Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

Klasična geometrija vektora

Duljina, smjer i orijentacija

Definicija

Duljina vektora $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ *definira se kao* $|\vec{a}| = |\overline{AB}|$.

Propozicija 5
Duljina vektora je dobro definirana, tj. ne ovisi o izboru predstavnika.

Dokaz. (DZ) **Napomena.** $|\vec{0}| = 0$, $|\vec{a}| > 0$, za sve $\vec{a} \neq 0$.

Definicija
Za vektore $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ *i* $\vec{b} = [\overrightarrow{CD}]$ *kažemo da su istog smjera ako je* $AB \parallel CD$. *Pišemo* $\vec{a} = \vec{b}$. *(Ovdje je* $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$.*)*

Propozicija 6

(a) *Relacija biti istog smjera ne ovisi o izboru predstavnika.*

(b) *Relacija biti istog smjera je relacija ekvivalencije na* V^2.

Duljina, smjer i orijentacija

Definicija
Klase ekvivalencije relacije "biti istog smjera" nazivamo smjerovima vektora.

Definicija
Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori istog smjera, te O, A, B kolinearne točke, takve da je

$$\vec{a} = [\overrightarrow{OA}] \qquad i \qquad \vec{b} = [\overrightarrow{OB}].$$

Kažemo da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ iste orijentacije ako su A i B s iste strane točke O, a suprotne orijentacije ako je O između A i B.

Propozicija 7
Definicija pojma orijentacije je dobra, tj. ne ovisi o izboru točke O.

Napomena. Vektor je jedinstveno određen svojim duljinom, smjerom i orijentacijom.

Napomena. Suprotni vektori imaju istu duljinu i smjer, ali suprotnu orijentaciju.

Množenje vektora skalarom

Definicija

Za vektor $\vec{a}$ *i skalar* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *definiramo vektor* $\alpha\vec{a}$ *na sljedeći način:*

(1) *Duljina od* $\alpha\vec{a}$ *je* $|\alpha|\,|\vec{a}|$.

(2) *Smjer od* $\alpha\vec{a}$ *je isti kao smjer od* $\vec{a}$.

(3) *Ako je* $\alpha > 0$, *onda su* $\alpha\vec{a}$ *i* $\vec{a}$ *iste orijentacije. Ako je* $\alpha < 0$, *onda su* $\alpha\vec{a}$ *i* $\vec{a}$ *suprotne orijentacije.*

Također, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Množenje vektora skalarom

Teorem 8
Množenje vektora skalarom ima ova svojstva:

1. **Kvaziasocijativnost:**

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall \vec{a} \in V^2) \quad \alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}.$$

2. **Postojanje jedinice:**

$$(\forall \vec{a} \in V^2) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

3. **Distributivnost prema zbrajanju vektora:**

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

4. **Distributivnost prema zbrajanju skalara:**

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall \vec{a} \in V^2) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

Korolar 9
Skup svih vektora V^2, s obzirom na operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, čini jedan vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

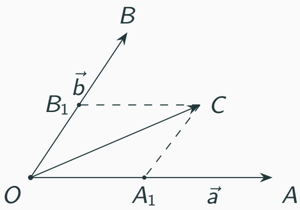
Množenje vektora skalarom

Napomena. Sada možemo uvesti standardne pojmove linearne algebre: nezavisan skup vektora, skup ravnina, bazu prostora, dimenziju...

Propozicija 10
Vekt. prostor $(V^2, +, \cdot)$ *je dvodimenzionalan:*

Skica dokaza. Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ proizvoljni nekolinearni vektori, te $\vec{c} \in V^2$ proizv.

Neka $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$, $\vec{c} = [\overrightarrow{OC}]$.



Kroz C povučemo paralele s OA i OB, B_1, A_1 presjeci s OB i OA. Sada je:

$$[\overrightarrow{OA_1}] = \alpha[\overrightarrow{OA}], \quad \text{za neki } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$[\overrightarrow{OB_1}] = \beta[\overrightarrow{OB}], \quad \text{za neki } \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{c} = [\overrightarrow{OC}] &= [\overrightarrow{OA_1}] + [\overrightarrow{OB_1}] \\ &= \alpha[\overrightarrow{OA}] + \beta[\overrightarrow{OB}] = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \end{aligned}$$

Množenje vektora skalarom

Napomena. Kada fiksiramo bazu vektorskog prostora, možemo uvesti koordinatizaciju.

