# Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

# Planimetrija

# Uvod

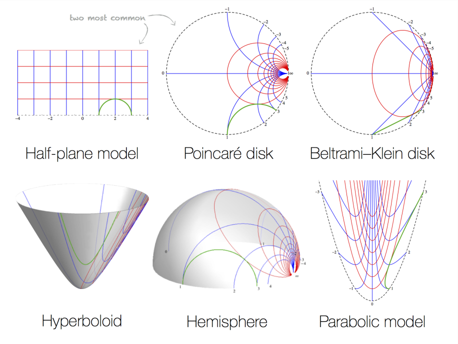
- planimetrija = geometrija ravnine
  (geom. likovi, aksiomi, logičko razmišljanje, bez koord. sustava)
- Euklid (325. pr. Kr. - 265. pr. Kr.)
  - *Elementi* = prva (velika) matematička knjiga
  - Definicije: *točka* je ono što nema dijelova, *crta* je duljina bez širine

# Euklidovi aksiomi (modernim jezikom)

1. Kroz svake 2 točke moguće je provući pravac.
2. Moguće je po volji daleko produljiti svaku dužinu.
3. Moguće je nacrtati kružnicu sa zadanim središtem i polumjerom.
4. Svaka 2 prava kuta međusobno su sukladna.
5. Za svaki pravac $p$ i točku $T$ izvan tog pravca, moguće je provući jedinstveni pravac kroz $T$ koji ne siječe $p$.

# Zahtjevi na skup aksioma teorije

- nezavisnost
  - peti aksiom?
  - Gauss, Lobačevski, Bolyai - hiperboličke (barem dva paralelna pravca kroz točku)
  - Riemann - eliptičke (nema paralelnog pravca kroz točku)
  - Beltrami dokazao nezavisnost (prvi model)
- neproturječivost
- potpunost



# Suvremeni aksiomatski sustav

- David Hilbert 1899. (20 aksioma)
- definiramo modificirani aksiomatski sustav

**Definicija 1**
*Euklidska ravnina je skup $M$ čije elemente nazivamo točkama, a neke istaknute podskupove od $M$ pravcima, tako da su zadovoljeni aksiomi $I_1 - I_3$, $U_1 - U_2$, $M_1 - M_4$, $S_1 - S_2$ i $P$.*

- *u nastavku navodimo aksiome*

## Aksiomi incidencije

- ($I1$) Za svake dvije točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac kojem one pripadaju, oznaka $AB$
- ($I2$) Na svakom pravcu leže barem 3 različite točke
- ($I3$) Točke koje leže na istom pravcu zovemo kolinearne. Postoje 3 nekolinearne točke (tj. one koje ne leže na istom pravcu).

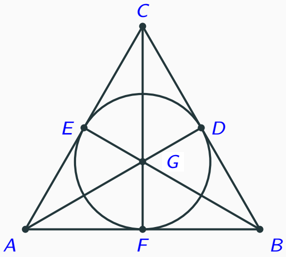
Jesu li $I_1 - I_3$ dovoljni da u potpunosti opišu točke i pravce?

# Aksiomi incidencije

- ($I_1$) Za svake dvije točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac kojem one pripadaju, oznaka $AB$
- ($I_2$) Na svakom pravcu leže barem 3 različite točke
- ($I_3$) Točke koje leže na istom pravcu zovemo kolinearne. Postoje 3 nekolinearne točke (tj. one koje ne leže na istom pravcu).

Jesu li $I_1 - I_3$ dovoljni da u potpunosti opišu točke i pravce?

Ne. Npr. Fanova ravnina $\neq$ Euklidova ravnina, a zadovoljava $I_1 - I_3$. Primjer konačne (projektivne) geometrije (7 točaka, 7 pravaca).




Fanova ravnina

# Aksiomi uređaja

- $(U_1)$ Na svakom pravcu postoje 2 suprotna totalna uređaja $\preceq$ i $\succeq$.

