Elementarna matematika 2

Vježbe

1 Planimetrija

1.1 Izometrije ravnine

Planimetrija je područje geometrije koje se bavi proučavanjem geometrijskih likova u ravnini i njihovih odnosa. Na ovom kolegiju ćemo se baviti euklidskom geometrijom. Podsjetimo se pet Euklidovih aksioma:

1. Dvije točke određuju segment pravca (dužinu).
2. Dužinu je moguće produžiti u beskonačnost (na oba njena kraja, čime se dobiva pravac).
3. Zadani segment pravca definira kružnicu (jedan kraj segmenta je središte, a duljina segmenta je polumjer).
4. Svi pravi kutovi su jednaki (kongruentni).
5. Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj kutova s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produže) sijeku.

Peti aksiom je ključan da bismo se bavili euklidskom geometrijom. Preciznije, u 19. stoljeću je pokazano da je peti aksiom nezavisan od ostalih te je moguće izgraditi teoriju geometrije u kojoj peti aksiom ne vrijedi. Takve geometrije nazivamo neeuklidske. Može se pokazati da su i takve geometrije konzistentne, to jest ne sadrže kontradikcije.

Napomena 1.1. *Peti aksiom je ekvivalentan sa sljedećim aksiomom:*
5.' Za dani pravac i točku koja nije na njemu, postoji točno jedan pravac kroz danu točku koji je paralelan s danim pravcem.

Definicija 1.2. *Neka je M Euklidska ravnina. Udaljenost $d : M \times M \to \mathbb{R}$ je funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $d(A, B) \geqslant 0$, *za sve točke A i B,*
2. $d(A, B) = 0$ *ako i samo ako je* $A = B$,
3. $d(A, B) = d(B, A)$, *za sve točke A i B,*
4. $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$, *za sve točke A, B i C.*

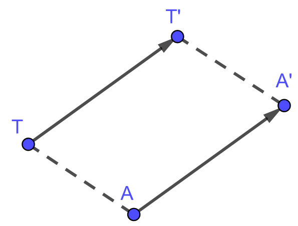
Definicija 1.3. *Izometrija $f : M \to M$ je funkcija koja je* ***bijekcija*** *i za koju vrijedi:*

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \text{ za sve točke } A \text{ i } B.$$

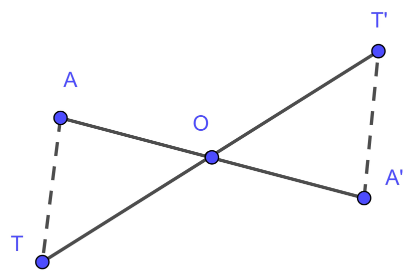
Primjer 1.4. *Može se pokazati da se svaka izometrija ravnine M može dobiti kao kompozicija sljedećih pet izometrija. Navest ćemo i njihove inverze iz čega zaključujemo da su navedene funkcije bijekcije. Ilustracije uz funkcije daju ideju kako pokazati da se radi o izometrijama.*

1. ***Identiteta***: $id : M \to M,\ id(T) = T$, *za svaku točku* $T \in M$. $id^{-1} = id$

2. ***Translacija za vektor*** $\vec{a}$: $t_{\vec{a}} : M \to M,\ t_{\vec{a}}(T) = T'$, *gdje je* $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$. $t_{\vec{a}}^{-1} = t_{-\vec{a}}$



3. ***Centralna simetrija obzirom na točku*** O: $s_O : M \to M,\ s_O(T) = T'$, *gdje je* O *polovište dužine* $\overline{TT'}$. $s_O^{-1} = s_O$

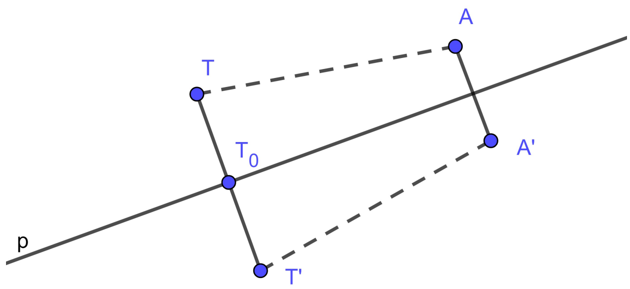


4. ***Osna simetrija obzirom na pravac*** p: $s_p : M \to M, s_p(T) = T'$ *tako da*

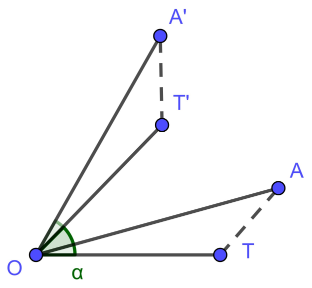
   (a) $T = T'$, *ako je* $T \in p$,

   (b) $TT' \perp p$ *i* $|TT_0| = |T_0T'|$ *za* $T_0 = p \cap TT'$.

   $s_p^{-1} = s_p$



5. ***Rotacija oko točke*** O ***za kut*** α: $r_{O,\alpha} : M \to M,\ r_{O,\alpha}(T) = T'$ *tako da je* $|OT| = |OT'|$ *i* $\measuredangle TOT' = \alpha$. *Za pozitivan kut podrazumijevamo rotaciju u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.* $r_{O,\alpha}^{-1} = r_{O,-\alpha}$



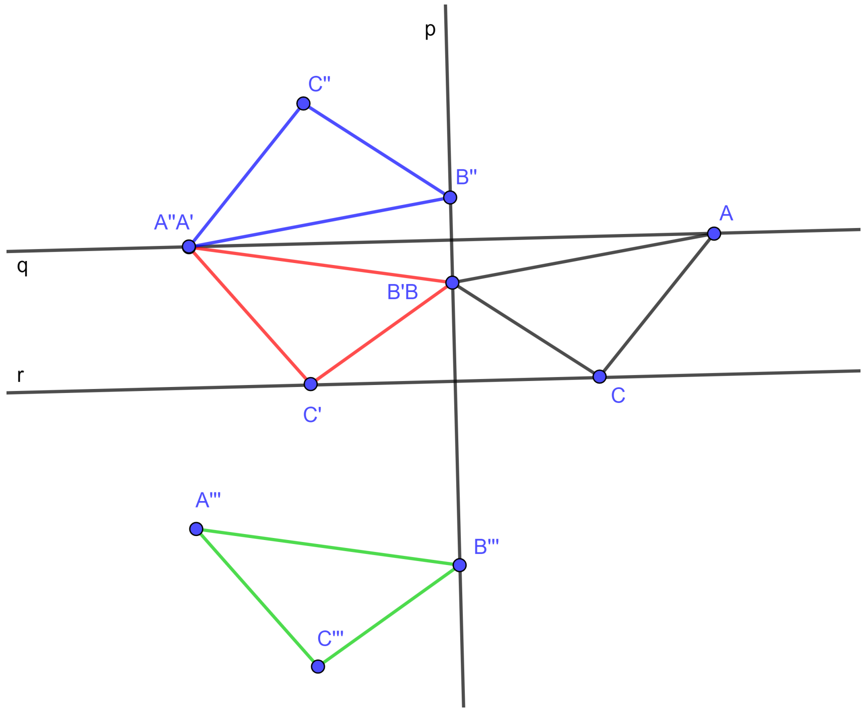
DZ 1.1. *Dokažite da je kompozicija dvije izometrije također izometrija. Dokažite da je inverzno preslikavanje izometrije također izometrija.*

Zadatak 1.5. *Dani su pravci p, q i r takvi da je $q \parallel r$, $p \perp q$ i točke $A \in q$, $B \in p$, $C \in r$ takve da $d(B, q) = d(B, r)$. Odredite sliku trokuta $\triangle ABC$ pri izometriji $f = s_r \circ s_q \circ s_p$.*

Rješenje. Uvedimo sljedeće oznake:

$$s_p : A, B, C \mapsto A', B', C', \;\; s_q : A', B', C' \mapsto A'', B'', C'', \;\; s_p : A'', B'', C'' \mapsto A''', B''', C'''.$$

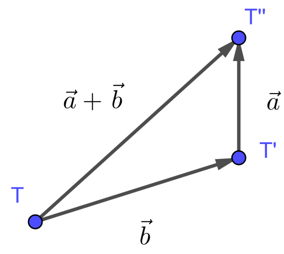
Tada je rješenje prikazano na sljedećoj slici:



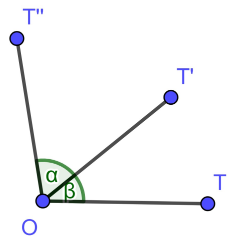
□

Zadatak 1.6. *Što je kompozicija translacija $t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}}$? Rotacija $r_{O,\alpha} \circ r_{O,\beta}$? Simetrija $s_p \circ s_q$?*

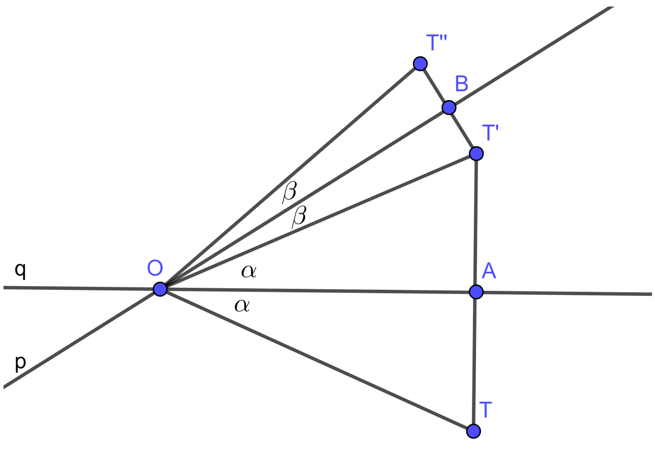
Rješenje. Kompozicija translacija $t_{\vec{a}} \circ t_{\vec{b}}$ je ponovno translacija za vektor $\vec{a} + \vec{b}$.



