Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Jedanaesti tjedan

Zadatak 1. Odredite za svaku od sljedećih krivulja drugog reda je li elipsa, hiperbola ili parabola. Ako je neka od njih elipsa, odredite je li kružnica ili ne.

(a) $x^2 + 4xy + 3y^2 - y - 1 = 0.$

(b) $5x^2 - 6xy + 18y^2 - 9 = 0.$

(c) $y^2 + 2y + 4xy - 16x - 19 = 0.$

(d) $2x^2 - y^2 - 2xy - 2y + 2 = 0.$

(e) $x^2 + 2x - y^2 + 1 = 0.$

Rješenje. Ideja je *afinim transformacijama* svesti jednadžbe u kanonski oblik. Podsjetimo se da su afine transformacije preslikavanja oblika $\mathbb{R}^2 \ni \vec{v} \mapsto A\vec{v} + \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, gdje je $A \in M(\mathbb{R})_{2\times 2}$ regularna matrica i $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ vektor. Ključna činjenica je da afine transformacije preslikavaju elipse u elipse, parabole u parabole i hiperbole u hiperbole. Slično vrijedi i za ostale, degenerirane krivulje drugog reda (dva pravca koja se sijeku, dva paralelna pravca, pravac, jedna točka ili prazan skup).

U praksi, prvo ćemo se probat riješiti xy člana, a potom linearnih članova x, y.

(a)

$$\begin{aligned} & x^2 + 4xy + 3y^2 - y - 1 = 0 \\ \Longrightarrow\ & x_1^2 - y_1^2 - y_1 - 1 = 0 \qquad (x_1 = x + 2y,\ y_1 = y) \\ \Longrightarrow\ & \boxed{x_2^2 - y_2^2 = 3} \qquad (x_2 = 2x_1,\ y_2 = 2y_1 + 1) \Longrightarrow \text{HIPERBOLA.} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & 5x^2 - 6xy + 18y^2 - 9 = 0 \\ \Longrightarrow\ & 5(x - \frac{3}{5}y)^2 - \frac{9}{5}y^2 + 18y^2 - 9 = 0 \Longrightarrow (5x - 3y)^2 + 81y^2 - 45 = 0 \\ \Longrightarrow\ & \boxed{x_1^2 + y_1^2 = 45} \qquad (x_1 = 5x - 3y,\ y_1 = 9y). \end{aligned}$$

Unatoč prvom dojmu, ova krivulja **nije kružnica**. Prethodno smo napomenuli da općenito afine transformacije čuvaju vrstu krivulje, ali postoji jedna bitna iznimka. Afine transformacije preslikavaju elipse u elipse, ali kružnica se ne mora preslikati u kružnicu. Također i elipsa koja nije kružnica se može preslikati u kružnicu.

Za ilustraciju, kao primjer uzmimo neku elipsu u kanonskom obliku $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Nakon zamjene koordinata $x' = \frac{x}{a}, y' = \frac{y}{b}$ dobijemo $(x')^2 + (y')^2 = 1$ tj. jednadžbu kružnice.

Kriterij. Neka je $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ jednadžba elipse (drugim riječima, afinom zamjenom koordinata se može svesti u oblik $(x')^2 + (y')^2 = 1$). Tada

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \text{ je kružnica} \iff a = c \text{ i } b = 0. \tag{1}$$

Dakle u primjeru (b), nakon što dođemo do $x_1^2 + y_1^2 = 45$, odmah vidimo da se radi o elipsi. Da vidimo je li se specijalno radi i o kružnici, moramo pogledati početnu jednadžbu. Tu imamo $a = 5$, $b = -6$, $c = 18$. S obzirom da $a \neq c$, to znači da **krivulja nije kružnica nego samo elipsa**.