**Definicija 2**
*Neka su $A, B, T$ točke istog pravca $p$. Kažemo da je $T$ između $A$ i $B$ ako je $A \preceq T \preceq B$ ili $A \succeq T \succeq B$. Skup svih točaka koje leže između $A$ i $B$ zovemo dužinom $\overline{AB}$.*

**Definicija 3**
*Polupravac kojemu je $A$ vrh, a prolazi još jednom točkom $B \neq A$ je skup svih onih točaka $T$ pravca $AB$ za koje vrijedi $A \preceq T \preceq B$ ili $A \preceq B \preceq T$. Oznake: $(Ax)$, gdje je $x = AB$, ili $(AB)$.*

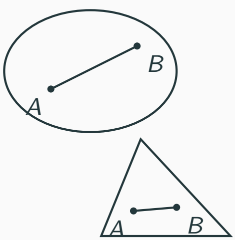
**Definicija 4**
*Skup $K \subseteq M$ je konveksan ako vrijedi $(\forall A, B \in K) \quad \overline{AB} \subseteq K$.*

**Definicija 5**
*Neka je $S \subseteq M$ proizvoljan podskup. Konveksna ljuska od $S$ (oznaka $\operatorname{conv} S$ je presjek svih konveksnih skupova koji sadrže $S$.*

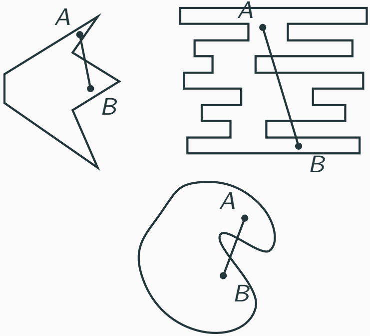
**Definicija 6**
*Neka su $A, B, C \in M$ nekolinearne točke. Skup $\operatorname{conv}\{A, B, C\}$ zovemo trokut, oznaka $\triangle ABC$. Stranice trokuta su dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$. Vrhovi trokuta su točke $A, B, C$.*

# Askiomi uređaja

konveksni skupovi




nekonveksni skupovi



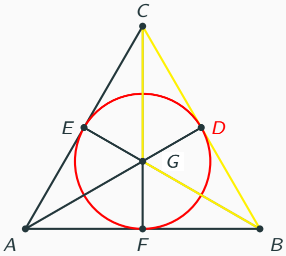
## Aksiomi uređaja

- $(U_2)$ (Paschov aksiom) Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi nijednim vrhom na toj stranici, onda siječe barem još jednu stranicu trokuta.

# Aksiomi uređaja

- ($U_2$) (Pachov aksiom) Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi nijednim vrhom na toj stranici, onda siječe barem još jednu stranicu trokuta.

Uočimo, Fanova ravnina ne zadovoljava Paschov aksiom.
Neka je uređaj kao u Euklid. geom. Tada pravac $EDF$ siječe $\triangle BGC$ u točki $D$, koja je unutarnja točka stranice $\overline{BC}$. No, pravac $EDF$ ne siječe nijednu drugu stranicu trokuta $\triangle BGC$.
(Siječe pravce $CG$ i $BG$, ali ne unutar trokuta.)




Fanova ravnina

## Aksiomi metrike

**Definicija 7**
*Zadana je funkcija* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *sa svojstvima:*

$(M_1)$ $(\forall A, B \in M) \quad d(A,B) \geq 0 \quad \& \quad (d(A,B) = 0 \iff A = B).$

$(M_2)$ $(\forall A, B \in M) \quad d(A,B) = d(B,A)$

$(M_3)$ $(\forall A, B, C \in M) \quad d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$, *a jednakost vrijedi akko* $C \in \overline{AB}$. *(nejednakost trokuta)*

$(M_4)$ *Za svaki polupravac s vrhom u* $V$ *i svaki realan broj* $x > 0$ *postoji jedinstvena točka* $T$ *na tom polupravcu takva da je* $d(v, T) = x$.

