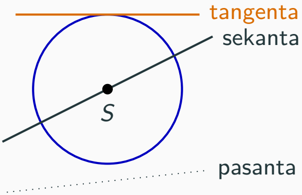
Neka su zadani pravac $y = kx + l$ i kružnica $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Zajedničke točke nalazimo iz sustava

$$\begin{cases} y = kx + l, \\ (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2. \end{cases}$$

Uvrštavanjem izraza za y u jednadžbu kružnice, dobiva se kvadratna jednadžba u x:

$$(1+k^2)x^2 + 2x\big(k(l-q) - p\big) + (l-q)^2 + p^2 - r^2 = 0.$$

- dva realna rješenja: sekanta;
- jedno realno rješenje: tangenta;
- nema realnih rješenja: pasanta.



Uvjet tangencijalnosti kružnice

Pravac $y = kx + l$ je tangenta kružnice $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ ako i samo ako je diskriminanta prethodne kvadratne jednadžbe jednaka nuli.

Uvjet dodira

$$r^2(1+k^2) = (q - kp - l)^2$$

Isti uvjet dobiva se geometrijski:

$$\text{pravac je tangenta} \iff \mathrm{d}(S, p) = r,$$

pa je

$$r = \frac{|kp - q + l|}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Tangenta kružnice u zadanoj točki

Za kružnicu sa središtem u ishodištu

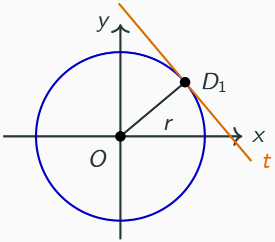
$$x^2 + y^2 = r^2$$

tangenta u točki dodira $D_1 = (x_1, y_1)$ glasi

$$x_1 x + y_1 y = r^2.$$

Za kružnicu $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ analogno vrijedi

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2.$$



Polarni koordinatni sustav

U ravnini E^2 odaberemo:

- čvrstu točku O, koju zovemo pol;
- čvrsti polupravac o s početkom u O, koji zovemo polarna os.

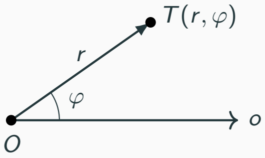
Za $T \neq O$ točka je određena udaljenošću

$$r = \mathrm{d}(O, T)$$

i kutom

$$\varphi \in [0, 2\pi)$$

koji polupravac OT zatvara s polarnom osi.



Veza polarnih i Kartezijevih koordinata

Ako Kartezijev sustav ima ishodište u polu O, a pozitivni dio x-osi podudara se s polarnom osi, tada vrijedi

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Obratno,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Kod određivanja kuta φ treba uzeti u obzir kvadrant u kojem leži točka T.

Napomena.

Za pol O vrijedi $r = 0$, a kut φ nije jednoznačno određen.

Definicija elipse

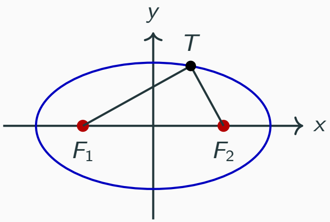
Definicija

Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u ravnini E^2 udaljene za $2e > 0$, i neka je $a > e$.

Elipsa je skup točaka za koje je zbroj udaljenosti od F_1 i F_2 konstantan i jednak $2a$:

$$\mathcal{E} = \{T \in E^2 : \mathrm{d}(T, F_1) + \mathrm{d}(T, F_2) = 2a\}.$$

Točke F_1, F_2 zovu se žarišta ili fokusi elipse.