(c)

$$\begin{aligned}
&y^2 + 2y + 4xy - 16x - 19 = 0 \\
\Longrightarrow\ &(y + 2x)^2 - 4x^2 + 2y - 16x - 19 = 0 \\
\Longrightarrow\ &(x_1 + 5)^2 - (y_1 + 1)^2 = 5 \qquad (x_1 = 2x,\ y_1 = y + 2x) \Longrightarrow \text{HIPERBOLA.}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
&2x^2 - y^2 - 2xy - 2y + 2 = 0 \\
\Longrightarrow\ &3x_1^2 - y_1^2 + 2x_1 - 2y_1 + 2 = 0 \qquad (x_1 = x,\ y_1 = x + y) \\
\Longrightarrow\ &3(y_1 + 1)^2 - (3x_1 + 1)^2 = 8 \\
\Longrightarrow\ &\boxed{3x_2^2 - y_2^2 = 8} \qquad (x_2 = y_1 + 1,\ y_2 = 3x_1 + 1) \Longrightarrow \text{HIPERBOLA.}
\end{aligned}$$

(e)

$$x^2 + 2x + 1 - y^2 = 0 \Longrightarrow \boxed{(x + 1 + y)(x + 1 - y) = 0}.$$

Dakle krivulja je zapravo unija dva neparalelna pravca $x + 1 + y = 0$ i $x + 1 - y = 0$. Vidimo da imaju presjek u $(-1, 0)$.

$\square$

Zadatak 2. Odredite jednadžbe tangenti kroz točku $P = (2, 3)$ na:

(a) kružnicu $(x - 1)^2 + y^2 = 1$,

(b) hiperbolu $x^2 - y^2 = 9$.

Rješenje. (a) U 'formulama' za konike nam piše da je uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ to da vrijedi jednadžba

$$r^2(k^2 + 1) = (q - kp - l)^2. \tag{2}$$

Ako P leži na pravcu $y = kx + l$, onda imamo $2k + l = 3$. Kad uvrstimo $l = 3 - 2k$, $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$ u (2), dobijemo $k^2 + 1 = (k - 3)^2 \Longrightarrow k = \frac{4}{3}$. Tada je $l = 3 - 2k = \frac{1}{3}$ pa je jednadžba pravca $\boxed{y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}}$.

Moramo pažljivo razmisliti što smo zapravo sada napravili. Pokazali smo da ako je ℓ pravac kroz P tangentan na kružnicu i ako je ℓ oblika $y = kx + l$, onda je $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$. Dakle trebamo još razmotriti slučaj kad ℓ nije takvog oblika, tj. paralelan je s y-osi. Općenito za kružnicu $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, imat ćemo dvije tangente koje su paralelne s y-osi: $x = p + r$ i $x = p - r$. U našem slučaju te dvije su $x = 2$ i $x = 0$. Vidimo da je pravac $\boxed{\text{x=2}}$ također rješenje jer prolazi kroz P i tangenta je na kružnicu, iako ga nismo uspjeli "detektirati" kriterijem (2).

(b) Kriterij da $y = kx + l$ dira hiperbolu je

$$a^2k^2 - b^2 = l^2. \tag{3}$$

Uvrstimo $a^2 = 9, b^2 = 9, l = 3 - 2k$ i dobijemo

$$9k^2 - 9 = (3-2k)^2 \implies k = \frac{-6 \pm 3\sqrt{14}}{5}.$$

Kad iskoristimo $l = 3 - 2k$, dobijemo da su tražene tangente pravci $\boxed{y = \frac{-6-3\sqrt{14}}{5}x + \frac{27+6\sqrt{14}}{5}}$ i $\boxed{y = \frac{-6+3\sqrt{14}}{5}x + \frac{27-6\sqrt{14}}{5}}$.

Pravce oblika $x =$ konst. (kao npr. u podzadatku (a)) ne moramo ni provjeravati jer općenito kroz točku P postoje najviše 2 tangente na koniku $\mathcal{C}$, a mi smo upravo našli obe. Čisto iz znatiželje, hiperbola $x^2 - y^2 = 9$ siječe y–os u $x = 3$ i $x = -3$, i ta dva pravca su zapravo sve tangente na zadanu hiperbolu koje su paralelne s y-osi. Očekivano, nijedna od te dvije ne prolazi kroz P.

