Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Deseti tjedan

Zadatak 1. Odredite udaljenost točke $T = (2, 3, 1)$ od pravca

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-2}.$$

Rješenje. Riješit ćemo zadatak na dva načina, preko ortogonalne projekcije i preko determinante.

Za riješenje preko ortogonalne projekcije, potrebno je odrediti ortogonalnu projekciju točke T na pravac p (sa p označavamo zadani pravac). Označimo tu projekciju sa T', tada imamo $\overrightarrow{TT'} \perp \vec{s_p}$. Tu je $\vec{s_p} = (1, 2, -2)$ vektor smjera pravca p. S obzirom da $T' \in p$, tada postoji realni broj α takav da $T' = \alpha(1, 2, -2) + (-2, -1, 4)$. Tada

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TT'} \perp \vec{s_p} &\implies \overrightarrow{TT'} \cdot \vec{s_p} = 0 \implies (T' - T) \cdot \vec{s_p} = 0 \\
&\implies (\alpha(1, 2, -2) + (-2, -1, 4) - (2, 3, 1)) \cdot (1, 2, -2) = 0 \\
&\implies 9\alpha - 18 = 0 \implies \alpha = 2.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $T' = \alpha(1, 2, -2) + (-2, -1, 4) = (0, 3, 0)$. Stoga je udaljenost $|\overrightarrow{TT'}| = |(-2, 0, -1)| = \sqrt{5}$.

Za riješenje preko determinante, odaberimo bilo koju točku T_0 na pravcu p. Najpraktičnije nam je uzeti $T_0 := (-2, -1, 4)$. Neka je $\mathcal{P}$ paralelogram kojem su vrhovi točke T_0, T, $T + \vec{s_p}$ i $T_0 + \vec{s_p}$. Površinu od $\mathcal{P}$ možemo izraziti na dva načina:

$$P(\mathcal{P}) = |\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s_p}| = v \cdot |\vec{s_p}|,$$

gdje je $v \in \mathbb{R}_{>0}$ visina paralelograma $\mathcal{P}$ nad osnovicom kojoj su krajevi točke T_0 i $T_0 + \vec{s_p}$. Uočimo da je $d(T, p) = v$. Stoga računamo

$$d(T, p) = \frac{|\overrightarrow{T_0T} \times \vec{s_p}|}{|\vec{s_p}|} = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}.$$

$\square$

Zadatak 2. Odredite udaljenost točke $T = (2, 3, 1)$ od ravnine

$$3x + 4z + 5 = 0.$$

Rješenje. Računamo

$$d(T, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3.$$

Alternativno rješenje bi bilo odrediti ortogonalnu projekciju T_0 od T na π. Prvo izračunamo α takav da je $T_0 = T - \alpha\vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\pi$, gdje $\vec{n}_\pi = (3, 0, 4)$ (dobijemo linearnu jednadžbu u α iz $(T - \alpha\vec{n}_\pi) \cdot \vec{n}_\pi = 0$). Izračunamo $\alpha = 3/5$ i $T_0 = (1, 15, -7)/5$. Konačno imamo $|\overrightarrow{T_0T}| = 3$. $\square$

Zadatak 3. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži x-os i koja s ravninom $x = y$ zatvara kut od $60°$.

Rješenje. Neka je π tražena ravnina, i neka je $\vec{n} = (a, b, c)$ vektor normale od π. Dodatno pretpostavimo $|\vec{n}| = 1$. S obzirom da je x-os sadržana u π, te je $(1, 0, 0)$ vektor smjera od x-osi, imamo $(1, 0, 0) \perp \vec{n} \implies a = 0$. Označimo $x = y$ ravninu sa Σ. Očito je Σ dvodimenzionalni potprostor od V^3 razapet vektorima $(1, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$. Naime Σ sadrži oba ta vektora, ta dva su nezavisna i Σ sadrži ishodište. Imamo da je $\vec{n}_\Sigma = (1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0)$ vektor normale od Σ.

Ključno je uočiti da je $\angle(\pi, \Sigma) = \angle(\vec{n}, \vec{n}_\Sigma)$. Stoga

$$a - b = \vec{n} \cdot \vec{n}_\Sigma = |\vec{n}||\vec{n}_\Sigma| \cos 60° = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Iz $a = 0$, zaključujemo $b = -1/\sqrt{2}$. Sad iz $|\vec{n}| = 1$ slijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, tj. $c^2 = 1/2$. Za različite izbore c dobijemo da postoje dvije takve ravnine:

$$\begin{aligned} c = \frac{1}{\sqrt{2}} &\implies \pi_1 \ldots -\frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \iff -\boxed{y + z = 0}, \\ c = -\frac{1}{\sqrt{2}} &\implies \pi_2 \ldots -\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \iff \boxed{y + z = 0}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 4. Odredite jednadžbu simetrala kutova koje zatvaraju pravci

$$p \ldots \frac{x+5}{-3} = \frac{y-14}{6} = \frac{z+3}{2} \quad \text{i} \quad q \ldots \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{6}.$$