*Par* $(M, d)$ *koji zadovoljava svojstva* $M_1 - M_3$ *zovemo metrički prostor.*

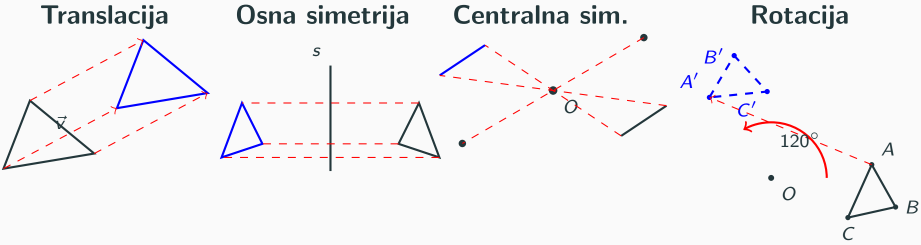
*Broj* $d(A,B)$ *zovemo duljina dužine* $\overline{AB}$, *oznaka* $|\overline{AB}| = d(A,B)$.

Uočimo: iz $(M_3)$ slijedi da je zbroj duljina dviju stranica trokuta veći od duljine treće stranice trokuta.

# Aksiomi simetrije

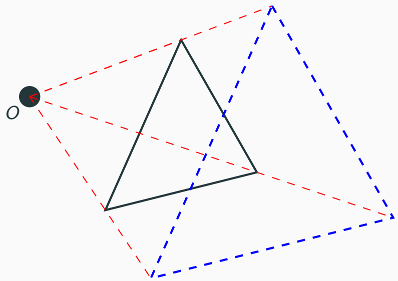
**Definicija 8**
*Preslikavanje $f : M \to M$ je* izometrija ravnine *ako čuva udaljenosti, tj.*

$$(\forall A, B \in M) \quad d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

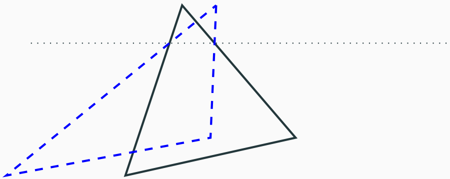


# Aksiomi simetrije

**Dilatacija**




**Smicanje (shear)**



U oba slučaja udaljenosti se mijenjaju, pa preslikavanja nisu izometrije.

# Aksiomi simetrije

($S_1$) Za svaki pravac $p$ postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \to M$ različita od identitete, za koju je

$$(\forall T \in p) \quad s_p(T) = T.$$

Zovemo je osna simetrija s obzirom na $p$, a $p$ zovemo os simetrije.

($S_2$) Neka su $(Ax)$ i $(Ay)$ proizvoljni polupravci kroz $A$.
Tada postoji barem jedan pravac $p$ takav da je $s_p(x) = y$.

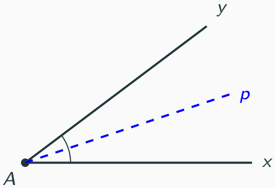
# Aksiomi simetrije

($S_1$) Za svaki pravac $p$ postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \to M$ različita od identitete, za koju je

$$(\forall T \in p) \quad s_p(T) = T.$$

Zovemo je osna simetrija s obzirom na $p$, a $p$ zovemo os simetrije.

($S_2$) Neka su $(Ax)$ i $(Ay)$ proizvoljni polupravci kroz $A$.
Tada postoji barem jedan pravac $p$ takav da je $s_p(x) = y$.




(simetrala kuta)

**Definicija 9**
*Pravci $p$ i $q$ su paralelni ako se podudaraju ili se ne sijeku. Pišemo $p \parallel q$.*

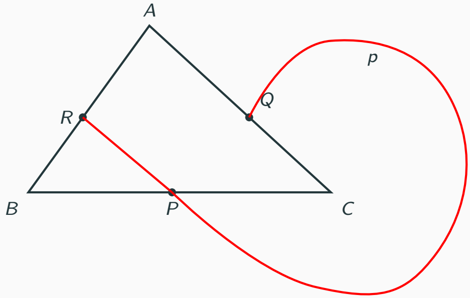
Aksiom o paralelama:

($P$) Zadanom točkom $T$ izvan pravca $p$ prolazi najviše jedan pravac $q$ paralelan s $p$.