Izvod kanonske jednadžbe elipse

Postavimo sustav tako da fokusi leže na x-osi, a polovište dužine F_1F_2 bude ishodište:

$$F_1 = (-e, 0), \qquad F_2 = (e, 0).$$

Za proizvoljnu točku elipse $T = (x, y)$ vrijedi

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Pomnožimo jednadžbu s izrazom

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.$$

Dobivamo

$$\left((x+e)^2 + y^2\right) - \left((x-e)^2 + y^2\right) = 2a\left(\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\right).$$

Slijedi

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \frac{2ex}{a}. \tag{3.4}$$

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo

$$2\sqrt{(x+e)^2 + y^2} = 2a + \frac{2ex}{a}.$$

Izvod kanonske jednadžbe elipse

Dakle,

$$(x+e)^2 + y^2 = \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2.$$

Sada je

$$x^2 + 2ex + e^2 + y^2 = a^2 + 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2}.$$

Sređivanjem dobijemo

$$\frac{a^2 - e^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - e^2.$$

Kako je $a > e$, vrijedi

$$a^2 - e^2 > 0.$$

Uvedimo oznaku

$$b^2 = a^2 - e^2.$$

Dobivamo $\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2$, tj.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (\triangle)$$

Pokažimo da vrijedi i obrat, tj. točke t.d. vrijedi $(\triangle)$ su točke elipse.

Obrat za jednadžbu elipse

Definirajmo

$$e^2 = a^2 - b^2, \qquad F_1 = (-e, 0), \qquad F_2 = (e, 0).$$

Neka je $T = (x, y)$ točka koja zadovoljava jednadžbu $(\triangle)$. Treba pokazati da je

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = 2a = \mathrm{konst.}$$

Vrijedi

$$d(T, F_1) = \sqrt{(x+e)^2 + y^2}, \qquad d(T, F_2) = \sqrt{(x-e)^2 + y^2},$$

pri čemu je

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Stoga je

$$\begin{aligned} d^2(T, F_1) &= (x+e)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ &= x^2 + 2ex + e^2 + b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Obrat za jednadžbu elipse

Kako je

$$b^2 = a^2 - e^2,$$

dobivamo

$$\begin{aligned} d^2(T, F_1) &= x^2 + 2ex + e^2 + b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} \\ &= x^2 + 2ex + a^2 - \frac{(a^2 - e^2)x^2}{a^2} \\ &= x^2 + 2ex + a^2 - x^2 + \frac{e^2x^2}{a^2} \\ &= a^2 + 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2} \\ &= \left(a + \frac{e}{a}x\right)^2. \end{aligned}$$

Analogno je

$$d^2(T, F_2) = \left(a - \frac{e}{a}x\right)^2.$$

Obrat za jednadžbu elipse

Iz toga slijedi

$$d(T, F_1) = \left| a + \frac{e}{a} x \right|, \qquad d(T, F_2) = \left| a - \frac{e}{a} x \right|.$$

Kako je $e \leq a$ i kako za apscisu x točke T mora vrijediti

$$-a \leq x \leq a,$$

(inače je $\frac{x^2}{a^2} > 1$), to je

$$d(T, F_1) = a + \frac{e}{a} x, \qquad d(T, F_2) = a - \frac{e}{a} x.$$

Zaključak obrata

Sada je

$$d(T, F_1) + d(T, F_2) = a + \frac{e}{a}x + a - \frac{e}{a}x = 2a.$$

Time je obrat pokazan.

Jednadžba ($\triangle$) naziva se kanonskom ili središnjom jednadžbom elipse (jer je centar elipse u ishodištu koordinatnog sustava).

Naglasimo još jednom da je za točke na elipsi uvijek

$$|x| \leq a.$$

Zaista, iz jednadžbe elipse (3.5) slijedi

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Analogno vrijedi i

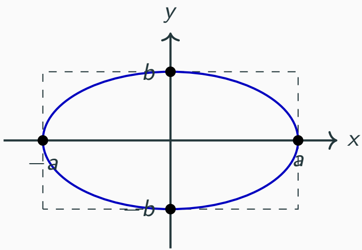
$$|y| \leq b.$$

Odavde zaključujemo da je elipsa ograničena krivulja.

