Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Prvi tjedan

Zadatak 1.* Dokažite da je moguće tupokutan trokut dužinama podijeliti na nekoliko šiljastokutnih trokuta.

Rješenje. Pogledajte raspravu ovdje. □

Zadatak 2.* Dokažite da je svaka izometrija ravnine kompozicija translacija, rotacija, osnih simetrija i centralnih simetrija.

Rješenje. Ideja je sljedeća.

Prvo komponiramo zadanu izometriju s nekoliko translacija, rotacija i osnih simetrija, na način da ima tri nekolinearne fiksne točke.

Nakon toga, dokažemo da svaka izometrija s tri nekolinearne fiksne točke mora biti identiteta.

Neka je f zadana izometrija. Neka je A proizvoljna točka u ravnini. Tada je kompozicija f i translacije za vektor $\overrightarrow{f(A)A}$ izometrija s fiksnom točkom A. Tu novu izometriju označimo s f_1.

Neka je sada $B \neq A$ proizvoljna točka u ravnini. Tada su B i $f_1(B)$ jednako udaljeni od A, pa leže na nekoj kružnici sa središtem u A. To znači da postoji rotacija sa središtem u A koja šalje $f_1(B)$ u B. Kompozicija f_1 i te rotacije ima fiksne točke A i B. Označimo tu novu izometriju s f_2.

Neka je C bilo koja točka u ravnini koja ne leži na pravcu AB. Tada $f_2(C)$ leži na kružnici sa središtem u A koja prolazi kroz C, te na kružnici sa središtem u B koja prolazi kroj C. To znači da je $f_2(C)$ ili jednako C ili drugoj točki presjeka tih dvaju kružnica.

Ako je $f_2(C) = C$, onda f_2 ima tri nekolinearne fiksne točke A, B, C. Ako je $f_2(C)$ druga točka presjeka kružnica, onda su C i $f_2(C)$ međusobno simetrične u odnosu na os AB. Tada kompozicija f_2 i osne simetrije s osi AB ima fiksne točke A, B, C. Tu novu izometriju zovimo f_3.

U svakom slučaju, moguće je postići da kompozicija f i nekoliko rotacija, translacija i osnih simetrija fiksira tri nekolinearne točke.

Dokažimo sada da svaka izometrija f s tri nekolinearne fiksne točke A, B, C mora biti identiteta.

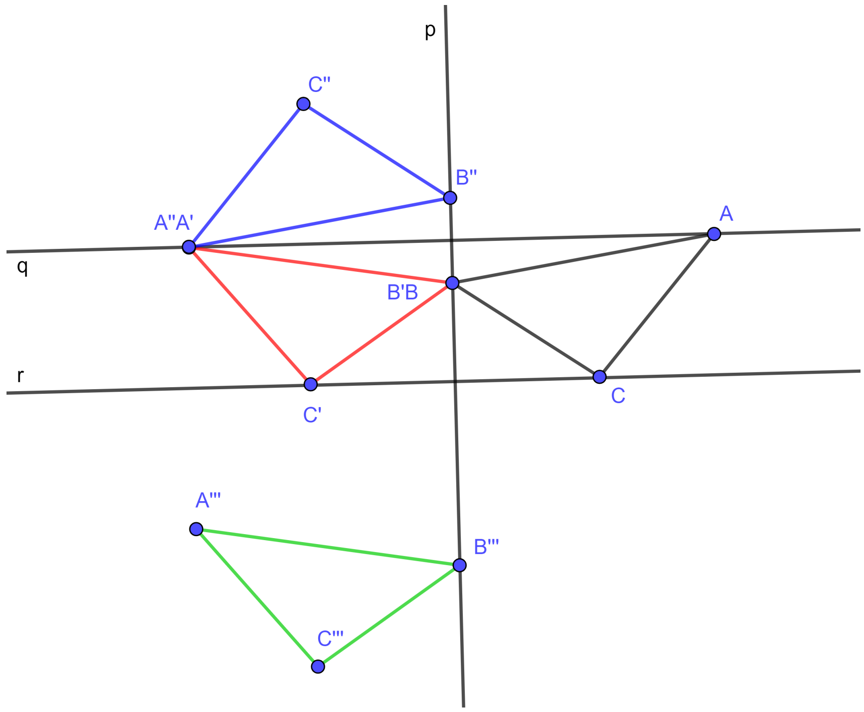
Neka je $D \neq A, B, C$ bilo koja točka u ravnini. Ako je $f(D) \neq D$, vrijedi da su pravci AB i AC simetrale dužine $\overline{Df(D)}$. Međutim, to je nemoguće jer A, B, C nisu kolinearne. Dakle, $f(D) = D$. □