**Propozicija 0**
*Dva različita pravca sijeku se najviše u jednoj točki.*

**Propozicija 1**
*Pravac koji ne prolazi niti jednim vrhom $\triangle ABC$ ne siječe sve tri stranice trokuta.*

**Dokaz.**



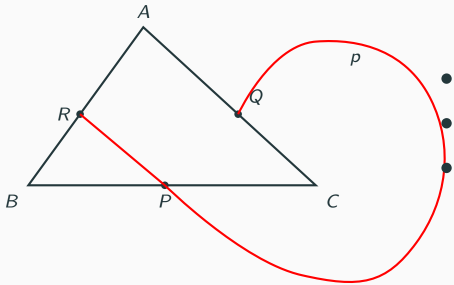

Neka je $p$ pravac takav da ne prolazi kroz vrhove $A, B, C$. PPS, tj. $p$ siječe sve tri stranice $\triangle ABC$.

- $P = p \cap \overline{BC}$, $Q = p \cap \overline{AC}$, $R = p \cap \overline{AB}$
- Po pretpostavci je $\{P, Q, R\} \cap \{A, B, C\} = \varnothing$

$\square$

# Osnovne posljedice aksioma planimetrije

**Dokaz.**




- Ako $P = Q$, tada $P \in \overline{BC} \cap \overline{AC}$, no zbog $AC \neq BC$ i prethodne propozicije, $P = C$. To je nemoguće po pretp., pa je $P \neq Q$.
- Analogno $P \neq R \neq Q$.
- BSOMP $R \preceq P \preceq Q$ na $p$.
- Paschov aks. za $\triangle AQR$ i pravac $BC$:
  $BC$ siječe $\overline{RQ}$ u $P \neq R, Q$, pa mora sjeći još i $\overline{AQ}$ ili $\overline{AR}$.
- No, $BC \cap AQ = BC \cap AC = C$, a $A \preceq Q \preceq C$, pa $BC \cap \overline{AQ} = \varnothing$
- Analogno, $BC \cap \overline{AR} = \varnothing$.

$\square$

# Osnovne posljedice aksioma planimetrije

- Neka je dan pravac $p$ te neka je $\sim$ relacija na skupu $M \setminus p$ dana s

$$A \sim B \iff \overline{AB} \cap p = \emptyset$$

**Propozicija 2**
*Relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije s točno dvije klase.*

**Dokaz.**
Za domaću zadaću. Uputa: Paschov aksiom. $\square$

**Definicija 10**
*Poluravnina je skup svih točaka ravnine koje pripadaju istoj klasi.*

**Propozicija 3**
*Za sve točke $A, B \in M$, $A \neq B$ postoji jedinstvena točka $C \in AB$ t.d. $d(A, C) = d(B, C)$. Ta točka leži između $A$ i $B$ i zove se polovište dužine $\overline{AB}$.*

**Dokaz.**
Za domaću zadaću. Uputa: aksiomi metrike. $\square$

**Teorem 1**
*Neka je $f : M \to M$ izometrija.*

(a) $f(AB) = f(A)f(B)$, *tj. slika pravca određenog točkama $A$ i $B$ je ponovno pravac i to onaj određen točkama $f(A)$ i $f(B)$.*

(b) $f(\overline{AB}) = \overline{f(A)f(B)}$.

(c) *Slika polupravca $(AB)$ je polupravac $(f(A)f(B))$.*

**Propozicija 4**
*Svaka izometrija je injekcija.*

**Dokaz teorema.**

(a) Dokazujemo $f(AB) \subseteq f(A)f(B)$ te $f(A)f(B) \subseteq f(AB)$.
$\boxed{\subseteq}$ Neka je $C \in AB$. BSOMP $A \preceq C \preceq B$.
Tvrdimo da je $f(C) \in f(A)f(B)$.
Budući da je $f$ izometrija,

$$d(f(A), f(C)) = d(A, C), \quad d(f(C), f(B)) = d(C, B).$$

# Osnovne posljedice aksioma planimetrije

$d(f(A), f(C)) + d(f(C), f(B)) = d(A, C) + d(C, B) \overset{(M_3)}{=} d(A, B) = d(f(A), f(B))$

Sada po $(M_3)$ slijedi da je $f(C) \in \overline{f(A)f(B)} \subseteq f(A)f(B)$.

