Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

Klasična geometrija vektora

Mješoviti produkt

Definicija
Neka je

$$m : V^3 \times V^3 \times V^3 \to \mathbb{R}$$

preslikavanje dano sa

$$m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Tada m zovemo mješovito ili vektorsko-skalarno množenje u V^3.

Pišemo

$$m(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

Mješoviti produkt

Propozicija 21

Mješoviti produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ *ako i samo ako su vektori* $\vec{a}, \vec{b}$ *i* $\vec{c}$ *komplanarni.*

Dokaz.

$\boxed{\Leftarrow}$

Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni.

Ako je bilo koji od njih $\vec{0}$, slijedi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Pretpostavimo da su svi različiti od 0.

Neka je $[\overrightarrow{OA}] = \vec{a}$, $[\overrightarrow{OB}] = \vec{b}$, te π ravnina kroz O, A, B. Tada je $\vec{c} = [\overrightarrow{OC}]$ za neku točku $C \in \pi$.

Slijedi da je

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \pi,$$

pa zbog $\vec{c} \in \pi$,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$

Tada je ili $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, pa su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, ili $\vec{c} = \vec{0}$ ili $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$, pa je $\vec{c}$ paralelan s ravninom koja sadrži O, A, B.

U svakom slučaju, vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni. $\square$

Mješoviti produkt

Propozicija 22
Neka su dani vektori

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \qquad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \qquad \vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Tada vrijedi:

(a)

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

(b)

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}).$$

(c)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Mješoviti produkt

Dokaz.

(a)
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$
$$= (\gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}) \cdot ((\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\vec{i} + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\vec{j} + (\alpha_1\beta_2 - \beta_2\alpha_1)\vec{k})$$
$$= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\gamma_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\gamma_2 + (\alpha_1\beta_2 - \beta_2\alpha_1)\gamma_3$$
$$= \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \overset{\text{paran broj zamjena redaka}}{=} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

(b) Zamjenom dva retka, determinanta mijenja predznak.

(c)
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}).$$

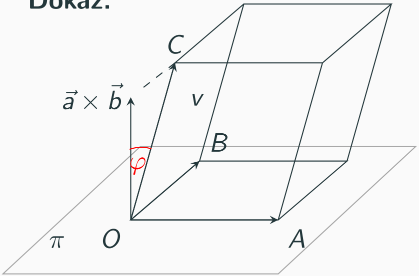
$\square$

Mješoviti produkt

Propozicija 23
Volumen paralelepipeda razapetog vektorima $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jednak je

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Dokaz.



Pretpostavimo da su $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ s iste strane ravnine OAB.
Neka je

$$\varphi = \measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$$

$$V = B \cdot h = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cos\varphi$$

$$= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Ako $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{c}$ s različitih strana OAB,

$$V = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

$\square$

Analitička geometrija

Uvod

- U vektorskim prostorima V^1, V^2, V^3 izborom baze dobili smo koordinatizaciju
- Sada želimo koordinatizaciju u euklidskim prostorima E^1 (euklidski pravac),E^2 (euklidska ravnina) i E^3 (euklidski trodimenzionalni prostor).
- Zadamo najprije točku O u E^1, E^2 ili E^3. Svakoj točki T pravca E^1, ravnine E^2 ili prostora E^3 možemo pridružiti jedinstvenu usmjerenu dužinu $\overrightarrow{OT}$ s početkom u O, a krajem u T.

  Definirajmo preslikavanje

  $$r\colon E^3 \to V^3(O), \qquad r(T) := [\overrightarrow{OT}],$$

  koje točki T pridružuje vektor $[\overrightarrow{OT}]$.

  Pišemo:

  $$\vec{r}_T = r(T) = \overrightarrow{OT}$$

  i kažemo da je $\vec{r}_T$ radijvektor pridružen točki T. Točku O zovemo ishodište.

  Analogno, s r ćemo označavati i preslikavanje s E^1, tj. E^2 u V^1 tj. V^2
- Uočimo, preslikavanje r je bijektivno.

Uvod

- Neka su u vektorskim prostorima $V^1(O)$, $V^2(O)$, $V^3(O)$ izabrane baze. Koordinate točke T definiramo kao koordinate radijvektora $\overrightarrow{OT}$ s obzirom na odabrane baze.
- Za $T \in E^1$ i odabranu bazu $\{\overrightarrow{OI}\}$ prostora $V^1(O)$, pripadni radijvektor $\overrightarrow{OT}$ možemo rastaviti na jedinstven način

$$\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{OI}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

  Kažemo da je x koordinata točke T, pišemo $T = (x)$ ili $T(x)$.
- Za $T \in E^2$ i odabranu bazu $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ prostora $V^2(O)$, pripadni radijvektor možemo rastaviti na jedinstven način

$$\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

  Uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zovemo koordinate točke T, pišemo $T = (x, y)$ ili $T(x, y)$.
  Ako je baza ortonormirana, koordinate zovemo pravokutnima. Skup $\{O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\}$ nazivamo pravokutnim ili Kartezijevim koordinatnim sustavom u E^2. Točku O nazivamo ishodištem, a pravce odredene točkama O, I, te O, J koordinatnim pravcima, tj. osi koord. sustava.