Zadatak 3. Dani su pravci p, q i r takvi da je $q \parallel r$, $p \perp q$ i točke $A \in q$, $B \in p$, $C \in r$ takve da $d(B, q) = d(B, r)$. Odredite sliku trokuta ABC pri izometriji $f = s_r \circ s_q \circ s_p$.

Rješenje. Uvedimo sljedeće oznake:

$$s_p : A, B, C \mapsto A', B', C', \; s_q : A', B', C' \mapsto A'', B'', C'', \; s_p : A'', B'', C'' \mapsto A''', B''', C'''.$$

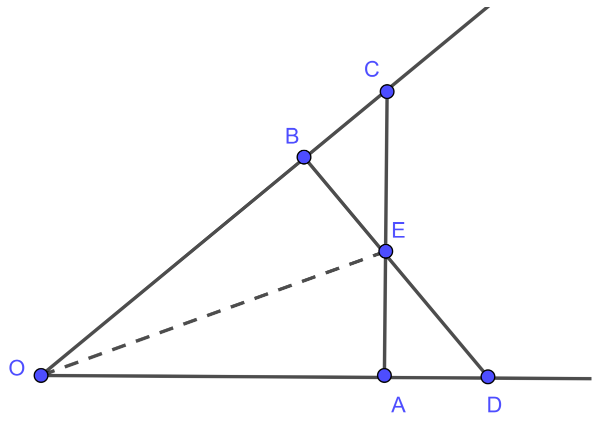
Tada je rješenje prikazano na sljedećoj slici:



$\square$

Zadatak 4. Na krakovima kuta s vrhom O dane su točke A i B tako da je $|OA| = |OB|$. Okomice na pripadajuće krakove u točkama A i B sijeku suprotni krak u točkama C i D, a međusobno se sijeku u točki E. Dokažite da su trokuti BCE i ADE sukladni.

Rješenje. Ideja je spojiti točke O i E jer tada dobivamo sukladne trokute $\triangle AOE$ i $\triangle BOE$. Naime, po SSK$^>$ poučku vidimo da sukladnost vrijedi jer $|OA| = |OB|$ po pretpostavci zadatka, $|OE|$ je zajednička stranica nasuprot najvećem kutu mjere $90° = \measuredangle OAE = \measuredangle OBE$.



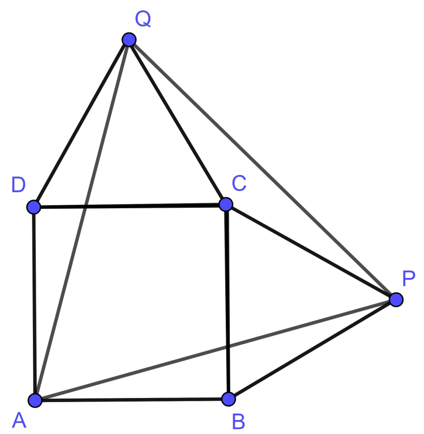
Iz $\triangle AOE \cong \triangle BOE$ slijedi $|AE| = |BE|$. Uočimo da u trokutima $\triangle EAD$ i $\triangle EBC$ imamo dva kuta uz stranice $\overline{AE}$ i $\overline{BE}$ istih mjera:

- $\measuredangle DAE = \measuredangle CBE = 90°$,
- $\measuredangle DEA = \measuredangle CEB$ jer su vršni kutevi.

Dakle, $\triangle BCE \cong \triangle ADE$ po KSK poučku. $\square$

Zadatak 5. Nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ konstruirani su jednakostranični trokuti BPC i DCQ. Dokažite da je trokut APQ jednakostraničan.