Geometrijski elementi elipse

Sadržana je u pravokutniku

$$-a \leq x \leq a, \qquad -b \leq y \leq b.$$



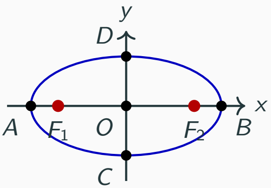
Geometrijski elementi elipse

Za elipsu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b > 0,$$

vrijedi:

- tjemena: $A = (-a, 0)$, $B = (a, 0)$, $C = (0, -b)$, $D = (0, b)$;
- glavna os: AB, duljine $2a$;
- sporedna os: CD, duljine $2b$;
- linearni ekscentricitet: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$;
- numerički ekscentricitet: $\varepsilon = \frac{e}{a}$, pri čemu je $0 < \varepsilon < 1$. Kada je ε blizu 0, veličine a i b su bliske, pa je elipsa bliska kružnici.



Npr. orbite planeta u Sunčevu sustavu, orbita elektrona u atomu.

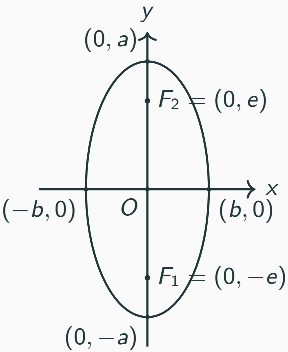
Napomena

Ako postavimo koordinatni sustav tako da fokusi određuju y-os tog sustava, tada je jednadžba takve elipse

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \qquad b < a.$$

U tom slučaju fokusi imaju koordinate

$$F_i = (0, \pm e), \qquad e^2 = a^2 - b^2.$$



Pravac i elipsa

Promotrimo elipsu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i pravac

$$y = kx + l.$$

Zajedničke točke pravca i elipse određujemo iz sustava

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + l. \end{cases}$$

Uvrštavanjem $y = kx + l$ u jednadžbu elipse dobivamo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx + l)^2}{b^2} = 1.$$

Množenjem s $a^2 b^2$ slijedi

$$b^2 x^2 + a^2 (kx + l)^2 = a^2 b^2.$$

Pravac i elipsa

Iz jednadžbe

$$b^2x^2 + a^2(kx + l)^2 = a^2b^2$$

dobivamo

$$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2klx + l^2) = a^2b^2.$$

Sređivanjem:

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2klx + a^2l^2 - a^2b^2 = 0.$$

Dakle, dobili smo kvadratnu jednadžbu

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 - b^2) = 0.$$

Broj zajedničkih točaka pravca i elipse ovisi o diskriminanti ove jednadžbe.

Uvjet tangencijalnosti elipse

Pravac $y = kx + l$ je tangenta elipse ako i samo ako prethodna kvadratna jednadžba ima jedno dvostruko rješenje, tj. ako je diskriminanta jednaka nuli.

Za jednadžbu

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2klx + a^2(l^2 - b^2) = 0$$

diskriminanta je

$$D = (2a^2kl)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)a^2(l^2 - b^2).$$

Uvjet tangencijalnosti je

$$D = (2a^2kl)^2 - 4(b^2 + a^2k^2)a^2(l^2 - b^2) = 0.$$

Dijeljenjem s $4a^2$:

$$a^2k^2l^2 - (b^2 + a^2k^2)(l^2 - b^2) = 0.$$

Uvjet tangencijalnosti elipse

Kraćenjem članova $a^2k^2l^2$ dobivamo

$$-b^2l^2 + b^4 + a^2b^2k^2 = 0.$$

Dijeljenjem s b^2 dobivamo

$$l^2 = b^2 + a^2k^2.$$

Dakle, pravac

$$y = kx + l$$

je tangenta elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ako i samo ako vrijedi

$$l^2 = a^2k^2 + b^2,$$

što zovemo uvjet dodira pravca i elipse.

Tangenta elipse u točki D_1

Odredimo jednadžbu tangente u točki elipse

$$D_1 = (x_1, y_1),$$

tj. u diralištu tangente.