Uvod

- Za $T \in E^3$ i odabranu bazu $\{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\}$ prostora $V^3(O)$, pripadni radijvektor $\overrightarrow{OT}$ možemo rastaviti na jedinstven način

$$\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ} + z\overrightarrow{OK}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Uređenu trojku $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ zovemo koordinate točke T, pišemo $T = (x, y, z)$ ili $T(x, y, z)$.
Ako je baza ortonormirana, opet su koordinate pravokutne te skup $\{O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\}$ Kartezijev koordinatni sustav u E^3. Točka O je ishodište, pravci OI, OJ, OK koordinatni pravci, a ravnine OIJ, OJK, OIK koordinatne ravnine. Radijvektore $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}$, tj.

$$\vec{i} = [\overrightarrow{OI}], \qquad \vec{j} = [\overrightarrow{OJ}], \qquad \vec{k} = [\overrightarrow{OK}]$$

zovemo koordinatni vektori.

Uvod

Definicija
Preslikavanje $k : E^3 \to \mathbb{R}^3$ *dano sa*

$$T \mapsto \vec{r}_T = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \mapsto (x, y, z),$$

tj. $k(T) = (x, y, z)$, *je bijekcija i nazivamo ga koordinatizacija prostora* E^3.

Pišemo $T = (x, y, z)$ *ili* $T(x, y, z)$.

Propozicija 1
Neka su $A(x_A, y_A, z_A)$ *i* $B(x_B, y_B, z_B)$ *točke u* E^3 *dane svojim koordinatama u odnosu na neki koordinatni sustav.*

Tada vektor $[\overrightarrow{AB}]$ *u istom sustavu ima koordinate*

$$[\overrightarrow{AB}] = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A).$$

Uvod

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_A &= x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} = [\overrightarrow{OA}],\\
\vec{r}_B &= x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k} = [\overrightarrow{OB}]\\
[\overrightarrow{AB}] &= [\overrightarrow{AO}] + [\overrightarrow{OB}]\\
&= -[\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OB}]\\
&= -x_A\vec{i} - y_A\vec{j} - z_A\vec{k} + x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k}\\
&= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}\\
&= (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A).
\end{aligned}
$$

□

Analogno bi se dokazala tvrdnja za točke u E^2.

Propozicija 2
Za $A(x_A, y_A, z_A)$ *i* $B(x_B, y_B, z_B) \in E^3$ *vrijedi*

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Dokaz.

$$d(A,B) = |\overline{AB}| = |[\overrightarrow{AB}]| \stackrel{\text{Prop. 1}}{=} \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

$\square$

Analogno bi se dokazala tvrdnja za koordinate točke u E^2.

Pravac u E^2

U idućoj cjelini promatramo euklidsku ravninu E^2 s Kartezijevim koordinatnim sustavom $\{O; OI, OJ\}$.

Neka su zadani točka $T_0 \in E^2$ i vektor $\vec{s} \in V^2$, $\vec{s} \neq \vec{0}$. Tada postoji jedinstveni pravac p kroz točku T_0 paralelan vektoru $\vec{s}$ (Euklidov 5. aksiom). Kažemo da je vektor $\vec{s}$ vektor smjera pravca p.

Neka su koordinate točke T_0, vektora $\vec{s}$ i po volji odabrane točke T pravca p redom

$$T_0 = (x_0, y_0), \qquad \vec{s} = a\vec{i} + b\vec{j}, \qquad T = (x, y).$$

Kako je vektor $[\overrightarrow{T_0 T}]$ kolinearan s vektorom $\vec{s}$, postoji (jedinstveni) skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je

$$[\overrightarrow{T_0 T}] = \lambda \vec{s}.$$

Odavde je

$$[\overrightarrow{OT}] - [\overrightarrow{OT_0}] = \lambda \vec{s},$$

tj.

$$[\overrightarrow{OT}] = [\overrightarrow{OT_0}] + \lambda \vec{s}.$$

Često pišemo

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

pri čemu je $\vec{r} = [\overrightarrow{OT}]$, $\vec{r}_0 = [\overrightarrow{OT_0}]$.