Rješenje. Pokazat ćemo $|AP| = |AQ| = |PQ|$. Pokazat ćemo da su trokuti $\triangle ABP, \triangle PCQ$ i $\triangle QDA$ sukladni.



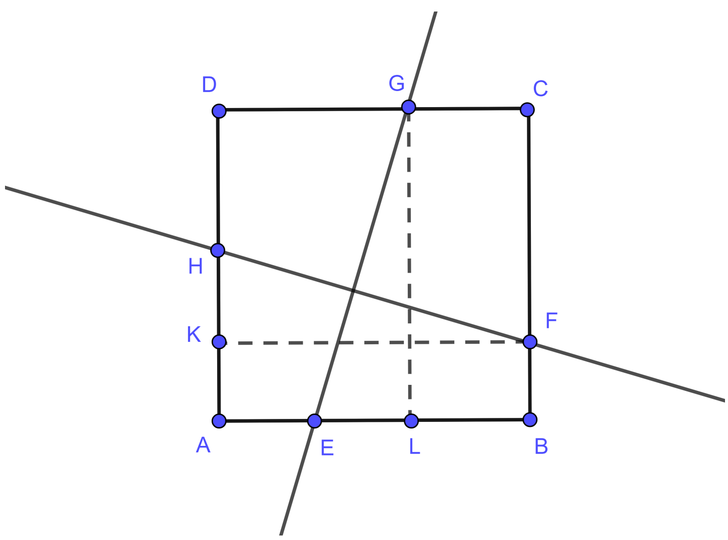
Označimo s a duljinu stranice kvadrata $ABCD$. Jer su trokuti $\triangle BCP$ i DCQ jednakostranični s po jednom stranicom na kvadratu, zaključujemo da su i preostale dvije stranice duljine a.

$$|AB| = |BP| = |PC| = |CQ| = |DQ| = |DA| = a$$

Uočimo da je za pokazati sukladnost $\triangle ABP \cong \triangle PCQ \cong \triangle QDA$, po SKS poučku, tada dovoljno pokazati $\measuredangle ABP = \measuredangle PCQ = \measuredangle QDA$. Imamo: $\measuredangle ABP = \measuredangle QDA = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ jer su to mjere unutarnjih kuteva u kvadratu i jednakostraničnom trokutu. Također, vrijedi: $\measuredangle PCQ = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$ pa slijedi tvrdnja zadatka. $\square$

Zadatak 6. Dva okomita pravca sijeku stranice $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ kvadrata $ABCD$ redom u točkama E, F, G, H. Dokažite da je $|EG| = |HF|$.

Rješenje. Kako bismo pokazali da su dužine $\overline{EG}$ i $\overline{HF}$ iste duljine, smjestit ćemo ih u dva sukladna trokuta.



Spustimo okomice iz točaka G i F na nasuprotne stranice kvadrata $ABCD$ te nožišta redom označimo L i K. Uočimo da su trokuti $\triangle GLE$ i $\triangle FKH$ sukladni po KSK poučku:

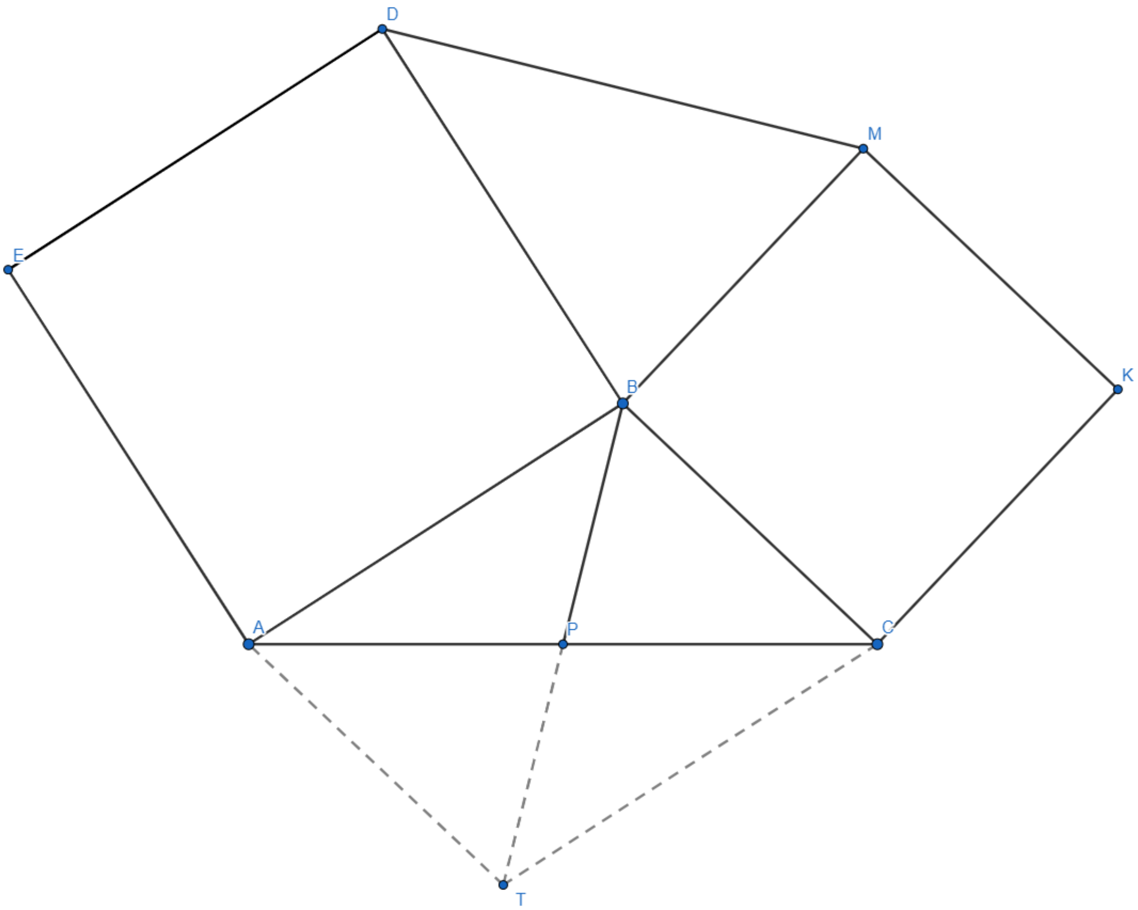
- $|GL| = |FK|$ jer su četverokuti $GLBC$ i $FKAB$ pravokutnici pa su $\overline{GL}$ i $\overline{FK}$ iste duljine kao i stranica kvadrata $ABCD$.

- $\measuredangle GLE = \measuredangle FKH = 90^\circ$ po definiciji točaka L i K.
- $\measuredangle LGE = \measuredangle KFH$ jer su to kutevi s okomitim kracima $EG \perp HF$ i $GL \perp KF$ (raspisati kuteve).

$\square$

Zadatak 7. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Dokažite da je duljina dužine $\overline{DM}$ dva puta veća od duljine težišnice $\overline{BP}$ trokuta ABC.

Rješenje. Neka je T točka na pravcu BP različita od B tako da $|BP| = |TP|$. Vrijedi: $\triangle APB \cong \triangle CPT$ jer je $|AP| = |PC|$, $|BP| = |PT|$ i $\measuredangle APB = \measuredangle TPC$ (vršni kutevi). Stoga je $|TC| = |AB| = c$.



Znamo da je $|TC| = |BD| = c$ i $|BC| = |BM| = a$. Nadalje, vrijedi da ječetverokut $ABCT$ paralelogram jer mu se dijagonale međusobno raspolavljaju.

Slijedi $TC \parallel AB$ i $BD \perp AB$, iz čega slijedi $TC \perp BD$. Sada iz $TC \perp BD$ i $CB \perp BM$ zaključujemo i $\measuredangle BCT = \measuredangle MBD$ preko jednakosti kuteva na okomitim pravcima.

Po SKS teoremu tada imamo da je $\triangle BCT \cong \triangle MBD$ pa je $|DM| = |BT|$ odnosno $|DM| = 2|BP|$. $\square$