Kompozicija rotacija $r_{O,\alpha} \circ r_{O,\beta}$ je rotacija za kut $\alpha + \beta$.



Posebno, uočimo da su obje kompozicije komutativne. Kompozicija osnih simetrija općenito nije osna simetrija. Kao što vidimo na slici, ako se pravci p i q sijeku, kompozicija $s_p \circ s_q$ je rotacija oko njihovog sjecišta O za kut $\measuredangle TOs_p \circ s_q(T)$.



Uočimo da sljedeći račun pokazuje da kompozicija osnih simetrija općenito nije komutativna.

$$(s_p \circ s_q)(T) = r_{O,2(\alpha+\beta)}(T) \setminus \circ s_p, \circ s_q$$
$$T = (s_q \circ s_p)(r_{O,2(\alpha+\beta)}(T))$$
$$r_{O,-2(\alpha+\beta)}(T) = (s_q \circ s_p)(T)$$

□

DZ 1.2. *Pokažite da tvrdnja o kompoziciji osnih simetrija vrijedi i kada su točka T te pravci p i q u različitim pozicijama. Odredite čemu je kompozicija jednaka kada su pravci p i q paralelni.*

1.2 Sukladnost trokuta

Definicija 1.7. *Kažemo da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ sukladni ako postoji izometrija f tako da vrijedi $f(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'$. Ekvivalentno, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su sukladni ako se podudaraju u sve tri stranice i sva tri kuta, to jest*

$$|AB| = |A'B'|,\ |AC| = |A'C'|,\ |BC| = |B'C'|,$$

$$\measuredangle BAC = \measuredangle B'A'C',\ \measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C',\ \measuredangle BCA = \measuredangle B'C'A'.$$

Oznaka za sukladnost: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

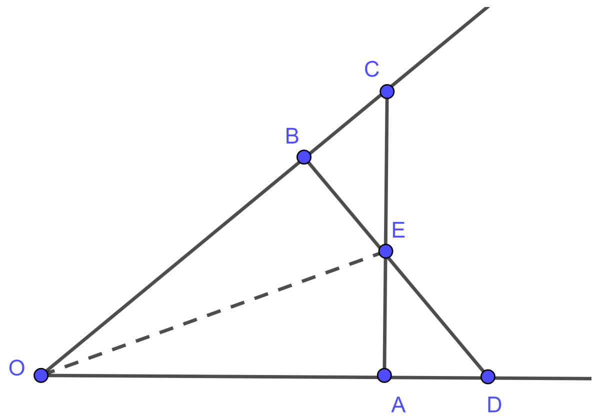
Teorem 1.8. ***(Sukladnost trokuta)***

1. ***SKS*** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut među njima.*
2. ***KSK*** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladni jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.*
3. ***SSS*** *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne sve tri stranice.*
4. ***SSK***$^{>}$ *Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut nasuprot veće od njih.*

Na predavanjima će se Teorem 1.8 dokazati, a na vježbama ga koristimo za rješavanje zadataka.

Zadatak 1.9. *Na krakovima kuta s vrhom O dane su točke A i B tako da je $|OA| = |OB|$. Okomice na pripadajuće krakove u točkama A i B sijeku suprotni krak u točkama C i D, a međusobno se sijeku u točki E. Dokažite $\triangle BCE \cong \triangle ADE$.*

Rješenje. Ideja je spojiti točke O i E jer tada dobivamo sukladne trokute $\triangle AOE$ i $\triangle BOE$. Naime, po SSK$^{>}$ poučku vidimo da sukladnost vrijedi jer $|OA| = |OB|$ po pretpostavci zadatka, $|OE|$ je zajednička stranica nasuprot najvećem kutu mjere $90^\circ = \measuredangle OAE = \measuredangle OBE$.



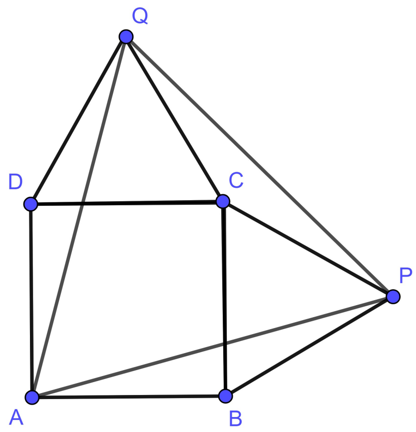
Iz $\triangle AOE \cong \triangle BOE$ slijedi $|AE| = |BE|$. Uočimo da u trokutima $\triangle EAD$ i $\triangle EBC$ imamo dva kuta uz stranice $\overline{AE}$ i $\overline{BE}$ istih mjera:

- $\measuredangle DAE = \measuredangle CBE = 90^\circ$,
- $\measuredangle DEA = \measuredangle CEB$ jer su vršni kutevi.

Dakle, $\triangle BCE \cong \triangle ADE$ po KSK poučku. $\square$

Zadatak 1.10. *Nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ konstruirani su jednakostranični trokuti $\triangle BPC$ i $\triangle DCQ$. Dokažite da je trokut $\triangle APQ$ jednakostraničan.*

Rješenje. Pokazat ćemo $|AP| = |AQ| = |PQ|$. Pokazat ćemo da su trokuti $\triangle ABP, \triangle PCQ$ i $\triangle QDA$ sukladni.



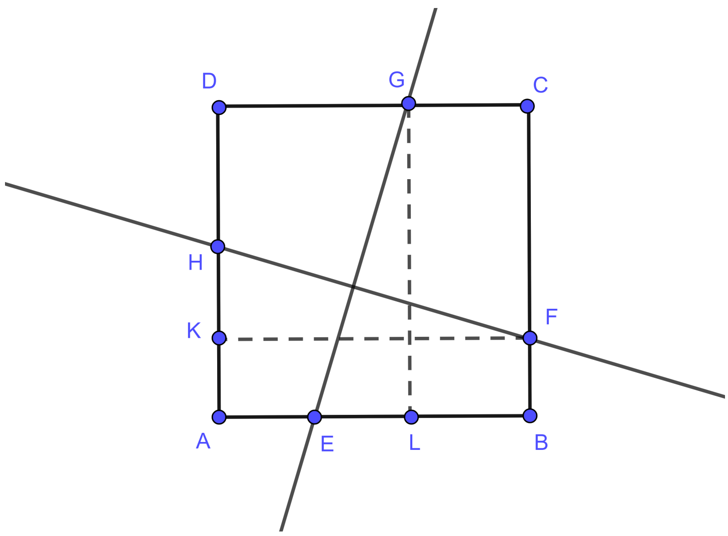
Označimo s a duljinu stranice kvadrata $ABCD$. Jer su trokuti $\triangle BCP$ i DCQ jednakostranični s po jednom stranicom na kvadratu, zaključujemo da su i preostale dvije stranice duljine a.

$$|AB| = |BP| = |PC| = |CQ| = |DQ| = |DA| = a$$

Uočimo da je za pokazati sukladnost $\triangle ABP \cong \triangle PCQ \cong \triangle QDA$, po SKS poučku, tada dovoljno pokazati $\measuredangle ABP = \measuredangle PCQ = \measuredangle QDA$. Imamo: $\measuredangle ABP = \measuredangle QDA = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ jer su to mjere unutarnjih kuteva u kvadratu i jednakostraničnom trokutu. Također, vrijedi: $\measuredangle PCQ = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$ pa slijedi tvrdnja zadatka. $\square$

Zadatak 1.11. *Dva okomita pravca sijeku stranice $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ kvadrata $ABCD$ redom u točkama E, F, G, H. Dokažite da je $|EG| = |HF|$.*

Rješenje. Kako bismo pokazali da su dužine $\overline{EG}$ i $\overline{HF}$ iste duljine, smjestit ćemo ih u dva sukladna trokuta.