Svaki vektor $\vec{c}$ može se na jedinstven način prikazati u obliku

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Stoga možemo poistovjetiti $\vec{c} = (\alpha, \beta)$.

Posebno su pogodne ortonormirane baze.

Da njih uvedemo, trebamo prvo pojam skalarnog produkta.

Skalarni produkt

Definicija
Neka $\vec{a}, \vec{b} \in V^2 \setminus \{\vec{0}\}$*, te* $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$*,* $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$*.*

Kut između vektora $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *je*

$$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) := \measuredangle AOB \in [0, \pi]$$

(*neorijentirani kut,* $\measuredangle(\vec{b}, \vec{a}) = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$).

Ako je

$$\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$$

kažemo da su $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *okomiti i pišemo*

$$\vec{a} \perp \vec{b}.$$

Napomena. Kut ne ovisi o izboru reprezentanta (kutevi s paralelnim kracima su isti).

Skalarni produkt

Definicija
Neka je

$$u : V^2 \times V^2 \to \mathbb{R}$$

preslikavanje dano sa:

(1) $u(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, *ako je* $\vec{a} = \vec{0}$ *ili* $\vec{b} = \vec{0}$,
(2) $u(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, *ako* $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Broj $u(\vec{a}, \vec{b})$ *zovemo* *skalarni produkt* *vektora* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *i označavamo sa*

$$u(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Propozicija 11

(a) *Neka* $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. *Tada*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

(b)

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Dokaz.
Tvrdnja slijedi iz definicije skalarnog produkta. □

Lema 12

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Napomena. Iz leme slijedi:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \vec{b}$$

Skalarni produkt

Teorem 13
Skalarni produkt ima sljedeća svojstva:

(1) *komutativnost:*

$$(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2) \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

(2) *kvaziasocijativnost:*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2) \qquad (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

(3) *distributivnost prema zbrajanju:*

$$(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2) \qquad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},$$

(4) *pozitivna definitnost:*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$.

Skalarni produkt

Dokaz.

(1) Direktno iz definicije skalarnog produkta i $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \measuredangle(\vec{b}, \vec{a})$.

(2) Ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, onda su obje strane jednake 0.
Neka je dalje $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Slučaj 1: $\lambda > 0$

$$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\measuredangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Slučaj 2: $\lambda < 0$

$$\measuredangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}), \qquad |\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|.$$

Zato

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\measuredangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) \\ &= (-\lambda)|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\big(\pi - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})\big) \\ &= \lambda|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}).\end{aligned}$$

(3) Promotrimo izraz:

$$2\cdot 2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \big(2\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\big)\cdot\big(2\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\big) - 2\vec{a}\cdot 2\vec{a} - (\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c}).$$

Iz leme 12 i napomene dobijemo:

$$\begin{aligned}
4\,\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) &= \big(2\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\big)\cdot\big(2\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})\big) - 4\vec{a}\vec{a} \\
&\quad - (2\vec{b}\vec{b}+2\vec{c}\vec{c}-(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})) \\
&= \big((\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{c})\big)\cdot\big((\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{c})\big) - 4\vec{a}\vec{a} \\
&\quad - (2\vec{b}\vec{b}+2\vec{c}\vec{c}-((\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{c}))\cdot((\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{c})) \\
&= \big((\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{c})\big)\cdot\big((\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}+\vec{c})\big) \\
&\quad + (\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{c}))\cdot((\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\vec{c}) \\
&\quad - 4\vec{a}\vec{a} - 2\vec{b}\vec{b} - 2\vec{c}\vec{c} \\
&= 4\,\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\,\vec{a}\cdot\vec{c},
\end{aligned}$$

pa dijeljenjem s 4 slijedi

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Skalarni produkt

(4) Slijedi iz svojstva

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $|\vec{a}| = 0$, tj. $\vec{a} = \vec{0}$.