$\square$

Zadatak 3. Neka su p, q zadani realni brojevi, te neka su r, R zadani pozitivni realni brojevi. Odredite geometrijsko mjesto svih točaka P za koje vrijedi da se kružnica radijusa R čije središte je P siječe s kružnicom $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ pod pravim kutem.

Rješenje. Neka je točka $P = (x_P, y_P)$ središte prve kružnice, K_1, čiji je radijus R. Druga kružnica, K_2, ima jednadžbu $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Njeno središte je $S = (p, q)$ i radijus je r.

Dvije kružnice se sijeku pod pravim kutem ako imaju dvije točke presjeka i ako su tangente na kružnice u tim točkama međusobno okomite. To je ekvivalentno s time da su za barem jednu točku presjeka radijusi povučeni iz središta kružnica do nje međusobno okomiti (a onda to vrijedi i za obe točke presjeka).

Neka je onda T neka točka presjeka K_1 i K_2. Imamo da je $\overline{PT} \perp \overline{ST}$, stoga je $\triangle PTS$ pravokutan. Iz Pitagorinog poučka slijedi $|PS|^2 = |ST|^2 + |TP|^2 = r^2 + R^2$, dakle

$$(x_P - p)^2 + (y_P - q)^2 = R^2 + r^2.$$

Zamjenom (x_P, y_P) s (x, y) dobivamo jednadžbu traženog geometrijskog mjesta:

$$\boxed{K_0 : (x-p)^2 + (y-q)^2 = R^2 + r^2.}$$

Uočimo da obratno vrijedi: ako je $P' \in K_0$, K' kružnica radijusa R sa središtem u P, može se pokazati da postoji presjek $T' \in K' \cap K$, te onda imamo $|P'S|^2 = r^2 + R^2 = |ST'|^2 + |TP'|^2 \implies \triangle P'T'S$ pravokutan, dakle $\overline{P'T'} \perp \overline{ST'}$ i kružnice K', K_2 se sijeku okomito.

$\square$

Zadatak 4. Dokažite da sve polare točaka pravca $y = x$ s obzirom na kružnicu $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ prolaze istom točkom. Koja je to točka?

Rješenje. Zapišimo jednadžbu kružnice u standardnom obliku:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$$

Neka je $T = (t, t)$ proizvolja točka na pravcu $y = x$. Jednadžba polare točke (x_0, y_0) na kružnicu sa središtem u (p, q) i radijusom r glasi

$$(x_0 - p)(x - p) + (y_0 - q)(y - q) = r^2.$$

Za $(x_0, y_0) = (t, t)$, $(p, q) = (3, -2)$ i $r = 3$, jednadžba polare je

$$(x + y - 1)t + (-3x + 2y + 4) = 0.$$

Sada imamo familiju pravaca (polara) parametriziranu s t. Da bi svi ti pravci prolazili istom točkom (x', y'), koordinate te točke moraju zadovoljavati jednadžbu za svaki t. To je jedino moguće ako su izraz uz t i slobodni član oboje jednaki nuli:

$$\begin{aligned} x' + y' - 1 &= 0 \\ -3x' + 2y' + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Sustav ima jedinstveno rješenje $(x', y') = (6/5, -1/5)$. Zaključujemo da sve polare prolaze istom točkom $\boxed{K := (6/5, -1/5)}$. $\square$

Zadatak 5. Neka su $a, b > 0$ realni brojevi. Dokažite da se tangente iz točke P na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ sijeku pod pravim kutem ako i samo ako P leži na kružnici radijusa $\sqrt{a^2 + b^2}$ sa središtem u ishodištu.