$\boxed{\supseteq}$ Obratno, neka je $D \in f(A)f(B)$.

Razlikujemo slučajeve $f(A) \preceq D \preceq f(B)$, $f(A) \preceq f(B) \preceq D$ i $D \preceq f(A) \preceq f(B)$.

<u>1. slučaj:</u> $f(A) \preceq D \preceq f(B)$. Po $(M_3)$ slijedi da je

$$d(f(A), D) + d(D, f(B)) = d(f(A), f(B)) \overset{\text{izometrija}}{=} d(A, B).$$

Dakle, $d_0 := d(f(A), D) < d(A, B)$. Sada po $(M_4)$ na polupravcu s vrhom u $A$ kroz $B$ postoji $C$ t.d. $d(A, C) = d_0$. Po $(M_3)$ slijedi da je $A \preceq C \preceq B$.

Tada je, po gore dokazanom, $f(C) \in f(A)f(B)$, no opet iz $(M_3)$ vidimo da je $f(C) \in \overline{f(A)f(B)}$. Po jedinstvenosti iz $(M_4)$, $D = f(C)$.

# Osnovne posljedice aksioma planimetrije

2. slučaj: $f(A) \preceq f(B) \preceq D$. Po $(M_3)$ slijedi da je

$$d(f(A), f(B)) + d(f(B), D) = d(f(A), D),$$

tj. $d_0 = d(f(A), D) > d(A, B)$ (izometrija).

Po $(M_4)$ postoji jedinstven $C$ na polupravcu s vrhom $A$ kroz $B$ takav da je $d(A, C) = d_0 > d(A, B)$, pa je $A \preceq B \preceq C$.

Analogno kao u prvom slučaju, $C \in f(A)f(B)$ i $f(C) = D$.

3. slučaj: Analogno kao 2. slučaj.

# Osnovne posljedice aksioma planimetrije

(b) Analogno kao ($a$), samo smo u slučaju $A \preceq C \preceq B$ i $f(A) \preceq D \preceq f(B)$.

(c) Za polupravce se dokazuje slično kao za pravce. $\square$

**Definicija 11**
*Neka je $f : M \to M$ preslikavanje ravnine. Kažemo da je točka $T$ fiksna točka za $f$ ako je $f(T) = T$.*

**Propozicija 5**
*Neka je $f : M \to M$ izometrija.*

(a) *Ako su $A$ i $B$ fiksne točke od $f$, onda je i svaka točka pravca $AB$ fiksna za $f$.*

(b) *Ako su točke $A, B, C$ nekolinearne i fiksne za $f$, onda je $f$ identiteta.*

(c) *Neka su $p$ i $q$ pravci. Tada*

$$s_p = s_q \Longrightarrow p = q.$$

**Dokaz.**

(a) Neka je $T \in AB$ proizvoljna točka. Pretpostavimo da je $T \preceq A \preceq B$ (ostali slučajevi analogno).
Neka je $x = d(B, T)$.
Po aksiomu $(M_4)$, $T$ je jedinstvena točka na polupravcu $(BA)$ takva da je $d(B, T) = x$.
Po prethodnom teoremu, polupravac $(BA)$ se preslika u polupravac $f(B)f(A))$, tj. u polupravac $(BA)$, jer je $f(A) = A$, $f(B) = B$.
Budući da je $T \in (BA)$, slijedi $f(T) \in (f(B)f(A) = (BA)$.
Sada je

$$d(B, f(T)) = d(F(B), f(T)) = d(B, T) = x.$$

Dakle, $f(T) \in (BA)$, $d(B, f(T)) = x$, pa zbog jedinstvenosti u $(M_4)$ slijedi $f(T) = T$.