$\square$

Skalarni produkt

Definicija
Neka su $\vec{i}, \vec{j}$ vektori za koje vrijedi

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1 \qquad i \qquad \vec{i} \perp \vec{j}.$$

Tada je

$$B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$$

ortonormirana baza za V^2.

Ako je

$$\vec{c} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j},$$

kažemo da su α i β koordinate vektora $\vec{c}$ u bazi B i pišemo

$$\vec{c} = (\alpha, \beta).$$

Napomena. Lako vidimo da je ortonormirana baza doista baza za V^2.

Skalarni produkt

Propozicija 14
Neka su

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2), \qquad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2)$$

proizvoljni vektori u V^2.

Tada:

(1)
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2.$$

(2)
$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

(3) *Za* $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ *je*

$$\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}.$$

Dokaz.

(1)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j})\cdot(\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}) \stackrel{[\mathrm{TM13}]}{=} \alpha_1\beta_1\,\vec{i}\cdot\vec{i}+\alpha_1\beta_2\,\vec{i}\cdot\vec{j}+\alpha_2\beta_1\,\vec{j}\cdot\vec{i}+\alpha_2\beta_2\,\vec{j}\cdot\vec{j}$$

$$= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2.$$

(2) Direktno iz (1) i *Prop.*11(b).

(3) Direktno iz

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}),$$

te (1) i (2).

□

Napomena.

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2 = 0.$$

Vektori u trodimenzionalnom prostoru

Kao što smo razvili aksiomatiku ravninske geometrije, moguće je razviti aksiomatiku prostorne geometrije.

Uz točke i pravce, novi objekti su ravnine te dodajemo još četiri aksioma incidencije:

(I4) Za svake 3 točke koje ne leže na istom pravcu, postoji jedinstvena ravnina koja ih sadrži.

(I5) Ako točke A, B leže u ravnini, onda svaka točka pravca AB leži u istoj toj ravnini.

(I6) Ako točka A leži u ravninama π_1 i π_2, onda postoji još barem jedna točka $B \in \pi_1 \cap \pi_2$.

(I7) Postoje barem 4 točke koje ne leže u istoj ravnini.

Vektori u trodimenzionalnom prostoru

Važna razlika u odnosu na $2D$ je u definiciji paralelnosti pravaca.

Definicija
Pravci su paralelni ako pripadaju istoj ravnini i ne sijeku se

.

Pravci koji ne pripadaju istoj ravnini su mimoilazni.

DZ. Dokaz da je relacija "biti paralelan" relacija ekvivalencije.

Sada možemo proširiti svu razvijenu teoriju na $3D$, uvesti tetraedre, kocke, sfere itd.

Zasad nas zanimaju samo vektori.

Možemo posve analogno definirati smjer, duljine i vektore te zbrajanje vektora, množenje vektora skalarom i skalarni produkt.

Jedina razlika u odnosu na $2D$ nastupa kad uvedemo koordinatizaciju jer je $(V^3, +, \cdot)$ 3D-vekt. prostor.

Vektori u trodimenzionalnom prostoru

Definicija
Neka su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektori u V^3 takvi da je

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \qquad i \qquad \vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k}.$$

Tada je

$$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

ortonormirana baza za V^3.

Ako je

$$\vec{c} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k},$$

pišemo

$$\vec{c} = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Propozicija 15
Neka su

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \qquad i \qquad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

proizvoljni vektori u V^3*.*

Tada:

(1)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

(2)

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2},$$

(3) *za* $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ *je*

$$\cos\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\,\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

Definicija
Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako imaju isti smjer.

(Uočimo: paralelnost iz definicije smjera je sada u $3D$.)

Napomena.

$$\vec{a} = [\overrightarrow{OA}], \vec{b} = [\overrightarrow{OB}] \text{ su kolinearni } \iff \vec{a}, \vec{b} \text{ su lin. zavisni}$$

$$\iff \exists\, \alpha, \beta \neq 0 \text{ t.d. } \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

$$\iff O, A, B \text{ leže na istom pravcu.}$$

Vektori u trodimenzionalnom prostoru

Definicija
Vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ je paralelan s ravninom π ako je pravac AB paralelan s π (a to znači da u π postoji pravac p takav da je $p \parallel AB$).

