Elementarna matematika 2

Rješenja zadataka s vježbi
Dvanaesti tjedan

Zadatak 1. Dana je elipsa takva da normala u svakoj njenoj točki prolazi njenim središtem. Dokažite da je ta elipsa kružnica.

Rješenje. Neka je $\mathcal{E}$ zadana elipsa. S ciljem dobivanja kontradikcije, pretpostavimo da $\mathcal{E}$ nije kružnica. Tada ona ima dva različita fokusa F_1, F_2. Neka je $P \in \mathcal{E}$ točka na elipsi koja se ne nalazi na optičkoj osi, tj. pravcu F_1F_2 (ta pretpostavka nam je potrebna da kut $\angle F_1PF_2$ ne bude 0). Optičko svojstvo elipse nam kaže da je normala n_P na $\mathcal{E}$ u P simetrala kuta $\angle F_1PF_2$.

Zaključujemo da se u $\triangle F_1PF_2$ težišnica i simetrala kuta $\angle P$ podudaraju (oboje su n_P), dakle trokut je jednakokračan i imamo $|F_1P| = |F_2P|$. To znači da $P \in s := \mathrm{sim}(\overline{F_1F_2})$.

Upravo smo dokazali da se svaka točka na elipsi nalazi na optičkoj osi F_1F_2 ili simetrali dužine $\overline{F_1F_2}$ što je očito kontradikcija. Naime svaki pravac siječe elipsu u najviše dvije točke, pa je dovoljno uočiti da $\mathcal{E}$ sadrži više od 4 točke. □

Zadatak 2. Dokažite da su tangente na parabolu povučene iz bilo koje točke njene direktrise međusobno okomite.

Rješenje. Koordinatizirajmo ravninu tako da zadana parabola ima jednadžbu

$$\mathcal{P} : y^2 = 2px.$$

Neka je P neka točka na direktrisi, njene koordinate su onda $P = (-p/2, y_0)$. Neka su t_1, t_2 tangente iz P na $\mathcal{P}$ i T_1, T_2 točke u kojima te tangente diraju parabolu. Za pravac $y = kx + l$ koji prolazi kroz P i dira $\mathcal{P}$ imamo da vrijedi

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{-kp}{2} + l \\ p &= 2kl \implies p = 2k(y_0 + \frac{kp}{2}) \implies k^2 + \frac{2y_0}{p}k - 1 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Rješenja k_1 i k_2 kvadratne jednadžbe (1) su koeficijenti smjera pravaca t_1 i t_2. Iz Vietovih formula imamo $k_1k_2 = -1$. To je također uvjet za okomitost pravaca i s time smo onda dokazali $t_1 \perp t_2$. □

Zadatak 3. Dana je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i točka D na njoj. Tangenta na elipsu kroz točku D siječe y-os u točki T, a normala kroz točku D siječe y-os u točki N. Dokažite da fokusi elipse leže na kružnici opisanoj trokutu TDN.

Rješenje. Bit će nam korisna tvrdnja koju smo spomenuli na vježbama (vidi *Tjedan 4, Zad 3*). Navodimo je ovdje u prikladnom obliku:

Lema. Neka je ω opisana kružnica $\triangle ABC$. Tada se $\mathrm{sim}(\angle BAC)$ i $\mathrm{sim}(\overline{BC})$ sijeku na ω. Nadalje, ako je ℓ pravac kroz A okomit na $\mathrm{sim}(\angle BAC)$, tada se presjek pravaca ℓ i $\mathrm{sim}(\overline{BC})$ također nalazi na ω.

Vratimo se na zadatak. Neka je $\mathcal{E}$ zadana elipsa i neka su F_1, F_2 njeni fokusi. Neka je ℓ tangenta na $\mathcal{E}$ u P i n_P normala. Promatramo $\triangle F_1DF_2$. Uočimo da se y-os podudara sa simetralom dužine $\overline{F_1F_2}$. Također, iz optičkog svojstva elipse $\mathrm{sim}(\angle F_1DF_2) = n_P$. To znači da je $N = \mathrm{sim}(\angle F_1DF) \cap \mathrm{sim}(\overline{F_1F_2})$. Nadalje $T = \ell \cap \mathrm{sim}(\overline{F_1F_2})$ kao u spomenutoj lemi. Zaključujemo da N i T leže na opisanoj kružnici trokuta $\triangle F_1DF_2$, dakle svih 5 točaka F_1, F_2, D, N, T su konciklične. $\square$

Zadatak 4. Dokažite da površina trokuta koji zatvaraju asimptote hiperbole i tangenta na hiperbolu ne ovisi o izboru tangente.