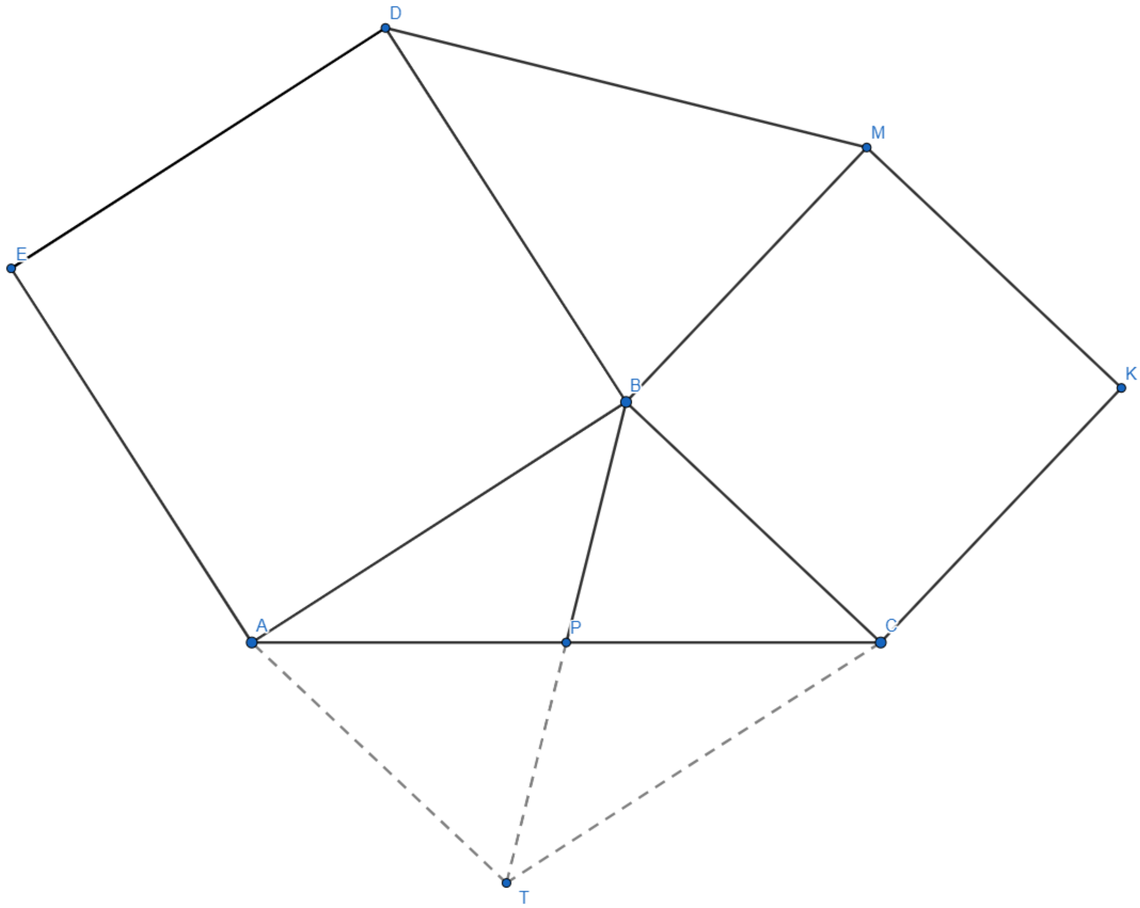
Spustimo okomice iz točaka G i F na nasuprotne stranice kvadrata $ABCD$ te nožišta redom označimo L i K. Uočimo da su trokuti $\triangle GLE$ i $\triangle FKH$ sukladni po KSK poučku:

- $|GL| = |FK|$ jer su četverokuti $GLBC$ i $FKAB$ pravokutnici pa su $\overline{GL}$ i $\overline{FK}$ iste duljine kao i stranica kvadrata $ABCD$.
- $\measuredangle GLE = \measuredangle FKH = 90^\circ$ po definiciji točaka L i K.
- $\measuredangle LGE = \measuredangle KFH$ jer su to kutevi s okomitim kracima $EG \perp HF$ i $GL \perp KF$ (raspisati kuteve).

$\square$

Zadatak 1.12. *Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Dokažite da je duljina dužine $\overline{DM}$ dva puta veća od duljine težišnice $\overline{BP}$ trokuta $\triangle ABC$.*

Rješenje. Neka je T točka na pravcu BP različita od B tako da $|BP| = |TP|$. Vrijedi: $\triangle APB \cong \triangle CPT$ jer je $|AP| = |PC|$, $|BP| = |PT|$ i $\measuredangle APB = \measuredangle TPC$ (vršni kutevi). Stoga je $|TC| = |AB| = c$.

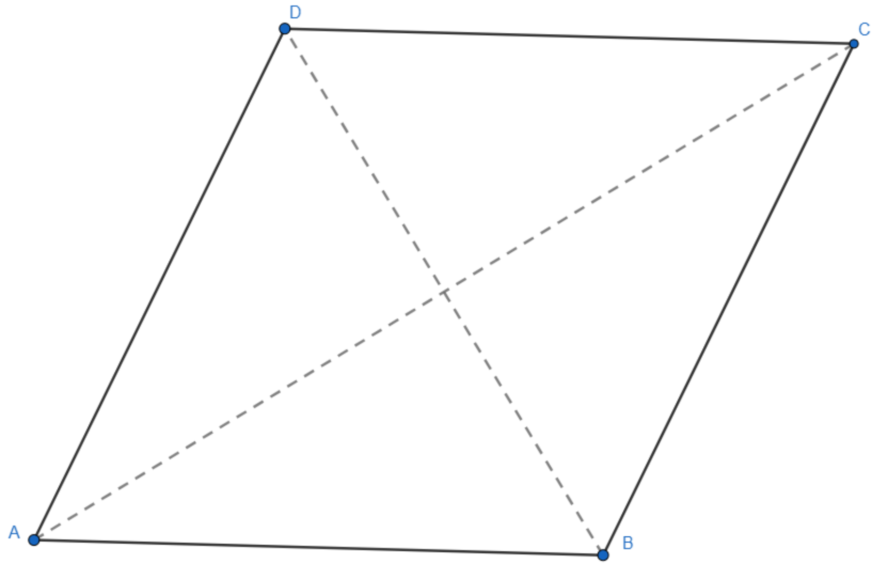


Znamo da je $|TC| = |BD| = c$ i $|BC| = |BM| = a$. Nadalje, pošto je četverokut $ABCT$ paralelogram, imamo $TC \parallel AB$ i $BD \perp AB$ iz čega slijedi $TC \perp BD$. Sada iz $TC \perp BD$ i $CB \perp BM$ zaključujemo i $\measuredangle BCT = \measuredangle MBD$ preko jednakosti kuteva na okomitim pravcima.

Po SKS teoremu tada imamo da je $\triangle BCT \cong \triangle MBD$ pa je $|DM| = |BT|$ odnosno $|DM| = 2|BP|$. $\square$

Zadatak 1.13. *U četverokutu $ABCD$ dijagonale raspolavljaju kuteve četverokuta. Dokažite da je taj četverokut romb, tj. da su sve četiri stranice jednake duljine.*

Rješenje. Iz uvjeta zadatka znamo da je $\measuredangle ADB = \measuredangle BDC$ i $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$.



Pošto trokuti ABD i BCD imaju zajedničku stranicu BD, po KSK poučku zakljucujemo $\triangle ABD \cong \triangle BCD$. Iz toga imamo $|AB| = |BC|$ i $|AD| = |DC|$.

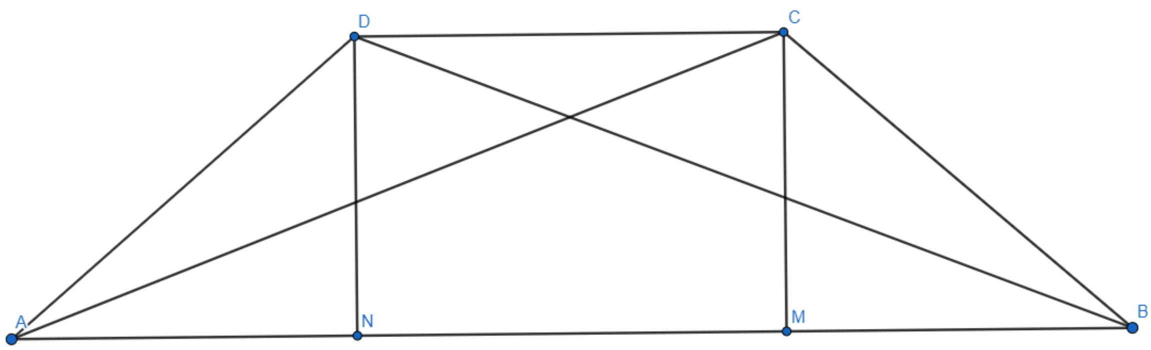
Analogno dobijemo $\triangle ACB \cong \triangle ACD$ pa je $|AD| = |AB|$. Dakle,

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA|.$$

□

Zadatak 1.14. *Dokažite da je trapez kojemu su dijagonale jednake duljine jednakokračan.*

Rješenje. Znamo da je $|AC| = |BD|$. Treba dokazati $|AD| = |BC|$. Neka su M i N nožišta visina iz vrhova C i D na AB.



Tada vrijedi $|DN| = |CM|$ (visina trapeza), $|AC| = |BD|$ i $\measuredangle AMC = \measuredangle BND = 90°$. Po SSK$^>$ poučku je tada $\triangle AMC \cong \triangle BND$ pa posebno $|AM| = |BN|$.

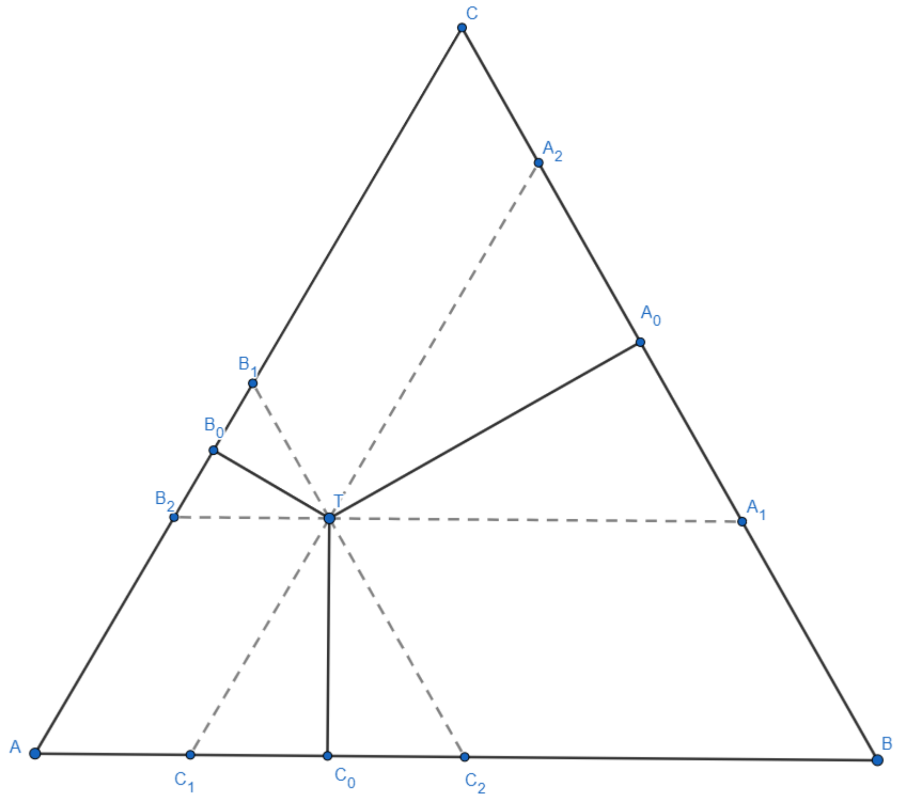
Sada je

$$|AN| = |AB| - |NB| = |AB| - |AM| = |BM|, \quad |DN| = |CM|, \quad \measuredangle AND = \measuredangle BMC = 90^\circ,$$

pa po SKS poučku zaključujemo $\triangle AND = \triangle BMC$ i $|AD| = |BC|$. □

Zadatak 1.15. *Dokažite da je zbroj udaljenosti bilo koje točke unutar jednakostraničnog trokuta do njegovih stranice konstantan i jednak duljini visine trokuta.*

Rješenje. (Prvo rješenje) : Povucimo kroz T paralele sa stranicama trokuta i označimo sjecišta kao na slici.