(b) Iz ($a$) dijela slijedi da su sve točke na pravcima $AB, BC, CA$ fiksne za $f$.
Neka je $T \in M$ proizvoljna točka koja ne leži na pravcima $AB, BC, CA$.
Neka je $P$ polovište od $AB$.
Pravac $PT$ siječe stranicu $\overline{AB}$ trokuta $\triangle ABC$ u točki $P$ koja nije vrh.
Po Paschovom aksiomu, $PT$ siječe još jednu stranicu trokuta.
BSOMP, $PT \cap \overline{BT} = Q$.
Sada je $P \in AB$, $Q \in BC$, pa su to fiksne točke za $f$.
No, tada je (po ($a$) i svaka točka pravca $PT$ fiksna za $f$, pa je posebno $f(T) = T$.

(c) Pretpostavimo suprotno, tj. $s_p = s_q$ i $p \neq q$. Vrijedi da je $s_p(T) = T$, za svaku $T \in p$ te $s_q(T) = T$, za svaku $T \in q$.
Dakle, $s_p(T) = T$, za svaku točku $T \in p \cup q$.
Budući da $p \neq q$, postoji točka $Q \in q$ takva da je $Q \notin p$.
Uzmimo još točke $A, B \in p$ (postoje po $(I_2)$).
Sada je $s_p$ izometrija koja fiksira tri nekolinearne točke, pa je identiteta.
No, to je kontradikcija s definicijom od $s_p$.
Slijedi da je $p = q$.

□

**Propozicija**
*Neka je $p$ proizvoljan pravac u $M$. Tada je $s_p \circ s_p = id$.*

**Propozicija 6**
*Neka su $A, B \in M$, $A \neq B$. Postoji jedinstven pravac $p$ takav da je $s_p(A) = B$.*

*Taj pravac zovemo simetrala dužine $\overline{AB}$.*

**Dokaz.**

Dokazat ćemo samo egzistenciju takvog pravca.

Neka je $P$ polovište dužine $\overline{AB}$. Po aksiomu $(S_2)$ postoji barem jedan pravac $p$ takav da je $s_p((PA)) = (PB)$.

Po prethodnom teoremu znamo da je $s_p(P) = P$ te vrijedi

$$d(s_p(A), P) = d(s_p(A), s_p(P)) = d(A, P).$$

Dakle, $s_p(A)$ je točka na polupravcu $PB$ takva da je $d(s_p(A), P) = d(A, P) = d(B, P)$.

Po jedinstvenosti iz $(M_4)$ slijedi da je $B = s_p(A)$.

**Propozicija**
*Neka je $p$ pravac i $s_p$ osna simetrija s obzirom na $p$. Tada vrijedi*

$$T \in p \iff s_p(T) = T.$$

**Propozicija 7**
*Svaka točka na simetrali $\overline{AB}$ jednako je udaljena od $A$ i od $B$.*

*Obratno, svaka točka ravnine koja je jednako udaljena od $A$ i od $B$ leži na simetrali $\overline{AB}$.*

**Dokaz.** $\boxed{\Longrightarrow}$ Neka je $p$ simetrala od $\overline{AB}$ te neka je $T \in p$.

$$d(A, T) = d(s_p(A), s_p(T)) = d(B, T).$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Neka je $T \in M$ točka takva da je $d(A, T) = d(B, T)$.

Po aksiomu $(S_2)$ postoji pravac $q$ takav da je $s_q((TA)) = (TB)$.

Dakle, $s_q(T) = T$, $s_q(A) \in (TB)$.

Po jedinstvenosti iz $(M_4)$ slijedi $s_q(A) = B$.

No, sada je $s_p(A) = B = s_q(A)$, pa po jedinstvenosti iz *Prop.*6 slijedi da je $p = q$.

Dakle, zbog $T \in q$, slijedi $T \in p$.

$\square$

**Definicija 12**
*Kažemo da je pravac $q$ okomit na pravac $p$ ako je $q \neq p$ i $s_q(p) = p$. Tada pišemo $q \perp p$*

**Propozicija 8**

(a) $q \perp p \Longrightarrow p \perp q$.

(b) *Okomiti pravci se sijeku.*

(c) *Kroz svaku točku* $A \in M$ *prolazi točno jedan pravac okomit na zadani pravac* $p$.

(d) *Neka je* $A$ *točka t.d.* $A \notin p$ *te* $N$ *nožište okomice iz* $A$ *na* $p$. *(Nožište je presjek pravca iz* (c) *i pravca* $p$.*) Tada za svaku točku* $T \in p$ *vrijedi* $d(A, T) \geq d(A, N)$.