Rješenje. Neka je $\mathcal{H}$ hiperbola iz zadatka i neka je $\mathcal{H}_0 : x^2 - y^2 = 1$ kanonska hiperbola. Pokažimo prvo da nam je dovoljno riješiti zadatak za slučaj hiperbole $\mathcal{H}_0$.

Postoji afina transformacija (bijekcija $f : \mathbb{R}^2 \ni x \mapsto Ax + b \in \mathbb{R}^2$ gdje $A \in M(\mathbb{R})_{2\times 2}$, $b \in \mathbb{R}^2$) takva da

$$f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_0.$$

Za proizvoljan trokut u ravnini $\triangle ABC$, tada vrijedi

$$P(f(\triangle ABC)) = \det A \cdot P(\triangle ABC).$$

Dakle za bilo koja dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ vidimo da su im površine jednake ako i samo ako su površine od $f(\triangle ABC)$ i $f(\triangle A'B'C')$ jednake. Može se provjeriti da su i ostala svojstva očuvana s transformacijom f (asimptote od $\mathcal{H}$ se šalju u asimptote od $\mathcal{H}_0$, tangenta na $\mathcal{H}$ se šalje u tangentu na $\mathcal{H}_0$) dakle dovoljno je dokazati da svi zadani trokuti na $\mathcal{H}_0$ imaju istu površinu.

Hiperbola $\mathcal{H}_0$ ima asimptote $a_1 : y = x$ i $a_2 : y = -x$. Neka je t neka tangenta na $\mathcal{H}_0$ i neka je točka P njeno diralište s hiperbolom. Ako označimo $P = (x_0, y_0)$, tada t ima jedandžbu

$$t : x_0x - y_0y = 1.$$

Da bi odredili presjek s asimptotom a_1 uvrstimo $y = x$ u tu jednadžbu i dobijemo $T_1 := t \cap a_1 = (\frac{1}{x_0-y_0}, \frac{1}{x_0-y_0})$. Slično $T_2 := t \cap a_2 = (\frac{1}{x_0+y_0}, \frac{-1}{x_0+y_0})$. Pravci t, a_1 i a_2 zatvaraju trokut $\triangle OT_1T_2$ gdje je O ishodište. Računamo površinu

$$2P(\triangle OT_1T_2) = |\det(\overrightarrow{OT_1}, \overrightarrow{OT_2})| = |\det \begin{bmatrix} \frac{1}{x_0-y_0} & \frac{1}{x_0-y_0} \\ \frac{1}{x_0+y_0} & \frac{-1}{x_0+y_0} \end{bmatrix}| = \frac{2}{x_0^2 - y_0^2} = \frac{2}{1} = 2.$$

Dakle $\boxed{P(\triangle OT_1T_2) = 1}$ neovisno o početnom izboru tangente t. $\square$

Zadatak 5. Dokažite da sve tetive parabole koje su hipotenuze pravokutnog trokuta s pravim kutem u ishodištu prolaze istom točkom.

Rješenje. Neka je parabola dana jednadžbom $\mathcal{P} : y^2 = 2px$. Ako postoji takva točka kojom prolaze sve tetive, uočimo da mora biti na x–osi. Naime ako imamo tetivu t koja tvori pravi kut s ishodištem, preslika te tetive t' preko x osi također tvori pravi kut s ishodištem. Ako t nije paralelna s y-osi, onda je presjek t i t' točka koja se nalazi na x-osi.

Najjednostavniji primjer tetive koja s ishodištem tvori pravokutan trokut je onda $\overline{UV}$ za $U = (2p, 2p), V = (2p, -2p)$. Ona siječe x–os u $\boxed{T := (2p, 0)}$.