Primjetimo da je $\measuredangle B_1B_2T = \measuredangle B_2AC_1 = 60^\circ$ preko jednakosti kuteva s paralelnim kracima. Analogno se pokaže

$$\measuredangle B_2B_1T = \measuredangle TA_2A_1 = \measuredangle TA_1A_2 = \measuredangle TC_1C_2 = \measuredangle C_1C_2T = 60^\circ.$$

Stoga su trokuti $\triangle B_1TB_2, \triangle A_1TA_2$ i $\triangle C_1TC_2$ jednakostranični, a TA_0, TB_0 i TC_0 njihove visine. Tada imamo

$$|TA_0| + |TB_0| + |TC_0| = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(|TA_1| + |TB_2| + |C_1C_2|\Big).$$

Kako su četverokuti AC_1TB_2, BA_1TC_2 i CB_1TA_2 paralelogrami, imamo $|TA_1| = |BC_2|$ i $|TB_2| = |C_1A|$ pa je

$$|TA_0| + |TB_0| + |TC_0| = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(|BC_2| + |C_1A| + |C_1C_2|\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|\,,$$

što odgovara duljini visine trokuta $\triangle ABC$. $\square$

Rješenje. (Drugo rješenje) : Neka je a duljina stranice, a v duljina visine jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$. Uz oznake kao u prethodnom rješenju imamo :

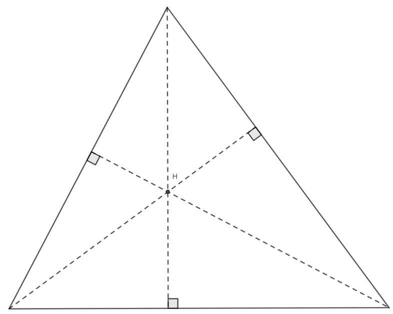
$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(ABT) + P(BCT) + P(CAT) \\ \frac{a \cdot v}{2} &= \frac{a \cdot |TC_0|}{2} + \frac{a \cdot |TA_0|}{2} + \frac{a \cdot |TB_0|}{2} \end{aligned}$$

Iz čega slijedi $|TA_0| + |TB_0| + |TC_0| = v$ što smo i trebali dokazati. $\square$

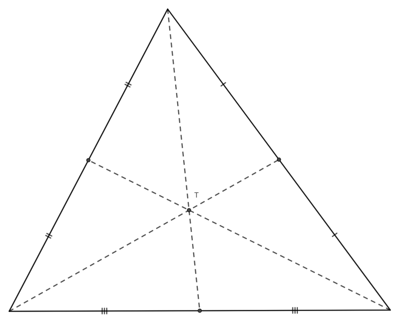
1.3 Karakteristične točke trokuta

Definicija 1.16. ***(Karakteristične točke trokuta)***

1. ***Ortocentar*** *H trokuta je sjecište visina trokuta.*

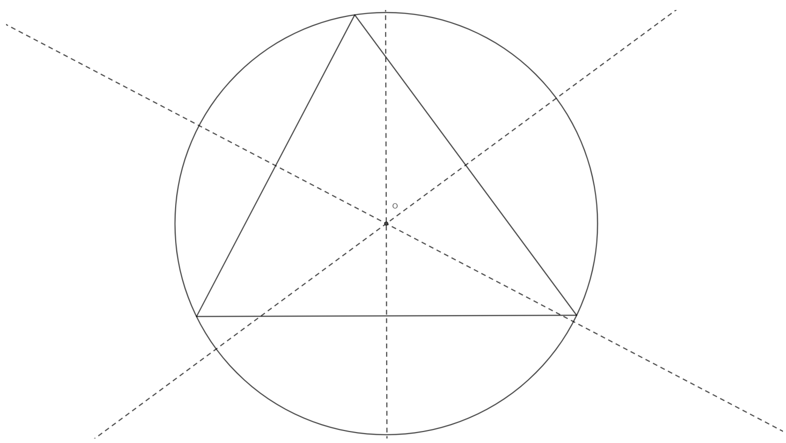


2. ***Težište*** *T trokuta je sjecište težišnica trokuta.*



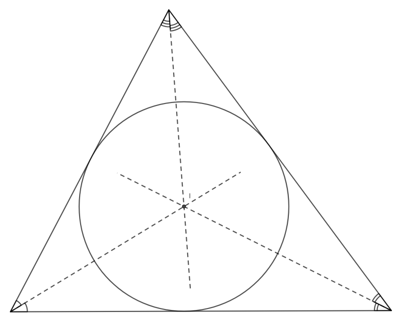
Napomena 1.17. *Težište trokuta dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$.*

3. ***Središte opisane kružnice*** *O trokuta je sjecište simetrala stranica trokuta.*



Napomena 1.18. *Za radijus R opisane kružnice trokuta vrijedi $R = \frac{abc}{4P}$, gdje je P površina trokuta. Nadalje, površinu trokuta možemo izračunati pomoću Heronove formule $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta.*

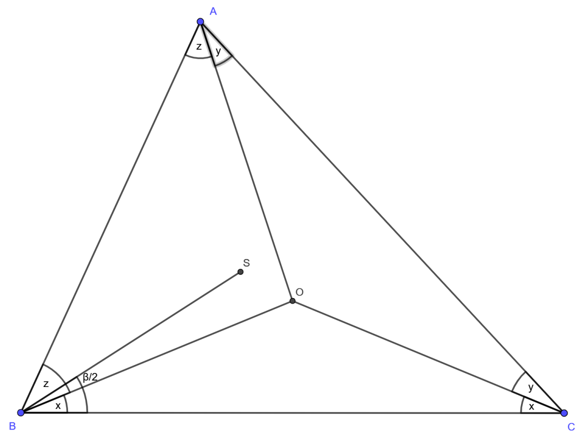
4. ***Središte upisane kružnice*** *I trokuta je sjecište simetrala unutarnjih kuteva trokuta.*



Napomena 1.19. *Za radijus r upisane kružnice trokuta vrijedi $r = \frac{P}{s}$, gdje je P površina, a s poluopseg trokuta.*

Zadatak 1.20. *Točke O i S su redom središta opisane i upisane kružnice trokuta $\triangle ABC$. Izrazite kut $\measuredangle OBS$ pomoću kuteva trokuta α, β i γ.*

Rješenje. Kako je S središte upisane kružnice trokuta, imamo da je BS simetrala kuta $\measuredangle ABC$. Zato je $\measuredangle CBS = \frac{\beta}{2}$.



Budući da je O središte opisane kružnice, imamo da su trokuti $\triangle OAB$, $\triangle OBC$ i $\triangle OAC$ jednakokračni. Iz toga slijedi da je $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = z$, $\measuredangle OBC = \measuredangle OCB = x$ i $\measuredangle OAC = \measuredangle OCA = y$. Nadalje, vrijedi sljedeći sustav jednadžbi :

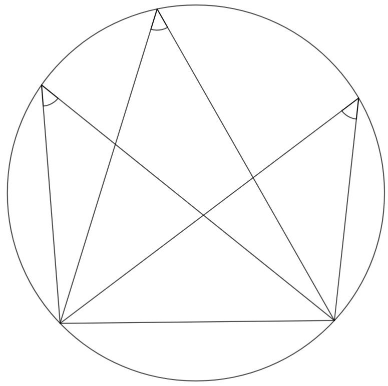
$$\begin{aligned} x + y &= \gamma \\ x + z &= \beta \\ y + z &= \alpha. \end{aligned}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobijemo $\measuredangle CBO = x = \frac{\beta+\alpha-\gamma}{2}$. Konačno imamo da je

$$\measuredangle OBS = |\measuredangle CBS - \measuredangle CBO| = \frac{|\alpha - \gamma|}{2}.$$

□

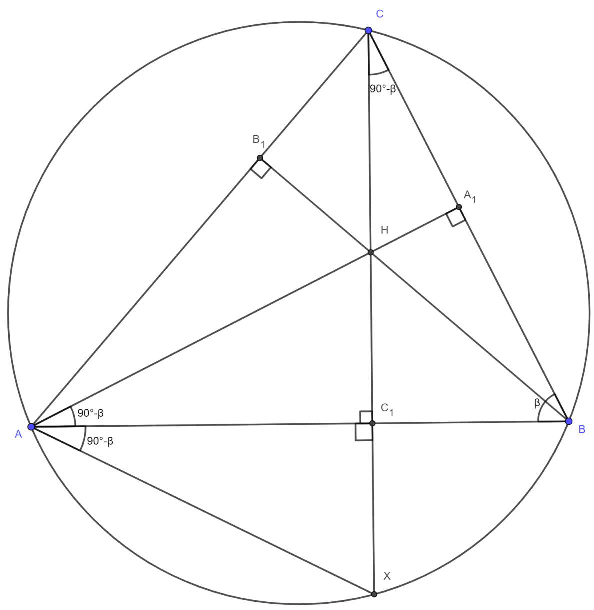
Teorem 1.21. *Obodni kutevi nad istim lukom kružnice su jednaki.*



Zadatak 1.22. *Dokažite da točke simetrične ortocentru obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.*

Rješenje. Neka je H ortocentar trokuta $\triangle ABC$ te A_1, B_1 i C_1 redom nožišta visina iz vrha A, B i C. Neka je točka X drugi presjek pravca CH i opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$.