Promatramo elipsu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

i pravac

$$y = kx + l.$$

Eliminiranjem y iz sustava dobivamo kvadratnu jednadžbu za x-koordinatu točke presjeka:

$$x^2(a^2k^2 + b^2) + 2kla^2x + a^2(l^2 - b^2) = 0. \qquad (\star)$$

Tangenta elipse u točki D_1

Rješenja jednadžbe $(\star)$ uz uvjet $D = 0$ su

$$x_1 = -\frac{ka^2}{l}, \qquad y_1 = \frac{b^2}{l}.$$

Uočimo da uvjet dodira povlači da je $l \neq 0$. Iz jednadžbi

$$x_1 = -\frac{ka^2}{l}, \qquad y_1 = \frac{b^2}{l}$$

određujemo koeficijent smjera k i odsječak l tražene tangente.

Iz druge jednadžbe slijedi

$$l = \frac{b^2}{y_1}.$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo

$$x_1 = -\frac{ka^2}{l} = -\frac{ka^2 y_1}{b^2}.$$

Dakle,

$$k = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \qquad l = \frac{b^2}{y_1}.$$

Jednadžba tangente elipse

Uvrštavanjem

$$k = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}, \qquad l = \frac{b^2}{y_1}$$

u jednadžbu pravca

$$y = kx + l$$

dobivamo

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}.$$

Množenjem s y_1:

$$y y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2} x + b^2.$$

Dijeljenjem s b^2 dobivamo

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Tangenta elipse u diralištu D_1

Dakle, jednadžba tangente elipse

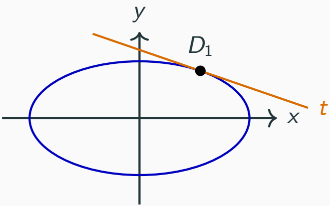
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

s diralištem u točki

$$D_1 = (x_1, y_1)$$

glasi

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$



Direktrisa elipse

Direktrisa ili ravnalica elipse je pravac p za koji vrijedi da je za svaku točku T elipse omjer udaljenosti od jednog žarišta elipse i od tog pravca konstantan realan broj $c > 0$, tj. vrijedi

$$\frac{d(T,F)}{d(T,p)} = c.$$

Uočimo, direktrisa ne smije sijeći elipsu.

Također, direktrisa mora biti okomita na veliku os elipse.

Nadalje, zbog simetrije elipse u odnosu na sporednu os, ako postoji jedna, onda postoje i dvije direktrise.

Slijedi da bi jednadžbe direktrisa trebale biti oblika

$$x = \pm x_0.$$

Odredimo $x_0 > 0$.

Direktrisa elipse

Uzmimo fokus

$$F = (e, 0)$$

i pravac p zadan jednadžbom

$$x = x_0.$$

Iz definicije direktrise, za točke

$$A = (-a, 0), \qquad B = (a, 0)$$

dobivamo

$$\frac{a+e}{a+x_0} = c = \frac{a-e}{x_0-a}.$$

Slijedi

$$(a+e)(x_0-a) = (a-e)(a+x_0),$$

pa je

$$2ex_0 = 2a^2.$$

Dakle,

$$x_0 = \frac{a^2}{e} = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Jednadžbe direktrisa elipse

Sada slijedi da je

$$c = \varepsilon.$$

Dakle, ukoliko postoje direktrise elipse, tada bi njihove jednadžbe trebale glasiti

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon}.$$

Sada se direktnom provjerom možemo uvjeriti da sve točke elipse zaista zadovoljavaju traženi uvjet, odnosno da direktrise elipse postoje, i to dvije, te da su njihove jednadžbe kao gore.

Pritom za fokus $F = (e, 0)$ treba uzeti direktrisu

$$x = \frac{a}{\varepsilon},$$

a za fokus $F = (-e, 0)$ direktrisu

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}.$$

Provjera uvjeta za direktrisu

Zaista, neka je T točka elipse i neka su njezine koordinate

$$T = \left(x, \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right).$$

Uzimamo kao fokus točku

$$F = (e, 0)$$

i direktrisu

$$x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Tada je

$$d(T, F) = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}.$$

Budući da je

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right),$$

dobivamo

$$d^2(T, F) = (x-e)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) = \cdots = \left(a - \frac{e}{a}x \right)^2.$$