Pravac u E^2

- Uočimo, pridruživanje točaka T pravca p i brojeva $\lambda \in \mathbb{R}$ je bijekcija.
- Jednadžbu (1) nazivamo parametarskim vektorskim oblikom jednadžbe pravca p.
- Raspisujući jednadžbu (1) po koordinatama, dobivamo

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

  tzv. parametarski koordinatni oblik jednadžbe pravca p.
- Ako je $a \neq 0$, tada iz prve jednadžbe iz (2) slijedi

$$\lambda = \frac{1}{a}(x - x_0),$$

  što uvršteno u drugu jednadžbu daje

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0). \tag{3}$$

  Prethodnu jednadžbu možemo pisati i u obliku

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \tag{4}$$

  što nazivamo kanonskim oblikom jednadžbe pravca p.

- Koeficijent $\frac{b}{a}$ iz jednadžbe (3) ima i geometrijsko značenje: jednak je tangensu kuta što ga pravac p određuje s pozitivnim dijelom x-osi,

$$tg\ \alpha = \frac{b}{a}.$$

- Uočimo: omjer koordinata iz različitih koordinatnih prikaza isti je za različite vektore smjera $\vec{s}$ pravca p (sličnost trokuta).
- Broj $\frac{b}{a}$ nazivamo koeficijent smjera (nagib) pravca p, oznaka k. Sada imamo jednadžbu pravca zadanog koeficijentom smjera k i točkom (x_0, y_0)

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{5}$$

- Uočimo, ako je $a = 0$, koeficijent smjera k nije definiran. Tada je $\vec{s} = (0, b)$, tj. pravac je paralelan s y-osi, a njegova jednadžba glasi

$$x = x_0.$$

- Ako je $b = 0$, tada je $\alpha = 0$, a koeficijent smjera $k = 0$. Takav je pravac paralelan s x-osi, a njegova jednadžba glasi

$$y = y_0.$$

Pravac u E^2

- Pravac možemo zadati i dvjema točkama $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$. Ako za vektor smjera uzmemo vektor

$$[\overrightarrow{T_1 T_2}] = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1),$$

dobivamo sljedeće jednadžbe pravca:
parametarski vektorski oblik

$$[\overrightarrow{OT}] = [\overrightarrow{OT_1}] + \lambda\big([\overrightarrow{OT_2}] - [\overrightarrow{OT_1}]\big), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

odnosno

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \qquad \lambda \in \mathbb{R};$$

te parametarski koordinatni oblik

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pravac u E^2

- Ako je $x_1 \neq x_2$, tada je koeficijent smjera pravca jednak
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$
te je opet neovisan o izboru točaka (sličnost trokuta).
- Sada je
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
jednadžba pravca određenog točkama T_1, T_2.
- Posebno, ako pravac presjeca x-os, tj. y-os u točkama $M = (m, 0)$, tj. $N = (0, n)$, $m, n \neq 0$, tada dobivamo **segmentni oblik** jednadžbe pravca (takav pravac ne prolazi ishodištem)
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$
Brojevi m, n nazivaju se odsječci (odresci, segmenti) na osima x i y.

Pravac u E^2

- Ako pravac presijeca y-os u točki $L = (0, l)$ i ima koeficijent smjera k, tada (5) prelazi u
$$y = kx + l \tag{6}$$
što se naziva eksplicitnim oblikom jednadžbe pravca. Broj l zove se odsječak (odrezak) na osi y.
- Pravcu umjesto vektora smjera možemo zadati i vektor normale $\vec{n} = (A, B)$ koji je okomit na vektor smjera.
Neka je $T_0 = (x_0, y_0)$ zadana točka pravca, $T = (x, y)$ po volji odabrana točka pravca. Tada je $[\overrightarrow{T_0 T}] = (x - x_0,\ y - y_0) \perp \vec{n}$ te je njihov skalarni produkt jednak 0. Slijedi:
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$
Iz prethodnog možemo uočiti da se jednadžba pravca u E^2 može napisati u obliku
$$Ax + By + C = 0, \tag{7}$$
gdje je $C = -(Ax_0 + By_0)$. Jednadžbu (2.7) nazivamo implicitnim ili općim oblikom jednadžbe pravca. Za razliku od eksplicitne jednadžbe pravca (6) njome su obuhvaćeni i pravci paralelni s y-osi.

Udaljenosti u E^2

Propozicija 3

Udaljenost točke $T_0 = (x_0, y_0)$ od pravca p zadanog jednadžbom $Ax + By + C = 0$ iznosi

$$d(T_0, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{8}$$

Dokaz.