Da bi dokazali da je točka X osnosimetrična slika točke H obzirom na AB dovoljno nam je dokazati da je $|XC_1| = |HC_1|$.



Imamo da je $\measuredangle XAC_1 = \measuredangle XAB = \measuredangle XCB$ jer su to obodni kutevi nad istim lukom. Nadalje, $\measuredangle XCB = \measuredangle C_1CB = 90° - \beta$. Dakle, $\measuredangle XAC_1 = 90° - \beta$.

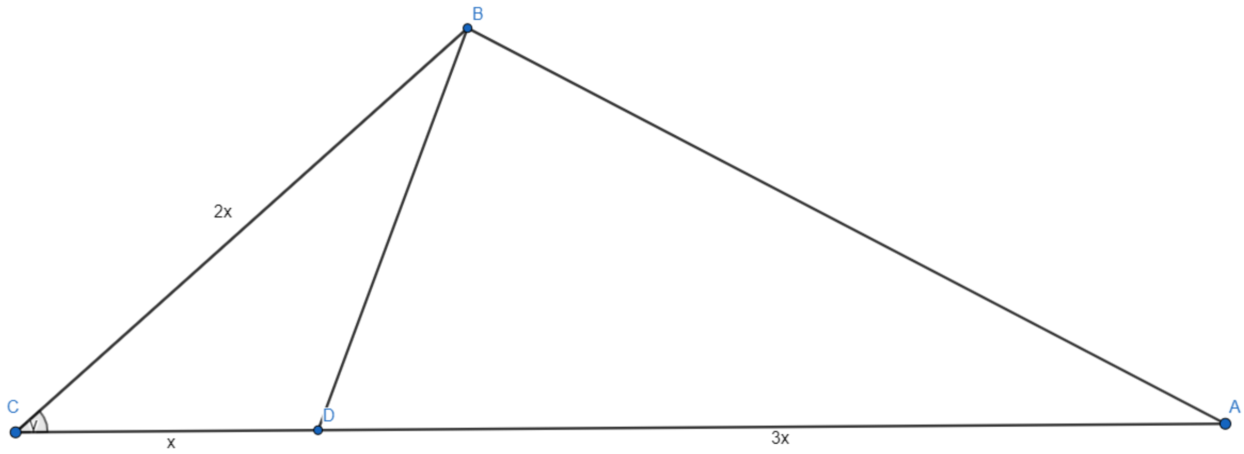
Također je i $\measuredangle C_1AH = \measuredangle BAA_1 = 90° - \beta$.

Kako su trokuti $\triangle XAC_1$ i $\triangle C_1AH$ pravokutni i imaju zajedničku stranicu $\overline{AC_1}$ prema poučku K-S-K zaključujemo da je $\triangle XAC_1 \cong \triangle HAC_1$ iz čega slijedi da je $|XC_1| = |HC_1|$.

□

Zadatak 1.23. *U trokutu $\triangle ABC$ vrijedi $b = 2a$ i $\cos\gamma = 3/4$. Na stranici AC nalazi se točka D i dijeli je u omjeru $|AD| : |DC| = 3 : 1$. Odredite omjer polumjera kružnice opisane trokutu $\triangle ABC$ i kružnice upisane trokutu $\triangle ABD$.*

Rješenje. Označimo $|CD| = x$. Tada je $|AD| = 3x$ odnosno $|AC| = 4x$ i $|BC| = 2x$.



Iz kosinusovog poučka dobivamo

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 20x^2 - 16x^2\,\frac{3}{4} = 8x^2\,,$$

iz čega slijedi $c = 2\sqrt{2}x$. Računamo radijus opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ pomoću formule $R = abc/(4P)$. Imamo

$$P = \frac{1}{2}|AC||BC|\sin\gamma = \frac{1}{2}\,8x^2\sqrt{1-\frac{9}{16}} = x^2\sqrt{7}\,,$$

pa slijedi

$$R = \frac{8x^2 2\sqrt{2}x}{4x^2\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}x\,.$$

Radijus upisane kružnice trokuta $\triangle ABD$ računamo preko formule $r = P/s$. Ako sa d oznacimo $|BD|$ tada opet po kosinusovom poučku imamo

$$d^2 = 4x^2 + x^2 - 4x^2\,\frac{3}{4} = 2x^2\,,$$

pa je $d = x\sqrt{2}$. Uočimo da je $P_{ABD} = 3/4\,P_{ABC}$ jer trokuti dijele istu visinu, a omjer osnovica je $3/4$. Tada direktnim uvrštavanjem u formulu imamo

$$r = \frac{x^2\sqrt{7}\,\frac{3}{4}}{x\,\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{2})}\,x\,.$$

Traženi omjer je tada

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\,x}{\frac{\sqrt{7}}{2(1+\sqrt{2})}\,x} = \frac{8\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{7}\,.$$

□

Definicija 1.24. *Paralelogram je četverokut koji ima dva para nasuprotnih paralelnih stranica.*

Propozicija 1.25 (Karakterizacija paralelograma)**.**

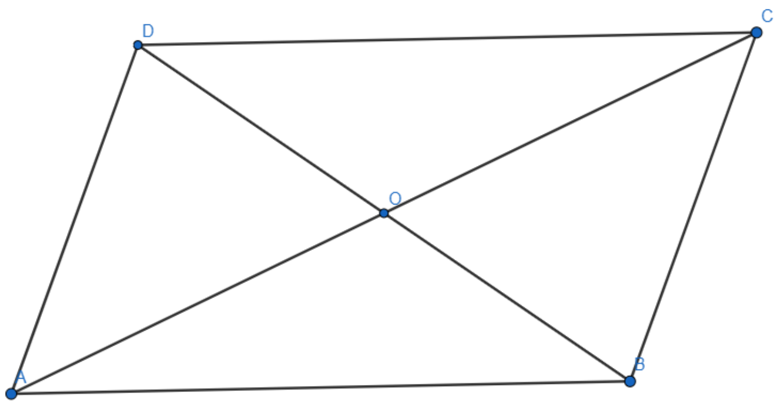
- *Četverokut je paralelogram akko su mu nasuprotne stranice jednake duljine.*
- *Četverokut je paralelogram akko su mu nasuprotni kutevi jednaki.*

- *Četverokut je paralelogram akko mu se dijagonale raspolavljaju.*
- *Četverokut je paralelogram ako mu za jedan par nasuprotnih stranica vrijedi da te stranice leže na paralelnim pravcima i jednake su duljine.*

Teorem 1.26 (o srednjici)**.** *Srednjica trokuta paralelna je trećoj stranici i jednaka je njenoj polovici.*

Zadatak 1.27. *Dokažite da je četverokut paralelogram akko mu se dijagonale raspolavljaju.*

Rješenje. $\Longrightarrow$ Pretpostavimo da je dan paralelogram $ABCD$.



Promotrimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle ADC$. Iz teorema o paralelnim pravcima, imamo $\measuredangle CAB = \measuredangle ACD$ i $\measuredangle CAD = \measuredangle ACB$. Pošto imaju zajedničku stranicu AC, po KSK zaključujemo $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ pa i $|AB| = |DC|$.

Sada promotrimo trokute $\triangle ABO$ i $\triangle ODC$ za koje imamo $\measuredangle CAB = \measuredangle ACD$, $\measuredangle ODC = \measuredangle OBA$ i $|AB| = |DC|$ iz čega po KSK $\triangle ABO \cong \triangle ODC$ pa $|AO| = |OC|$ i $|BO| = |OD|$ odnosno dijagonale se raspolavljaju.