Provjera uvjeta za direktrisu

Budući da je

$$\varepsilon = \frac{e}{a},$$

dobivamo

$$d(T, F) = a - \varepsilon x.$$

S druge strane, udaljenost točke $T = (x, y)$ od direktrise $x = \frac{a}{\varepsilon}$ je

$$d(T, p) = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Stoga je

$$\varepsilon d(T, p) = \varepsilon \left(\frac{a}{\varepsilon} - x \right) = a - \varepsilon x.$$

Dakle,

$$\frac{d(T, F)}{d(T, p)} = \varepsilon.$$

Pappus-Boškovićeva karakterizacija elipse

Vrijedi i obratno: ako točka T ravnine ispunjava uvjet

$$\frac{d(T,F)}{d(T,p)} = \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

tada je T točka elipse.

Zaista, neka točka $T = (x, y)$ zadovoljava taj uvjet.

Uzimamo fokus

$$F = (e, 0)$$

i direktrisu

$$p: \ x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Tada iz

$$d(T,F) = \varepsilon d(T,p)$$

dobivamo

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \varepsilon \left| \frac{a}{\varepsilon} - x \right|.$$

Pappus-Boškovićeva karakterizacija elipse

Kvadriranjem slijedi

$$(x-e)^2 + y^2 = \varepsilon^2 \left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right)^2,$$

tj.

$$(x-e)^2 + y^2 = a^2 - 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2,$$

pa je

$$x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = a^2 - 2a\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2.$$

Prebacivanjem svih članova na lijevu stranu dobivamo

$$x^2(1-\varepsilon^2) - 2x(a\varepsilon - e) + e^2 - a^2 + y^2 = 0.$$

Pappus-Boškovićeva karakterizacija elipse

Budući da je

$$\varepsilon = \frac{e}{a},$$

dobivamo

$$x^2(1-\varepsilon^2) + e^2 - a^2 + y^2 = 0.$$

Kako je

$$1-\varepsilon^2 = 1 - \frac{e^2}{a^2} = \frac{a^2-e^2}{a^2}, \quad b^2 = a^2 - e^2,$$

slijedi

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2 + y^2 = 0.$$

tj.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dakle, točka $T = (x, y)$ leži na elipsi.

Stoga uvjet

$$\frac{d(T,F)}{d(T,p)} = \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

karakterizira točke elipse.

Pappus-Boškovićeva karakterizacija elipse

Ta karakterizacija elipse poznata je kao Pappus-Boškovićeva definicija, odnosno karakterizacija elipse.

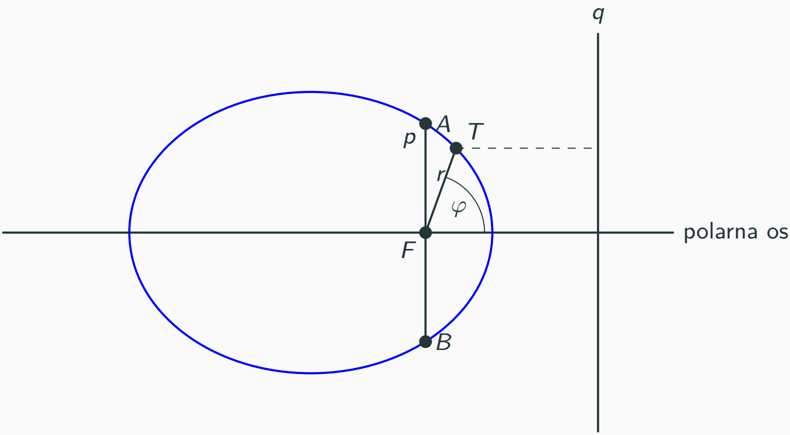
Teorem 21 (Pappus-Boškovićeva karakterizacija elipse)
Neka su zadani čvrsta točka F i čvrsti pravac p koji ne prolazi kroz F. Skup točaka T za koje vrijedi

$$\frac{d(T,F)}{d(T,p)} = \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

jest elipsa.

Polarna jednadžba elipse

Polazeći od Pappus-Boškovićeve karakterizacije elipse, izvedimo polarnu jednadžbu elipse.