Definicija
Skup vektora $S \subseteq V^3$ je komplanaran ako postoji ravnina π s kojom su paralelni svi vektori iz S.

Napomena. Za proizvoljne $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ je $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ komplanaran.

Ako je

$$\vec{a} = [\overrightarrow{OA}], \qquad \vec{b} = [\overrightarrow{OB}],$$

onda je π ravnina kroz O, A, B.

Teorem 16

(a) *Neka su* $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ *nekolinearni vektori.*
Vektor $\vec{c} \in V^3$ *je komplanaran s* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *ako i samo ako postoje jedinstveni* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *takvi da*

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

(b) *Neka su* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ *nekomplanarni vektori.*
Za proizvoljni vektor $\vec{d} \in V^3$ *postoje jedinstveni* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *takvi da*

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Vektorski produkt

Definicija
Preslikavanje

$$v : V^3 \times V^3 \to V^3$$

definiramo na sljedeći način. Za $\vec{c} = v(\vec{a}, \vec{b})$ *vrijedi*

(1) *ako su* $\vec{a}, \vec{b}$ *kolinearni, onda je* $\vec{c} = \vec{0}$*,*

(2) *ako* $\vec{a}$ *i* $\vec{b}$ *nisu kolinearni, onda:*

(a) *duljina:*

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

(b) *smjer od* $\vec{c}$ *je određen zahtjevima*

$$\vec{c} \perp \vec{a} \qquad i \qquad \vec{c} \perp \vec{b},$$

(c) *orijentacija od* $\vec{c}$ *je tako uređena da trojka* $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *predstavlja desnu bazu u* V^3*.*
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ *desna baza = palac u smjeru* $\vec{a}$*, kažiprst u smjeru* $\vec{b}$*, srednji prst u smjeru* $\vec{c}$*.*

Pišemo $v(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$*.*

Napomena. Ne postoji analogon vektorskog produkta u V^2 niti u bilo kojoj višoj dimenziji.

Definicija
Neka su dani različiti pravci p i q u ravnini. Iz svake točke pravca p možemo spustiti jedinstvenu okomicu na pravac q.

Ortogonalna projekcija je funkcija $f : p \to q$ takva da za svaku točku $P \in p$ vrijedi

$$f(P) = Q,$$

gdje je Q nožište okomice iz P na q.

Vektorski produkt

Teorem 17

Vektorski produkt ima sljedeća svojstva:

(1) *antikomutativnost:*

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}), \qquad \vec{a}, \vec{b} \in V^3$$

(2) *kvaziasocijativnost:*

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \qquad \vec{a}, \vec{b} \in V^3,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) *distributivnost:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}), \qquad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$$

(4)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{a})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a},$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c},$$

pa vektorski produkt nije asocijativan.

(5) *vrijedi Jacobijev identitet:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Vektorski produkt

Dokaz.

(1) Očito $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$ imaju istu duljinu i smjer, a suprotnu orijentaciju.

(2) Ako je $\lambda = 0$, trivijalno.
Ako je $\lambda > 0$, tada je $\measuredangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, pa je

$$
\begin{aligned}
|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| &= |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\measuredangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \\
&= \lambda|\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|.
\end{aligned}
$$

Smjer od $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$: okomit na $\lambda\vec{a}$ i na $\vec{b}$, dakle isti kao smjer od $\vec{a} \times \vec{b}$, pa i kao smjer od $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
Orijentacija od $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$: ista kao orijent. $\vec{a} \times \vec{b}$, tj. kao $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.
Ako je $\lambda < 0$, tada je $\measuredangle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$, pa je

$$
\begin{aligned}
|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| &= |\lambda\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin(\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})) = (-\lambda)|\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\angle(\vec{a}, \vec{b}) \\
&= |\lambda|\,|\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|.
\end{aligned}
$$

Smjer je kao gore, a orijentacija od $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ je suprotna od orijentacije $\vec{a} \times \vec{b}$, što je isto kao orijentacija od $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Vektorski produkt

(3) Ako je bilo koji od $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nul-vektor, tvrdnja je trivijalna.
Pretpostavimo dakle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$.
Neka je $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$, $\varphi = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$.
Neka je π ravnina kroz O, okomita na $\vec{a}$, te Q ortogonalna projekcija od B na π.
Iz $\triangle OBQ$ imamo

$$|OQ| = |\vec{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\vec{b}| \sin\varphi.$$

Neka je $X \in \pi$ točka za koju vrijedi:

(1) $|OX| = |OQ|$,
(2) $\overrightarrow{OX} \perp \overrightarrow{OQ}$,
(3) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OX})$ je desna baza.