$\Longleftarrow$ Ako pretpostavimo da se dijagonale raspolavljaju, po SKS poučku odmah dobijemo $\triangle ABO \cong \triangle DOC$ jer su $\measuredangle AOB$ i $\measuredangle COD$ vršni kutevi. Iz toga imamo $\measuredangle OAB = \measuredangle ACD$. Pretpostavimo sada da pravci AB i DC nisu paralelni i neka je X njihovo sjecište. Ako promotrimo trokut $\triangle ACX$ dobijemo

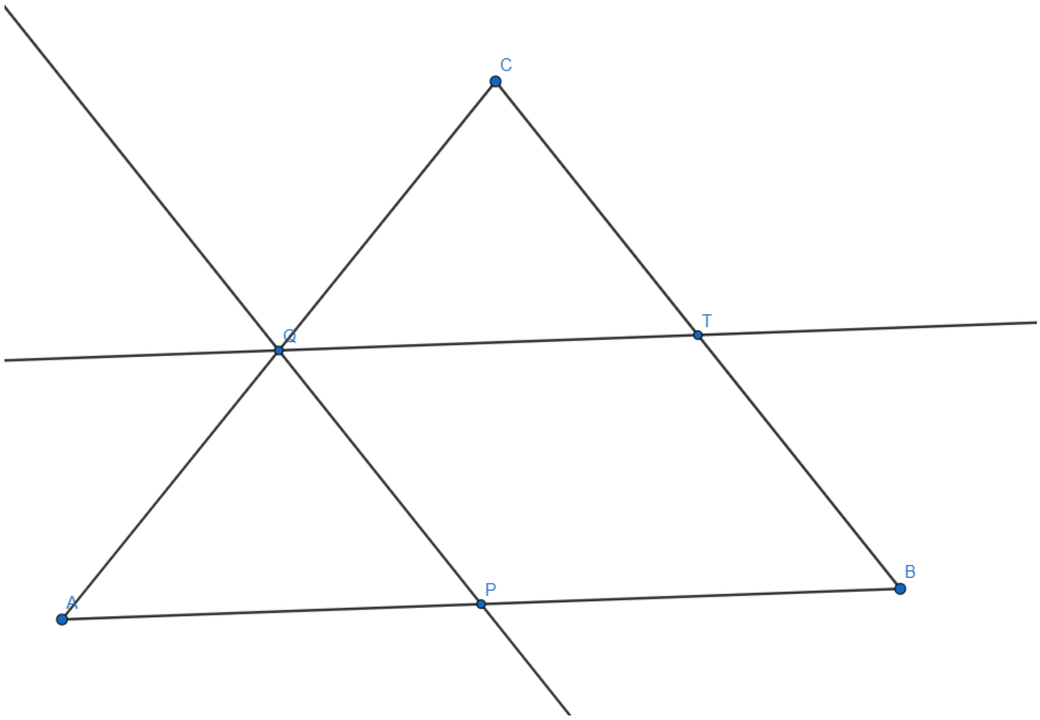
$$\measuredangle AXC = 180^\circ - \measuredangle XAC - \measuredangle XCA = 180^\circ - \measuredangle XAC - (180^\circ - \measuredangle XAC) = 0^\circ\,,$$

što nam daje kontradikciju, odnosno zaključujemo $AB \parallel DC$ i analogno dobijemo $BC \parallel AD$.

□

Zadatak 1.28. *Neka je P polovište dužine AB trokuta $\triangle ABC$, te neka paralela s BC kroz P siječe stranicu AC u točki Q. Dokažite da je Q polovište stranice AC.*

Rješenje. Povucimo paralelu s dužinom AB kroz Q i s T označimo sjecište s dužinom BC.



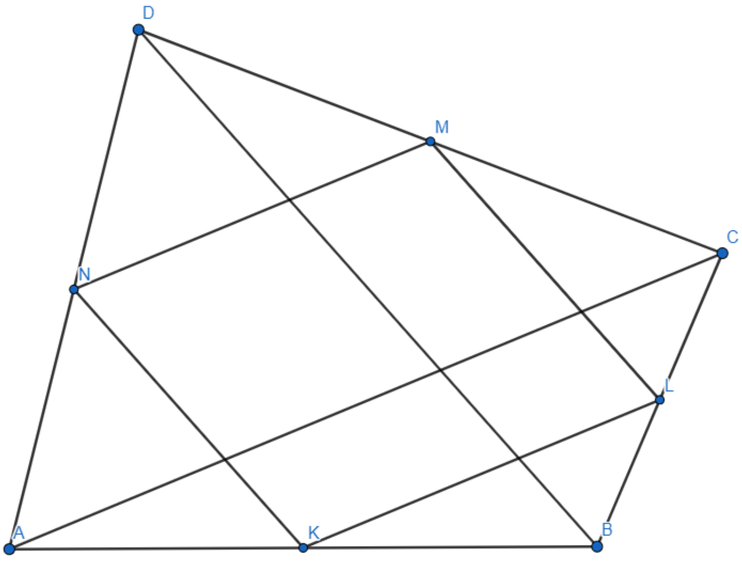
Ideja je dokazati da su trokuti $\triangle AQP$ i $\triangle QCT$ sukladni. Primijetimo da je četverokut $QTBR$ paralelogram pa je $|QT| = |BP| = c/2$. Iz teorema o paralelnim pravcima imamo

$$\measuredangle CQT = \measuredangle CAB\,, \quad \measuredangle CTQ = \measuredangle CBA = \measuredangle QPA,$$

pa po KSK poučku zaključujemo $\triangle AQP \cong \triangle CQT$ i odmah $|CQ| = |AQ|$. □

Zadatak 1.29. *Neka je $ABCD$ četverokut te neka su K, L, M i N redom polovišta njegovih stranica. Dokažite da je $KLMN$ paralelogram.*

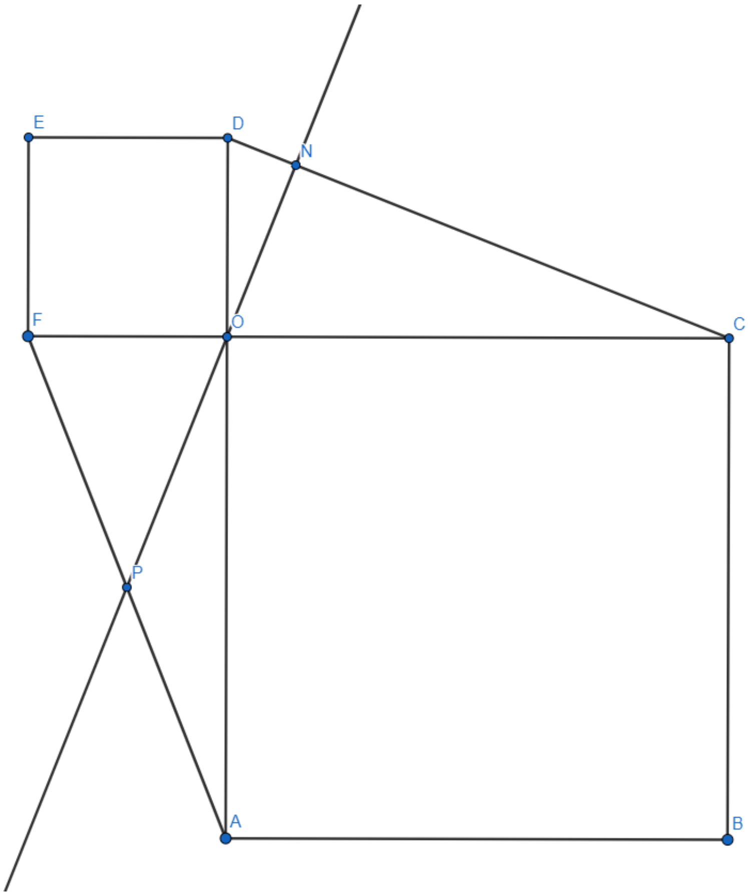
Rješenje. Povucimo dijagonalu AC četverokuta i primijetimo da je NM srednjica trokuta $\triangle ACD$.



Isto tako je KL srednjica trokuta ABC pa iz teorema o srednjici imamo $AC \parallel NM$ i $NM \parallel AC$ iz čega zaključujemo $NM \parallel KL$. Analogno preko dijagonale DB dobivamo $ML \parallel NK$, odnosno četverokut $NMLK$ je paralelogram. □

Zadatak 1.30. *Neka su $ABCO$ i $DEFO$ kvadrati sa zajedničkim vrhom O u takvom položaju da se AD i CF sijeku u O. Ako je ON visina $\triangle CDO$, dokažite da pravac ON siječe dužinu AF u njenom polovištu.*

Rješenje. Neka su a, b stranice odgovarajućih kvadrata.



Promotrimo trokute $\triangle ODC$ i $\triangle AFO$. Oba trokuta imaju stranice a i b te pravi kut među njima. Tada po SKS poučku dobijemo $\triangle ODC \cong \triangle AFO$, odnosno $\measuredangle OAF = \measuredangle OCD$ i $\measuredangle OFA = \measuredangle ODC$. Ako kut $\measuredangle ODC$ označimo sa α, iz trokuta $\triangle ODN$ i $\triangle OCN$ imamo

$$\measuredangle POA = \measuredangle NOD = 90^\circ - \alpha\,, \quad \measuredangle FOP = \measuredangle CON = 90^\circ - \measuredangle OCN = \alpha\,,$$

iz čega imamo $\measuredangle OFA = \measuredangle FOA = \alpha$ i $\measuredangle AOP = \measuredangle PAO = 90^\circ - \alpha$, odnosno $\triangle APO$ i $\triangle FOP$ su jednakokračni pa dobivamo

$$|FP| = |PO| = |PA|\,.$$

□

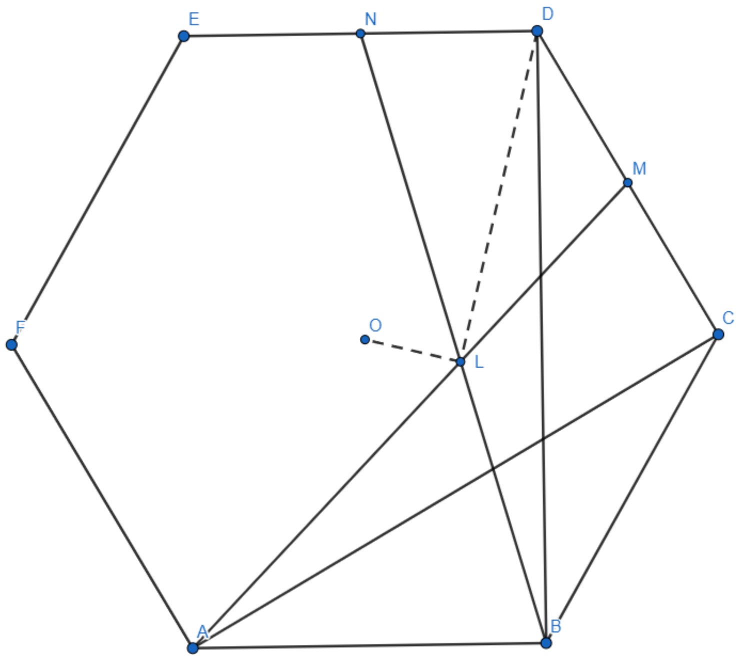
Zadatak 1.31. *Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut sa središtem O. Neka su M i N polovišta stranica CD i DE, a L točka presjeka pravaca AM i BN. Dokažite*

(a) $P(ABL) = P(DMLN)$,

(b) $\measuredangle ALO = \measuredangle OLN = 60^\circ$,

(c) $\measuredangle OLD = 90^\circ$.