Polarni sustav uvodimo tako da je fokus F elipse pol polarnog sustava, a polupravac s početkom u F okomit na direktrisu q polarna os.

Polarna jednadžba elipse

Promotrimo tetivu elipse koja prolazi fokusom i koja je paralelna s direktrisom. Označimo njezinu duljinu s $2p$, a točke koje ona odsijeca na elipsi s A, B.

Kako je A točka elipse, vrijedi

$$d(A,F) = \varepsilon d(A,q).$$

Neka je sada T neka točka elipse, a (r,φ) njezine polarne koordinate.

Također vrijedi

$$d(T,F) = \varepsilon d(T,q).$$

Prema tome

$$\begin{aligned} p &= d(A,F) \\ &= \varepsilon d(A,q) \\ &= \varepsilon\big(r\cos\varphi + d(T,q)\big) \\ &= \varepsilon r\cos\varphi + d(T,F) \\ &= \varepsilon r\cos\varphi + r. \end{aligned}$$

Polarna jednadžba elipse

Polarna jednadžba elipse glasi

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \tag{3.9}$$

Veličinu p nazivamo i parametrom elipse.

Zrcalno svojstvo elipse

Ako elipsu zamislimo kao zrcalo, tada vrijedi sljedeće zrcalno, odnosno optičko svojstvo elipse.

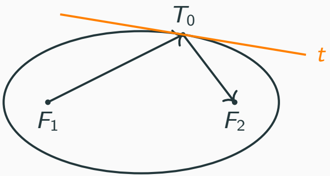
Teorem 22
Ako zraka svjetlosti izlazi iz jednog fokusa i reflektira se od elipse, tada reflektirana zraka prolazi drugim fokusom.

Odatle potječe naziv za fokuse, odnosno žarišta.

Zrcalno svojstvo elipse

Matematičkim rječnikom prethodni teorem izričemo na sljedeći način.

Teorem 23
Neka je T_0 točka elipse i neka je t tangenta elipse u točki T_0. Tada su kutovi koje zatvaraju spojnice F_1T_0, F_2T_0 s tangentom t jednaki.



Dokaz zrcalnog svojstva

Označimo

$$\measuredangle(F_1 T_0, t) = \alpha, \qquad \measuredangle(F_2 T_0, t) = \beta.$$

Treba pokazati

$$\alpha = \beta.$$

Kut između pravaca računamo po formuli za kut dvaju pravaca.

Ako je

$$T_0 = (x_0, y_0),$$

tada je koeficijent smjera tangente elipse u toj točki jednak

$$-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0},$$

a koeficijent smjera pravca $T_0 F_1$ jednak

$$\frac{y_0}{x_0 + e}.$$

Dokaz zrcalnog svojstva

Dobivamo

$$\text{tg } \alpha = \left| \frac{\dfrac{y_0}{x_0 + e} + \dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 - \dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 + e}} \right|.$$

Sređivanjem, koristeći

$$b^2 = a^2 - e^2$$

i činjenicu da je T_0 točka elipse, dobivamo

$$\text{tg } \alpha = \left| \frac{b^2}{y_0 e} \right|.$$

Slično dobivamo i

$$\text{tg } \beta = \left| \frac{b^2}{y_0 e} \right|.$$

Kako je

$$\alpha, \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

tvrdnja slijedi.

Korolari zrcalnog svojstva

Teorem možemo izreći i na sljedeći način.

Korolar 24
Neka je T_0 točka elipse i neka je n normala elipse u točki T_0. Tada su kutovi koje zatvaraju spojnice F_1T_0, F_2T_0 s normalom n jednaki.

Tada normala n raspolavlja unutrašnji kut između spojnica

$$F_1T_0, \qquad F_2T_0.$$

Korolar 25
Neka je T_0 točka elipse i neka je t tangenta elipse u točki T_0. Tada tangenta t raspolavlja vanjski kut između spojnica F_1T_0, F_2T_0.

Npr. *whispering galleries*.