Uočimo, $\overrightarrow{OX}$ dobivamo rotacijom OB za $\frac{\pi}{2}$.
Neka je $Y \in \pi$ točka sa svojstvom

$$\overrightarrow{OY} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{OX}.$$

Vektorski produkt

Tada je:

(1)
$$|\overrightarrow{OY}| = |\vec{a}|\,|\overrightarrow{OX}| = |\vec{a}|\,|OQ| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}\times\vec{b}|,$$

(2) $\overrightarrow{OY} \perp \vec{a}$, $\quad \overrightarrow{OY} \perp \vec{b}$,
$$\text{jer } \overrightarrow{OQ} \parallel \vec{b},$$

(3) $(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{OY})$ je desna baza.

Dakle,
$$\overrightarrow{OY} = \vec{a}\times\vec{b}.$$

Stavimo $\vec{s} = \vec{b} + \vec{c} = [\overrightarrow{OS}]$.

Analogno provedemo konstrukciju za $\overrightarrow{OZ} = \vec{a}\times\vec{c}$ te $\overrightarrow{OR} = \vec{a}\times\vec{s}$.

Uočimo: reprezentanti vektora $\vec{b}, \vec{c}, \vec{s}$ čine trokut radi definicije vektorskog zbrajanja.

Nadalje, ortogonalna projekcija tog trokuta na ravninu je opet trokut.

Konačno, imamo množenje svih stranica trokuta s $|\vec{a}|$, što preslikava trokut u sličan trokut. Reprezentanti $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$ i $\vec{a}\times\vec{s}$ čine trokut, pa je
$$\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{s} = \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$$

(4) Preskačemo.

(5)
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a},$$
$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b}\vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c}\vec{a}) \cdot \vec{b},$$
$$(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = (\vec{c}\vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}.$$
$$\implies \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = 0.$$

Korolar 18

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a}, \vec{b}$ *kolinearni,*
2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$,
3. *Ako* $\vec{a}, \vec{b}$ *nisu kolinearni,* $|\vec{a} \times \vec{b}|$ *je površina paralelograma na stranicama* $\overrightarrow{OA}$ *i* $\overrightarrow{OB}$,
4. $\vec{a} \times (\lambda \vec{c}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{c}), \qquad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$.

Vektorski produkt

Napomena. Vektorski prostor zajedno s operacijom $\times$ za koju vrijede svojstva *Teorem*17.(2)(3), *Korolar*18.(4) zove se algebra.

Dodatno, algebra za koju vrijedi *Teorem*17.(5), *Korolar*18.(2) zove se Liejeva algebra.

Teorem 19
V sa vektorskim množenjem čini Lijevu algebru nad $\mathbb{R}$.

Napomena. Želimo izvesti formulu za koordinatni prikaz od $\vec{a} \times \vec{b}$.

Propozicija 20
Neka je

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \qquad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Tada:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2,\ \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3,\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

Vektorski produkt

Dokaz. Koristimo distributivnost, kvaziasocijativnost i antikomutativnost, te

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

pa je

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}) \times (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k})$$
$$= \alpha_1 \beta_2 \vec{k} - \alpha_1 \beta_3 \vec{j} - \alpha_2 \beta_1 \vec{k} + \alpha_2 \beta_3 \vec{i} + \alpha_3 \beta_1 \vec{j} - \alpha_3 \beta_2 \vec{i}$$
$$= (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \vec{i} + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \vec{j} + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \vec{k}.$$

Vektorski produkt

Napomena. Formulu je puno lakše pamtiti kao determinantu

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$