Rješenje. Neka je $P = (x_0, y_0)$ i $y = kx + l$ pravac kroz P koji je tangentan na elipsu. P leži na pravcu pa je $y_0 = kx_0 + l$. Uvjet da $y = kx + l$ dira elipsu je

$$a^2k^2 + b^2 = l^2$$

Uvrštavanjem $l = y_0 - kx_0$, dobivamo kvadratnu jednadžbu po k

$$(x_0^2 - a^2)k^2 - 2x_0y_0k + (y_0^2 - b^2) = 0.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe k_1 i k_2 su koeficijenti smjera dviju tangenti iz točke P na elipsu. Dakle dvije tangente iz P se sijeku pod pravim kutem ako i samo ako je $k_1k_2 = -1$. Prema Vieteinim formulama, za kvadratnu jednadžbu $ak^2 + bk + c = 0$, umnožak rješenja je c/a. Dakle,

$$k_1k_2 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} \text{tangente iz } P \text{ okomite} &\iff k_1k_2 = -1 \iff \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} = -1 \\ &\iff x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2 \iff P \in K. \end{aligned}$$

gdje je K kružnica radijusa $\sqrt{a^2 + b^2}$ sa središtem u ishodištu. $\square$

Zadatak 6. Dana je hiperbola i neka tangenta na nju. Dokažite da dirалište tangente i hiperbole raspolavlja dužinu čije su rubne točke presjeci te tangente s asimptotama hiperbole.

Rješenje. Uočimo prvo da afine transformacije ravnine čuvaju polovišta. Neka je $f(T) := AT + b$ neka afina transformacija, jednostavnim računom vidimo da je

$$M = \frac{T_1 + T_2}{2} \iff AM + b = \frac{AT_1 + b + AT_2 + b}{2} \iff f(M) = \frac{f(T_1) + f(T_2)}{2}.$$

Dakle točka M je polovište dužine $\overline{T_1T_2}$ ako i samo ako je $f(M)$ polovište dužine $\overline{f(T_1)f(T_2)}$. Nama će trebati samo tvrdnja za polovišta, ali napomenimo da vrijedi još jača tvrdnja, a to je da su očuvani i omjeri. Preciznije, točka P dijeli dužinu $\overline{f(A)f(B)}$ u omjeru λ ako i samo ako $f(P)$ dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ.

Ako je $\mathcal{H}$ hiperbola iz zadatka, možemo uzeti afinu transformaciju f koja je slika u hiperbolu $\mathcal{H}\prime : x^2 - y^2 = 1$. Imamo da f šalje tangente od H u tangente od $\mathcal{H}\prime$, analogno vrijedi i za asimptote. Dakle dovoljno je dokazati sljedeću verziju zadatka:

Neka je P točka na hiperboli $\mathcal{H}_0 : x^2 - y^2 = 1$. Neka je ℓ tangenta na $\mathcal{H}_0$ u P i neka su T_1, T_2 redom sjecišta od ℓ i dvije asimptote od H_0 (to su $y = x$ i $y = -x$). Tada je P polovište dužine $\overline{T_1T_2}$. Označimo $P = (x_0, y_0)$. Uvjet da t dira $\mathcal{H}_0$ je $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$. Kad uvrstimo

$a = b = 1$, dobijemo

$$t : \ x_0x - y_0y = 1.$$

Za naći točku T_1, uvrštavamo $y = x$ pa dobijemo $x_0x - y_0x = 1$, tj. $T_1 = (\frac{1}{x_0-y_0}, \frac{1}{x_0-y_0})$. Slično za T_2 uvrstimo $y = -x$ i iz $x_0x + y_0x = 1$, dobijemo $T_2 = (\frac{1}{x_0+y_0}, -\frac{1}{x_0+y_0})$. Imamo

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 &= \left(\frac{1}{x_0 - y_0} + \frac{1}{x_0 + y_0}, \frac{1}{x_0 - y_0} - \frac{1}{x_0 + y_0} \right) \\ &= \left(\frac{2x_0}{x_0^2 - y_0^2}, \frac{2y_0}{x_0^2 - y_0^2} \right) = (2x_0, 2y_0) = 2P. \end{aligned}$$

Tu smo koristili $x_0^2 - y_0^2 = 1$ da se riješimo nazivnika. Dakle dokazali smo $P = (T_1 + T_2)/2$, tj. P je polovište od $\overline{T_1T_2}$.

$\square$