Rješenje. S obzirom da p i q *zatvaraju kutove*, očekujemo da imaju presjek. Istovremeno riješavajući sustave

$$p \ldots \begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = 14 + 6t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \qquad q \ldots \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = -1 - 3s \\ z = -1 + 6s \end{cases},$$

dobijemo da je $T := p \cap q = (1, 2, -7)$. Vektor smjera simetrale kuta koji zatvaraju ta dva pravaca je

$$\frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|} + \frac{\vec{s}_2}{|\vec{s}_2|} = \frac{(-3, 6, 2)}{\sqrt{49}} + \frac{(2, -3, 6)}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}(-1, 3, 8).$$

Točka T se nalazi na simetrali, dakle jednadžba pravca je

$$\ell_1 \ldots \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}.$$

Uočimo da p i q zapravo zatvaraju dva, međusobno *suplementarna* kuta (suma im je $180°$). Jedan način da dobijemo i simetralu suplementarnog kuta je da umjesto vektora smjerova $\vec{s}_1/|\vec{s}_1|, \vec{s}_2/|\vec{s}_2|$ promatramo $\vec{s}_1/|\vec{s}_1|$ i $-\vec{s}_2/|\vec{s}_2|$. Tada je vektor smjera druge simetrale

$$\frac{\vec{s}_1}{|\vec{s}_1|} + \frac{-\vec{s}_2}{|\vec{s}_2|} = \frac{(-3, 6, 2)}{\sqrt{49}} - \frac{(2, -3, 6)}{\sqrt{49}} = \frac{1}{7}(-5, 9, -4).$$

Onda je jednadžba druge simetrale

$$\ell_2 \ldots \frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{9} = \frac{z+7}{-4}.$$

□

Zadatak 5. Zadani su pravci

$$p \ldots \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0}, \quad n \ldots \begin{cases} x + 2y + 2z = 4, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Odredite sve pravce q koji su paralelni s p i udaljeni od p za 3 za koje je n zajednička normala od p i q.

Rješenje. Uočimo da $p \parallel q \implies \vec{s}_p = \vec{s}_q$, stoga nam je dovoljno odrediti jednu točku na q da bi zabisali jednadžbu tog pravca. Izračunajmo $T := p \cap n = (x_0, y_0, z_0)$. Iz $T \in p$, dobijemo $z_0 = 0$. Kada to uvrstimo u sustave za $T_0 \in n$, dobijemo

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 = 4, \\ x_0 + y_0 = 1 \end{cases} \implies T = (-2, 3, 0).$$

□

Neka je sad $T' := q \cap n$. Uočimo da T i T' oboje leže na n, te je T' udaljena za točno 3 od T. Vektor smjera od n možemo izračunati sa $\vec{s}_n = (1,2,2) \times (1,1,0) = (-2,2,-1)$. Imamo $T' = T + \alpha \vec{s}_n$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Onda je $|TT'| = |\alpha||\vec{s}_n| = 3|\alpha| = 3$. To znači $|\alpha| = 1$. Imamo dva slučaja:

Ako je $\alpha = 1$, onda $T' = (-4, 5, -1)$ pa pravac q ima jednadžbu

$$q_1 \ldots \frac{x+4}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+1}{0}.$$

Inače, ako je $\alpha = -1$, onda $T' = (0, 1, 1)$ pa imamo jednadžbu pravca

$$q_2 \ldots \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

Zadatak 6. U prostoru su dane točke $A = (0, 1, -1)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (2, 2, 2)$. Neka je D presjek simetrale unutarnjeg kuta $\angle BAC$ i stranice $\overline{BC}$. Odredite jednadžbu ravnine koja sadrži točku D i pravac

$$p \ldots \begin{cases} x + 3y + 2z = 1, \\ 4x - y + 3z = -4. \end{cases}$$

Rješenje. Neka je π ravnina koju treba odrediti. Označimo duljine stranica $\triangle ABC$ sa a, b, c. Iz teorema o simetrali kuta imamo $|BD| : |DC| = c : b$. Iz toga nije teško dobiti

$$\lambda := \frac{|BD|}{|BC|} = \frac{c}{b+c}.$$

Dakle imamo $\overrightarrow{BD} = \lambda \overrightarrow{BC}$, tj. drugim riječima D dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru $\lambda = (b+c)/c$. Tada imamo formulu

$$\overrightarrow{AD} = (1 - \lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}.$$

Primijetimo $A \in p$ jer zadovoljava obe jednadžbe u sustavu za p. Računamo vektor smjera od p sa $\vec{s}_p = (1,3,2) \times (4,-1,3) = (11, 5, -13)$. Tada su $\vec{s}_p$ i $\overrightarrow{AD}$ (jer su A i D oboje sadržani u π) dva vektora koja su okomita na $\vec{n}_\pi$. Računamo

$$\overrightarrow{AD} \times \vec{s}_p = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} \times \vec{s}_p + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} \times \vec{s}_p = \frac{b(-10, 35, 5) + c(-28, 59, -1)}{b+c}.$$

$$\implies \text{biramo } \vec{n}_\pi := b(-10, 35, 5) + c(-28, 59, -1).$$

Imamo da je $A \cdot \vec{n}_\pi = 30b + 60c$. Kad uvrstimo $b = \sqrt{14}, c = \sqrt{5}$, dobijemo da je jednadžba ravnine

$$\pi \ldots (-10\sqrt{14} - 28\sqrt{5})x + (35\sqrt{14} + 59\sqrt{5})y + (5\sqrt{14} - \sqrt{5})z = 30\sqrt{14} + 60\sqrt{5}.$$

$\square$