Rješenje. (a) Neka a označava duljinu stranice šesterokuta. Povucimo dužine AC i BD. Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle BDC$ imaju dvije stranice a i kut od 120° među njima pa dobijemo da su oni sukladni.



Sada iz $|AC| = |BD|$, $|MC| = |DN| = a/2$ i

$$\measuredangle ACM = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ\,, \measuredangle BDN = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ\,,$$

zaključujemo $\triangle BDN \cong \triangle ACM$. Iz dobivenih sukladnosti možemo primijetiti da je $P(ABCM) = P(BCDN)$. Nadalje

$$P(ABL) = P(ABCM) - P(LMCB), \quad P(NLMD) = P(BCDN) - P(LMCB)\,,$$

pa dobivamo $P(ABL) = P(NLMD)$.

(b) Pošto je $\measuredangle OAB = 60^\circ$ i $\measuredangle MON = 60^\circ$, dužina AM prelazi u dužinu BN pri rotaciji oko O za 60°. Iz toga možemo zaključiti da je $\measuredangle MLN = 60^\circ$ i da je udaljenost od O do AM i BN jednaka. Tada po SSK$^{>}$ dobijemo da je OL simetrala kuta $\measuredangle ALN$ pa i

$$\measuredangle ALO = \measuredangle OLN = \frac{(180^\circ - \measuredangle MLN)}{2} = 60^\circ\,.$$

(c) Po KSK poučku možemo dobiti da je udaljenost točke D od pravca AM jednaka udaljenosti točke C od pravca AM. Pošto rotacijom dužine AM dobivamo dužinu BN, možemo zaključiti da je udaljenost točke D od BN jednaka udaljenosti točke C od AM odnosno

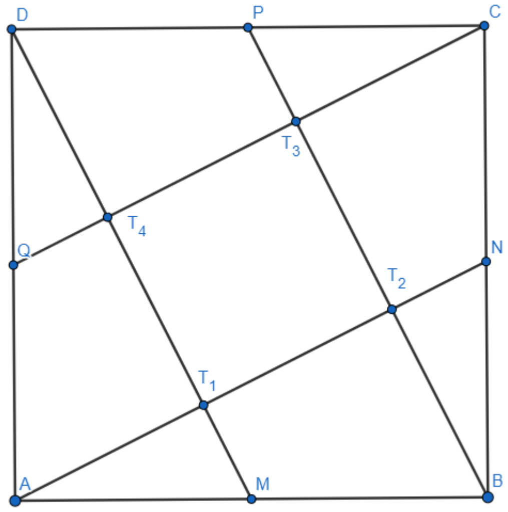
$$d(D, AM) = d(C, AM)\,, \quad d(D, BN) = d(C, AM)\,,$$

pa dobijemo da je točka D jednako udaljena od pravaca AM i BN. Sada je kao u (b) dijelu zadatka DL simetrala kuta $\measuredangle MLN$ iz čega dobivamo $\measuredangle OLD = 90^\circ$.

□

Zadatak 1.32. *Točke M, N, P, Q redom su polovišta stranica AB, BC, CD, DA kvadrata $ABCD$. Dokažite da pravci AN, BP, CQ i DM omeđuju kvadrat.*

Rješenje. Označimo s T_1, T_2, T_3, T_4 četverokut kojeg omeđuju zadani pravci i označimo $\measuredangle NAB = \alpha$.



Pošto imamo

$$|DA| = |AB|, \quad |AM| = |BN|, \quad \measuredangle ABN = \measuredangle DAM = 90^\circ,$$

po SKS poučku dobijemo sukladnost $\triangle ABN \cong \triangle ADM$. Tada je $\measuredangle ADM = \alpha$ i $\measuredangle DMA = 90 - \alpha$. Sada imamo

$$\measuredangle AT_1M = 180^\circ - (90 - \alpha) - \alpha = 90^\circ,$$

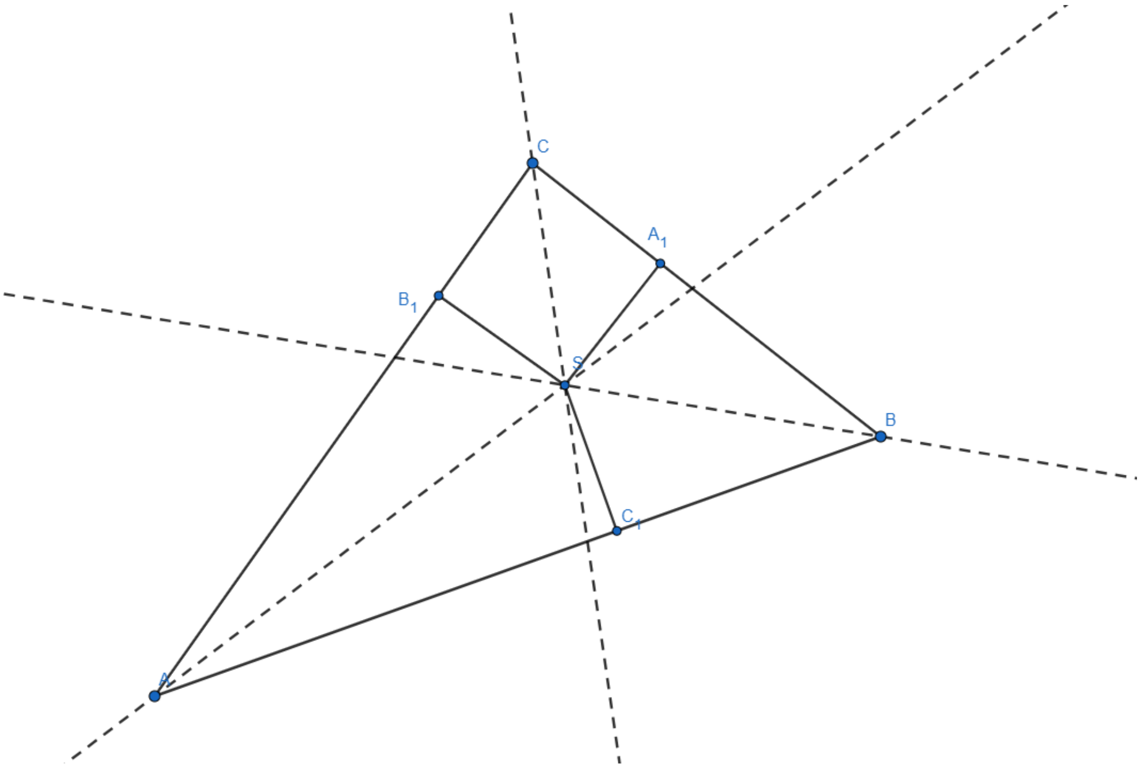
i analogno dobijemo da su ostali kutevi četverokuta pravi. Nadalje, po KSK poučku dobijemo

$$\triangle AT_1M \cong \triangle NT_2B \cong \triangle PCT_3 \cong \triangle DT_4Q,$$

jer svi navedeni trokuti imaju kuteve $\alpha, 90^\circ - \alpha$ i jednu stranicu $a/2$ gdje je a stranica početnog kvadrata. Iz ovoga zaključujemo da omeđeni četverokut ima sve stranice iste, odnosno $T_1T_2T_3T_4$ je kvadrat. □

Zadatak 1.33. *Dokažite da se simetrale kuteva trokuta sijeku u jednoj točki.*

Rješenje. Označimo sjecište simetrala kuteva $\measuredangle BAC$ i $\measuredangle ABC$ sa S te dokažimo da je CS simetrala kuta $\measuredangle ACB$. Povucimo visine iz S na stranice trokuta i označimo nožišta kao na slici.



Promotrimo $\triangle ASC_1$ i $\triangle AB_1S$. Imaju jednu zajedničku stranicu, $\measuredangle SAC_1 = \measuredangle B_1AS$ te $\measuredangle AC_1S = \measuredangle AB_1S = 90°$. Po KSK poučku dobivamo sukladnost pa je $|B_1S| = |C_1S|$. Slično dobijemo $|C_1S| = |A_1S|$ iz čega zaključujemo $|B_1S| = |A_1S|$.