Neka je N nožište okomice iz točke T_0 na pravac p te neka je $\vec{n} = (A, B)$ vektor normale pravca p. Uočimo, za svaku točku T na pravcu p vrijedi

$$[\overrightarrow{OT}] \cdot \vec{n} = -C.$$

Također,

$$[\overrightarrow{OT_0}] \cdot \vec{n} = (x_0, y_0) \cdot (A, B) = Ax_0 + By_0.$$

Vrijedi

$$d(T_0, p) = d(T_0, N) = |\overline{T_0N}| = \left|[\overrightarrow{T_0N}] \cdot \tfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{\left|([\overrightarrow{ON}] - [\overrightarrow{OT_0}]) \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{\left|[\overrightarrow{ON}] \cdot \vec{n} - [\overrightarrow{OT_0}] \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

□

Kut između dva pravca u E^2

- Neka su pravci p_1, p_2 zadani jednadžbama

$$y = k_1 x + l_1, \quad y = k_2 x + l_2. \tag{9}$$

(Radijanska) mjera kuta dvaju pravaca ima vrijednost u $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Koeficijenti smjera pravaca p_1, p_2 su tangensi kuteva φ_1, φ_2 koje pravci zatvaraju s pozitivnim dijelom x-osi

$$k_1 = tg\ \varphi_1, \quad k_2 = tg\ \varphi_2.$$

- Označemo mjeru kuta između pravaca p_1, p_2 s φ, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta je mjera jednaka $|\varphi_2 - \varphi_1|$ ili mjeri suplementarnog kuta te razlike. Kako je tangens kuta iz $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ nenegativan broj,

$$tg\ \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|. \tag{10}$$

- Uočimo, pravci su paralelni ako i samo ako je mjera kuta između njih jednaka 0, a to je ako i samo ako je

$$k_1 = k_2.$$

Kut između dva pravca u E^2

- Pravci su okomiti ako i samo ako je mjera kuta između njih jednaka $\frac{\pi}{2}$, a to je ako i samo ako je
$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$
Tada $tg\ \varphi$ nije definiran, odnosno, nazivnik izraza (10) jednak je 0.
- Mogli smo kut odrediti i kao kut vektora smjera $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ pravaca p_1, p_2. Mjera kuta dvaju pravaca jednaka je mjeri kuta što ga zatvaraju njihovi vektori smjera ili mjeri suplementarnog kuta, pa je
$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}. \tag{11}$$
Naime, vektori smjera su
$$\vec{s}_1 = (1, k_1), \quad \vec{s}_2 = (1, k_2).$$
Sada je
$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 1 + k_1 k_2, \qquad |\vec{s}_1| = \sqrt{1 + k_1^2}, \qquad |\vec{s}_2| = \sqrt{1 + k_2^2},$$
$$\cos\varphi = \frac{|1 + k_1 k_2|}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}, \qquad \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi)} = \frac{|k_2 - k_1|}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}},$$

Ravnina u E^3

- Neka je π proizvoljna ravnina u E^3 te T_0, T_1, T_2 nekolinearne točke u π. Označimo $\vec{a} = [\overrightarrow{T_0T_1}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{T_0T_2}]$. Očito, za bilo koju točku $T \in \pi$, vektori $[\overrightarrow{T_oT}]$, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su komplanarni, pa postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi
$$[\overrightarrow{T_0T}] = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$
Neka je O ishodište koordinatnog sustava u E^3. Tada:
$$[\overrightarrow{T_0T}] = \vec{r}_T - \vec{r}_{T_0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$
tj.
$$T \in \pi \iff \vec{r}_T = r_{T_0} + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \text{ za neke } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
- Dakle, postoji jedinstvena ravnina u E^3 koja prolazi točkom T_0 i paralelna je s dva nekolinearna vektora $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^3$.
Kažemo da je ravnina određena ili razapeta vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i točkom T_0. Ovaj oblik jednadžbe ravnine zovemo zovemo parametarski vektorski oblik jednadžbe ravnine π.
- Uočimo: za svaku točku ravnine skalari $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ jedinstveno su određeni.

Ravnina u E^3

- Ako su točke T, T_0 i vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ dani pravokutnim koordinatama

  $$T_0 = (x_0, y_0, z_0), \quad T = (x, y, z), \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3),$$

  ista jednadžba zapisana koordinatno glasi

  $$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1, \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2, \\ z &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{12}$$

  To je parametarski koordinatni oblik jednadžbe ravnine.
- Vektori $[\overrightarrow{T_0 T}]$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ su komplanarni ako i samo ako je njihov mješoviti produkt $([\overrightarrow{T_0 T}], \vec{a}, \vec{b})$ jednak 0, tj. akko

  $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

  pa dobivamo jednadžbu ravnine određene točkom T_0 i dvama nekolinearnim vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Ravnina u E^3

- Uz $\vec{a} = [\overrightarrow{T_0 T_1}] = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$, tj. $T_1(x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{T_0 T_2}] = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$, tj. $T_2(x_2, y_2, z_2)$, jednadžba prelazi u

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0, \tag{14}$$

  jednadžbu ravnine kroz tri točke.