**Definicija 13**
*Rotacija s centrom $O$ je izometrija ravnine koja je ili identiteta ili ima točno jednu fiksnu točku $O$.*

*Centralna simetrija s centrom $O$ je preslikavanje $f$ takvo da za sve točke $T \in M$ vrijedi da je $O$ polovište dužine $\overline{Tf(T)}$.*

Uočimo da se u definiciji rotacije ne spominje "kut". Štoviše, još nismo ni uveli taj pojam.

Također, iz definicije centralne simetrije nije odmah jasno da je to izometrija.

**Teorem 2 (O izometrijama ravnine)**

(a) *Svaka izometrija ravnine je bijekcija.*

(b) $s_p \circ s_p = id$, $s_p^{-1} = s_p$.

(c) *Izometrija koja ima barem dvije fiksne točke* $A \neq B$ *je ili identiteta ili* $s_{AB}$.

(d) *Kompozicija rotacija s centrom u istoj točki* $O$ *je ponovno rotacija. Inverz rotacije je rotacija.*

(e) *Centralna simetrija s centrom* $O$ *je rotacija s centrom u* $O$.

(f) *Svaka izometrija ravnine je kompozicija najviše* 3 *osne simetrije.*

**Dokaz.**

(a) Slijedi iz $(b)$, $(f)$.

(b) Već imamo rezultat $s_p \circ s_p = id$. Sada iz bijektivnosti slijedi $s_p^{-1} = s_p$.

(c) Lako slijedi iz defincije osne simetrije $(S_1)$ i *Prop.*5$(a)$.

(d) Očito iz definicije.

(e) Lako se pokaže (DZ).

(f) Neka je $f$ proizvoljna izometrija.
Ako je $f = id$, neka je $p$ proizvoljan pravac. Tada je $s_p \circ s_p = id = f$.
Ako je $f \neq id$, onda postoji $A \in M$ takva da je $\widetilde{A} := f(A) \neq A$.
Neka je $a$ simetrala dužine $\overline{A\widetilde{A}}$ i definirajmo $g = s_a \circ f$.
Tada je $g(A) = s_a(f(A)) = s_a(\widetilde{A}) = A$.
Ako je $g = id$, onda je $s_a \circ f = id$, pa je $f = s_a^{-1} = s_a$.
Ako je $g \neq id$, onda postoji $B \in M$ takva da je $\widetilde{B} := g(B) \neq B$.
Uočimo, $B \neq A$ jer je $g(A) = A$.
Neka je $b$ simetrala dužine $\overline{B\widetilde{B}}$.
Vrijedi:

$$d(A, \widetilde{B}) = d(g(A), g(B)) = d(A, B),$$

pa je $A \in b$ (po *Prop*.7).

Definirajmo $h = s_b \circ g$.

Sada je $h(A) = s_b(g(A)) = s_b(A) = A$, $h(B) = s_b(g(B)) = s_b(\widetilde{B}) = B$.

Ako je $h = id$, onda $h = s_b \circ g = s_b \circ s_a \circ f = id$, pa je $f = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} = s_a \circ s_b$.

Ako je $h \neq id$, onda postoji $C \in M$ takva da je $\widetilde{C} := h(C) \neq C$.

Uočimo, $C \notin AB$ jer su sve točke pravca $AB$ fiksne za $h$ po $Prop.5.(a)$, a točka $C$ nije fiksna.

Definirajmo $i := s_c \circ h$. Kao i prije slijedi $i(A) = A$, $i(B) = B$, $i(C) = C$.

Dakle, $i$ ima tri nekolinearna fiksne točke.

Po $Prop.5.(b)$ je $i = id$, pa je $s_c \circ s_b \circ s_a \circ f = id$, tj.

$$f = s_a^{-1} \circ s_b^{-1} \circ s_c^{-1} = s_a \circ s_b \circ s_c.$$

$\square$

**Propozicija**
*Slika poluravnine po izometriji je opet poluravnina.*