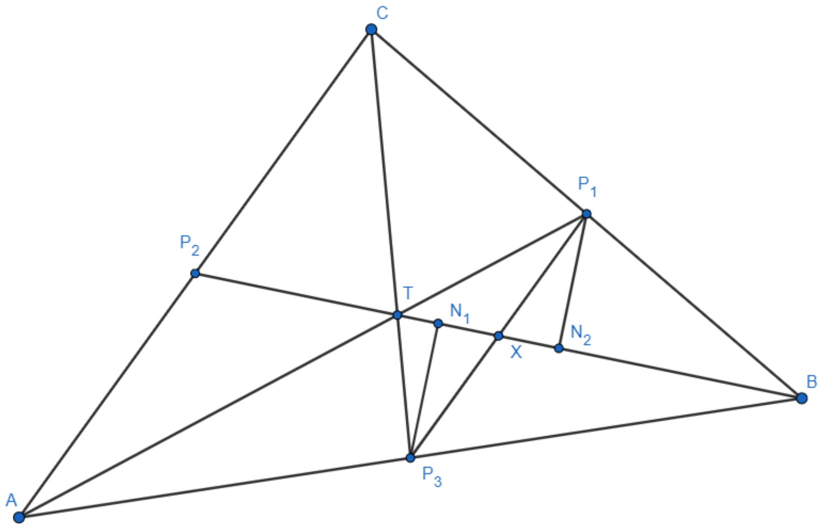
Sada možemo dobiti sukladnost trokuta $\triangle SB_1C$ i $\triangle SA_1C$ po SSK$^>$ poučku iz

$$|CS| = |CS|, \quad |B_1S| = |A_1S|, \quad \measuredangle SB_1C = \measuredangle SA_1C = 90°.$$

□

Zadatak 1.34. *Dokažite koristeći teoreme o sličnosti trokuta da težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru* $1 : 2$*. Dokažite zatim da težišnice dijele trokut na šest trokuta istih površina.*

Rješenje. Označimo polovišta stranica kao na slici te povucimo dužinu P_1P_3.



Pošto trokuti $\triangle BP_1X$ i $\triangle BCP_2$ imaju jedan zajednički kut te je $\measuredangle BP_1X = \measuredangle BCP_2$ dobivamo da su oni slični odnosno

$$\frac{|XB|}{|BP_2|} = \frac{|P_1X|}{|CP_2|} = \frac{|BP_1|}{|BC|} = \frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

Nadalje, $\measuredangle AP_2O = \measuredangle P_2BC + \measuredangle BCP_2$ i $\measuredangle P_1XO = \measuredangle P_2BC + \measuredangle BCP_2$ jer su to vanjski kutevi trokuta BP_2C i $\triangle BP_1X$. Zajedno sa $\measuredangle P_1OX = P_2OA$ dobivamo $\triangle AP_2O \sim \triangle OP_1X$ pa i

$$\frac{|P_2O|}{|OX|} = \frac{|AP_2|}{|XP_1|} = 2\,, \tag{2}$$

odnosno

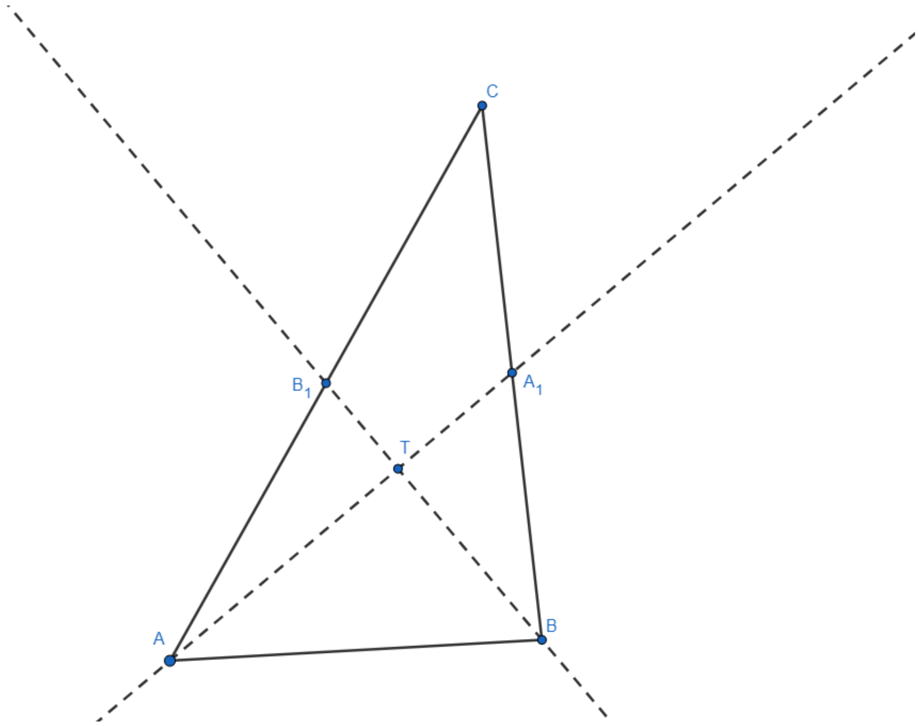
$$|P_2O| = \frac{2}{3}\frac{1}{2}|P_2B| = \frac{1}{3}|P_2B|\,, \quad |OX| = \frac{1}{3}\frac{1}{2}|P_2B| = \frac{1}{6}|P_2B|\,.$$

Sada lako vidimo $|OB| = 2/3\,|P_2B|$.

Primijetimo da je $P(AP_3T) = P(BP_3T)$ jer dijele visinu nad osnovicom jednake duljine. Dovoljno je još dokazati $P(TP_3B) = P(TP_1B)$. Povucimo visine iz P_3 i P_1 na stranicu OB. Pošto trokuti $\triangle P_3N_1X$ i $\triangle P_1N_2X$ imaju vršne kuteve, jedan pravi kut te jednake stranice $|P_3X| = |P_1X|$ iz KSK poučka dobivamo sukladnost. Sada znamo da dotični trokuti posjeduju visine jednake duljine nad istom osnovicom pa su i površine jednake. □

Zadatak 1.35. *Težišnice AA_1 i BB_1 trokuta ABC imaju duljine $|AA_1| = 6$ i $|BB_1| = 9/2$ i međusobno su okomite. Izračunajte duljine stranica tog trokuta.*

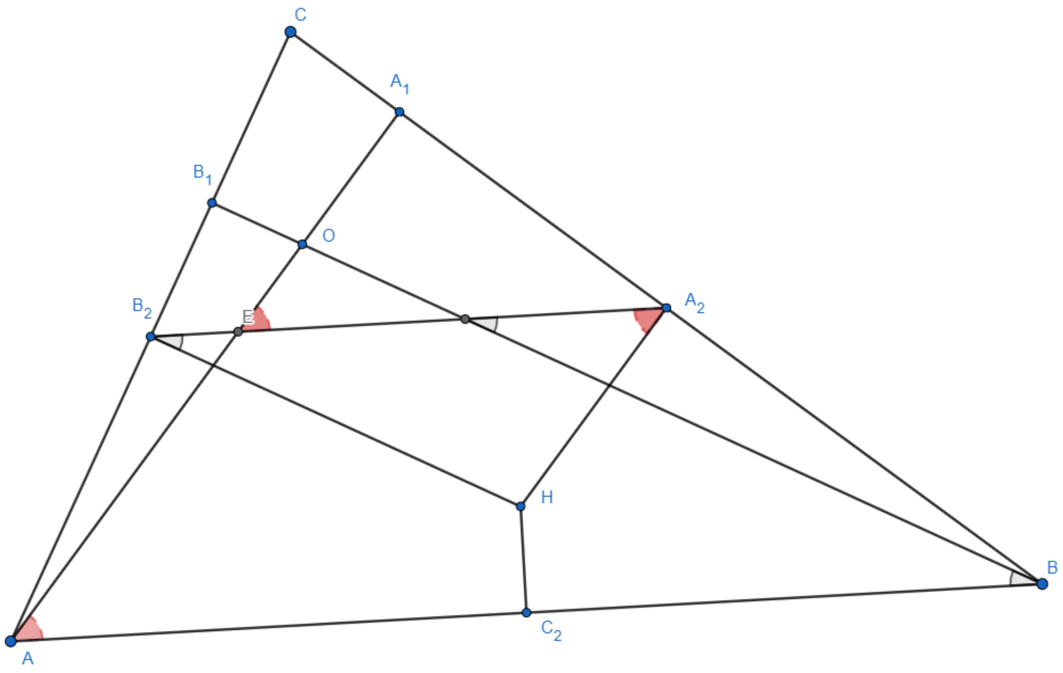
Rješenje. Po teoremu o težišnici dobivamo $|TA_1| = 2$, $|AT| = 4$, $|TB_1| = 3/2$ i $|TB| = 3$. Sada po pitagorinom poučku imamo $|AB| = 5$, $|AB_1| = \sqrt{73}/2$ te $|A_1B| = \sqrt{13}$. To znači da su stranice duljine $2\sqrt{13}$, $\sqrt{73}$ i 5.



□

Zadatak 1.36. *Dan je trokut $\triangle ABC$. Dokažite da je udaljenost ortocentra od vrha A dva puta veća od udaljenosti središta opisane kružnice od stranice BC.*

Rješenje. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina iz A, B, C, a A_2, B_2, C_2 polovišta stranica.



Sada je $AO \parallel HA_2$ jer su oba pravca okomita na BC, $BO \parallel B_2H$ jer su oba pravca okomita na AC, $AB \parallel A_2B_2$ jer je A_2B_2 srednjica. Stoga je

$$\measuredangle OAB = \measuredangle B_2A_2H\,, \quad \measuredangle OBA = \measuredangle A_2B_2H\,, \quad \measuredangle AOB = \measuredangle A_2HB_2.$$

Po teoremu KKK dobivamo $\triangle ABO \sim \triangle A_2B_2H$. Imamo

$$\frac{|AO|}{|A_2H|} = \frac{|AB|}{|A_2B_2|} = 2,$$

što je trebalo dokazati. $\square$