Neka su onda $A, B \in \mathcal{P}$ takve da $\angle AOB = 90°$. Dokazat ćemo da je $(2p, 0) \in AB$. Ako je $A = (x_1, y_1)$, imamo $y_1^2 = 2px_1 \implies A = (y_1^2/(2p), y_1)$ i analogno $B = (y_2^2/(2p), y_2)$. Iz okomitosti vrijedi $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ dakle

$$\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2} + y_1y_2 = 0 \implies y_1y_2 = -4p^2. \tag{2}$$

Napomenimo da znamo $y_1 \neq 0$ i $y_2 \neq 0$ jer $A \neq O$ i $B \neq O$. Koristimo determinantu kao kriterij za kolinearnost pa imamo da su A, B, T kolinearne ako i samo ako:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{y_1^2}{2p} & \frac{y_2^2}{2p} & 2p \\ y_1 & y_2 & 0 \end{bmatrix} = 0 \iff \left(2py_1 + \frac{y_1^2 y_2}{2p}\right) - \left(2py_2 + \frac{y_2^2 y_1}{2p}\right) = 0 \tag{3}$$

Kad uvrstimo rezultat iz jednadžbe (2) vidimo da su obe zagrade u (3) jednake 0 što dokazuje tvrdnju da je $T \in AB$.

□

Zadatak 6. Neka su F_1 i F_2 fokusi elipse, te A i B glavna tjemena elipse(sjecišta pravca kroz fokuse i elipse), tako da je F_1 između A i F_2. Neka je P točka na elipsi, te neka je Q diralište kružnice upisane trokutu F_1F_2P i dužine $\overline{F_1F_2}$. Dokažite da je $|AQ| = |F_1P|$.

Rješenje. Neka je ω upisana kružnica u $\triangle PF_1F_2$. Neka su U, V redom dirališta od ω sa $\overline{F_1P}, \overline{F_2P}$. Da si olakšamo život uvodimo oznake

$$\begin{aligned} x &:= |F_1Q| = |F_1U|, \\ y &:= |F_2Q| = |F_2V|, \\ z &:= |PU| = |PV|. \end{aligned} \tag{4}$$

Točka A je na elipsi pa imamo

$$\begin{aligned} &2a = |AF_1| + |AF_2| = |AF_1| + |AF_1| + x + y = 2(|AF_1| + x) - x + y = 2|AQ| - x + y \\ &\implies 2|AQ| = 2a + x - y \end{aligned} \tag{5}$$

Točka P je na elipsi pa

$$\begin{aligned} &2a = |PF_1| + |PF_2| = x + z + z + y = 2(x + z) - x + y = 2|PF_1| - x + y \\ &\implies 2|PF_1| = 2a + x - y \end{aligned} \tag{6}$$

Iz izraza (5) i (6) zaključujemo $|AQ| = |PF_1|$. □

Zadatak 7. Odredite jednadžbu kružnice koja u točkama $(8, 8)$ i $(8, -8)$ siječe parabolu $y^2 = 8x$ pod pravim kutem.

Rješenje. Riješimo zadatak nešto općenitije, da nas proizvoljna konstanta 8 ne zbunjuje. Recimo da imamo parabolu $\mathcal{P} : y^2 = 2px$ i točke na njoj $A = (2p, 2p), B = (2p, -2p)$. Cilj nam je odrediti jednadžbu kružnice ω koja siječe $\mathcal{P}$ pod pravim kutem u A i B. Neka su t_A i t_B tangente na $\mathcal{P}$ u A i B, te neka su ℓ_A i ℓ_B pravac kroz A i pravac kroz B koji su redom okomiti na t_A i t_B.

Iz činjenice da ω okomito siječe $\mathcal{P}$ zaključujemo da su ℓ_A i ℓ_B tangente na ω u točkama A i B. Neka je S središte od ω, onda je $SA \perp \ell_A \implies SA || t_A \implies S \in t_A$. Slično je $S \in t_B$. Dakle S je presjek t_A i t_B. Jednadžbe tangenti su

$$\begin{aligned} t_A &: 2py = p(2p + x), \\ t_B &: -2py = p(2p + x). \end{aligned}$$

Lako se izračuna da je presjek $S = (-2p, 0)$. Radijus je $R = |SA| = 2\sqrt{5}p$, dakle jednadžba kružnice je

$$\omega : (x + 2p)^2 + y^2 = 20p^2.$$

Konkretno za $p = 4$, imamo $\boxed{\omega : (x + 8)^2 + y^2 = 320}$. □